Numerička matematika. Ogledni primjeri

Kolokvijum obuhvata oblasti: Rješavanje sistema linearnih jednačina, Metode za računanje svojstvenih vrijednosti matrice, Metoda konačnih razlika za rješavanje graničnog zadatka za ODJ. Završni ispit obuhvata oblasti: Metoda konačnih elemenata za rješavanje graničnog zadatka za ODJ, Metoda konačnih razlika za PDJ eliptičkog tipa, Metoda konačnih razlika za PDJ paraboličkog tipa, Zadatak o najboljoj aproksimaciji date funkcije.

Za kolokvijum dolazi jedno ili dva pitanja iz teorije i tri ili četiri zadatka. Za završni ispit dolazi jedno ili dva pitanja iz teorije i tri ili četiri zadatka.

U nastavku: Pitanja iz teorije i Postavke zadataka, zajedno sa uputstvima i rješenjima.

Pitanja iz teorije

⋈ Rješavanje sistema linearnih jednačina

1. Šta znači djelimično pivotiranje ili izbor glavnog elementa u slučaju primjene Gaussove metode eliminacije?
2. U čemu se rješavanje sistema linearnih jednačina sa trodijagonalnom matricom razlikuje od opšteg slučaja?
3. Ukratko o LU dekompoziciji date matrice
4. Ukratko o Cholesky dekompoziciji date matrice
5. Vremenski trošak algoritma baziranog na Cholesky dekompoziciji, odnosno u slučaju Gaussove metode eliminacije
6. Numerički algoritam Jacobijeve metode
7. Teorema o dovoljnim uslovima za konvergenciju Jacobijeve metode
8. Formule za ocjenu greške k–te aproksimacije u slučaju primjene Jacobijeve metode
9. U glavnim crtama o ideji metode konjugovanih gradijenata (metode gradijentnog spusta) za $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

⋈ Metode za računanje svojstvenih vrijednosti matrice

10. Numerički algoritam metode stepena
11. Teorema koja se odnosi na metodu stepena

⋈ Metoda konačnih razlika za rješavanje graničnog zadatka za ODJ

12. Numerički algoritam metode konačnih razlika za $-y''+p(x)y = f(x)$, $y(0) = a$, $y(X) = b$
13. Kako glasi teorema koja se odnosi na metodu konačnih razlika u slučaju $\delta_n = R_0 = R_N = 0$?
14. Metoda konačnih razlika za ODJ – lema 1, gdje se pretpostavlja da je $p_n \geq 0$ za $n = 1, \ldots, N-1$
15. Metoda konačnih razlika za ODJ – slučaj diferencijalne jednačine oblika $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$
16. Kako se aproksimiraju granični uslovi druge vrste $y'(0) = a$, $y'(X) = b$?
17. Kako se aproksimiraju granični uslovi treće vrste $\alpha_0 y(0) + \alpha_1 y'(0) = a$, $\beta_0 y(X) + \beta_1 y'(X) = b$?

⋈ Metoda konačnih elemenata za rješavanje graničnog zadatka za ODJ

18. Priprema iz funkcionalne analize (za varijacione metode)
19. Ideja o metodi varijacionog tipa i pojam Ritzove metode, kako glasi Ritzov sistem jednačina
20. Šablon Ritzove metode
21. Kako glasi izraz za funkcional $I(y)$ koji se minimizuje u slučaju $-y'' + p(x)y = f(x)$, $y(0) = y(1) = 0$, $p(x) \geq 0$?
22. Ritzova metoda u formi metode konačnih elemenata: kako se definišu funkcije $\varphi_{n,k}(x)$ i koji oblik ima približno rješenje?
23. Slučaj nehomogenih graničnih uslova $y(0) = a$, $y(1) = b$, Ritzova metoda

⋈ Metoda konačnih razlika za PDJ eliptičkog tipa

24. Eliptička jednačina – numerički algoritam – kako glasi sistem jednačina po nepoznatim u_{ij}?
25. Eliptička jednačina – dokaz za aproksimaciju, tj. ocjena veličine $Lu(x,y) - \ell(u(x,y))$

⋈ Metoda konačnih razlika za PDJ paraboličkog tipa

26. Parabolička jednačina – numerički algoritam u slučaju eksplicitne šeme ("$\sigma = 0$")
27. Parabolička jednačina – numerički algoritam u slučaju simetrične šeme ("$\sigma = \frac{1}{2}$")
28. Parabolička jednačina – numerički algoritam u slučaju čisto implicitne šeme ("$\sigma = 1$")
29. Parabolička jednačina, simetrična šema – ispitivanje aproksimacije – ocjena pokazatelja $|r_m^n|$ i $\max |r_m^n|$, koliki je red aproksimacije?
30. Parabolička jednačina – ispitivanje stabilnosti po normi tipa C – koji uslov treba da bude zadovoljen da bi diferencna šema bila stabilna?

⋈ Zadatak o najboljoj aproksimaciji date funkcije

31. Linearni trend $y = ax + b$ (linearni model)
32. Model $y = ae^{bx}$ koji se svodi na linearni slučaj
33. Metoda inverznih distanci – aproksimacija funkcije $z = z(x,y)$
34. Metoda kvadratnih inverznih distanci – aproksimacija funkcije $z = z(x,y)$
35. Kako glase formule za $\gamma(h)$ i $\hat{z}_0$ u jednostavnom krigingu?
36. Kako glase formule za $[a_{ij}]$, $[b_i]$ i $\hat{z}_0$ u običnom krigingu?

Postavke zadataka, zajedno sa uputstvima i rješenjima

⋈ Rješavanje sistema linearnih jednačina

(1) Izračunajte svojstvene vrijednosti matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

`Uputstvo.` Treba $\det(\lambda I - A) = 0$, gdje je I jedinična matrica.

(2) Poznato je da su $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = -1$ svojstvene vrijednosti matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Odredite odgovarajuće svojstvene vektore $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$.

`Uputstvo.` Treba $A\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$.

3 Dato je $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, izračunajte $\|\mathbf{x}\|_\infty$. Dato je $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & -1 \end{bmatrix}$, izračunajte $\|A\|_\infty$.

`Uputstvo.` Po formulama $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$, $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\right)$.

4 Razmotrimo simetričnu matricu $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Dokažite da je data matrica pozitivno definitna.

`Uputstvo.` Treba primijeniti Sylvesterov kriterijum, koji se odnosi na simetričnu matricu A ($A^T = A$). Za takvu matricu, neophodan i dovoljan uslov da bi ona bila pozitivno definitna ($A > 0$) glasi: $\det\left([a_{ij}]_{i,j=1}^k\right) > 0$ za $k = 1, \ldots, n$.

5 Riješite trodijagonalni sistem linearnih jednačina $\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ -x_3 + 2x_4 - x_5 = -4 \\ -x_4 + 2x_5 = 4 \end{array}$.

`Rezultat:` $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 1, 2, 0, 2)$.

6 Razmotrimo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Treba izvršiti LU dekompoziciju date matrice.

`Objašnjenje.` Datu matricu A treba prikazati kao proizvod $A = LU$, gdje je L donje trougaona matrica sa jedinicama na dijagonali, dok je U gornje trougaona matrica.

`Rezultat:` $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

7 Razmotrimo matricu $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ za koju znamo da je simetrična i pozitivno definitna. Treba izvršiti njenu dekompoziciju po Holeckom (Cholesky).

`Objašnjenje.` Datu matricu A treba prikazati kao proizvod $A = LL^T$, gdje je L donje trougaona matrica, $l_{ii} > 0$.

`Rezultat:` $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

8 Razmotrimo sistem linearnih jednačina $\begin{array}{l} 10x_1 + 4x_2 - x_3 = 8 \\ 2x_1 - 10x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 12 \end{array}$ ($A\mathbf{x} = \mathbf{b}$). Dokažite da Jacobijev iterativni proces (za njegovo numeričko rješavanje) konvergira. Napišite formulu po kojoj se računaju uzastopne aproksimacije. Nakon što proizvoljno izaberete početnu aproksimaciju $\mathbf{x}_0$, izračunajte prve dvije aproksimacije $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$ po formulama od maločas.

`Uputstvo.` Dovoljan uslov za konvergenciju Jacobijeve metode: da je matrica A dijagonalno dominantna. Formule: $\mathbf{x}_{k+1} = -P^{-1}Q\mathbf{x}_k + P^{-1}\mathbf{b}$ ($\mathbf{x}_{k+1} = B\mathbf{x}_k + \mathbf{c}$), gdje je $A = P + Q$, $P = \mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$.

$\bowtie$ Metode za računanje svojstvenih vrijednosti matrice

9 Razmotrimo matricu $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Želimo da numerički izračunamo njenu dominantnu svojstvenu vrijednost λ_1. U tom cilju, primjenjujemo metodu stepena. Napišite formule po kojima se računaju uzastopne aproksimacije $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$. Izračunajte μ_0, μ_1, μ_2. Proizvoljno se bira polazni vektor $\mathbf{x}_0 \in R^2$.

10 Želimo da izračunamo dominantnu svojstvenu vrijednost λ_1 matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. U tom cilju, mi primjenjujemo metodu stepena na matricu $B = A + I = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, tako što ćemo izračunati μ_0, μ_1, μ_2. Naime, poznato je sljedeće: $\lambda_i(B) = \lambda_i(A) + 1$. Uopšte, važi tvrđenje: ako je $B = A + cI$ onda je $\lambda_i(B) = \lambda_i(A) + c$. Riječima, svojstvene vrijednosti matrice B su za c veće od svojstvenih vrijednosti matrice A. Sa I je označena jedinična matrica dimenzije 2×2 (dimenzije $n \times n$).

Kaže se da je izvršena translacija po λ. Ako je translacija pogodna onda se konvergencija ubrzava.

$\bowtie$ Metoda konačnih razlika za rješavanje graničnog zadatka za ODJ

11 a) Naći opšte rješenje diferencijalne jednačine $y'' + 4y' + 3y = 0$. `Rezultat:` $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x}$.

b) $y'' - 4y = 0$. `Rezultat:` $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$.

c) $y'' + 2y' + 5y = 0$. `Rezultat:` $y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) e^{-x}$.

d) $y'' + y = 0$. `Rezultat:` $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

e) $y'' - 4y' + 4y = 0$. `Rezultat:` $y = e^{2x}(C_1 x + C_2)$.

f) $y'' + y' = 0$. `Rezultat:` $y = C_1 + C_2 e^{-x}$.

`Uputstvo.` Razmotrimo linearnu homogenu sa konstantnim koeficijentima $y'' + py' + qy = 0$, gdje $p, q \in R$. Kako se određuje njeno opšte rješenje? Razmatranoj jednačini pridružuje se njena tzv. karakteristična jednačina po nepoznatoj $\lambda \in R$ ili $\lambda \in C$: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Napisali smo jednu kvadratnu jednačinu. Treba naći njena rješenja. Vidjećemo da postoje tri slučaja.

Slučaj 1. Kvadratna jednačina ima dva međusobno različita realna rješenja λ_1 i λ_2. Tada opšte rješenje diferencijalne jednačine glasi $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, gdje su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

Slučaj 2. Kvadratna jednačina ima dva konjugovano kompleksna rješenja $\lambda_{1,2} = a \pm ib$, gdje $a, b \in R$, $b \neq 0$. Tada opšte rješenje diferencijalne jednačine glasi $y = (C_1 \sin bx + C_2 \cos bx) e^{ax}$.

Slučaj 3. Kvadratna jednačina ima jedan realni korijen λ koji se ponavlja (dvostruki korijen). Tada opšte rješenje diferencijalne jednačine glasi $y = e^{\lambda x}(C_1 x + C_2)$.

12 a) Naći opšte rješenje diferencijalne jednačine $y'' - 4y = 1$. `Rezultat:` $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{4}$.

b) $y'' + 2y' + 5y = x^2$. `Rezultat:` $y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) e^{-x} + \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{25}x - \frac{2}{125}$.

`Uputstvo.` Razmotrimo jednačinu oblika $y'' + py' + qy = f(x)$, gdje $p, q \in R$, a $f(x)$ je polinom stepena $n \geq 0$; nehomogena sa konstantnim koeficijentima, pri čemu desna strana $f(x)$ ima specijalni oblik. Neka je $q \neq 0$. Lako se dolazi do rješenja navedene jednačine. Rješenje jednačine (opšte rješenje jednačine) glasi $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$, gdje je $y_1(x)$ opšte rješenje jednačine $y'' + py' + qy = 0$, dok je $y_2(x)$ jedan polinom stepena n koji zadovoljava polaznu jednačinu $y'' + py' + qy = f(x)$. Polinom se određuje metodom neodređenih koeficijenata, polazeći od reprezentacije $y_2(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, gdje su $a_i \in R$ zasad neodređene veličine.

Ako je $p \neq 0$, $q = 0$ onda se rješenje $y_2(x)$ traži i pronalazi u obliku $y_2(x) = x(a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0)$. Ako je $p = q = 0$ onda postoji partikularno rješenje oblika $y_2(x) = x^2(a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0)$.

13 Naći rješenje zadatka o graničnim vrijednostima $y'' + 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

14 Naći rješenje zadatka o graničnim vrijednostima $y'' + y = 0$, $y'(0) = 1$, $y'(\frac{\pi}{2}) = -1$.

15 Dat je granični zadatak $y'' + y = x$, $y(0) = 1$, $y(0{,}4) = 2$. Odredite približnu vrijednost rješenja $y = y(x)$ na intervalu $0 \le x \le 0{,}4$ pomoću standardne diferencne šeme (pomoću metode konačnih razlika), uzimajući korak $h = 0{,}1$.

16 Dat je granični zadatak

$$\begin{cases} y'' + xy' + x^3 y = e^x, & 0 < x < 3 \\ y(0) = 1, \qquad y(3) = 3 \end{cases}$$

Odredite približnu vrijednost rješenja $y = y(x)$ pomoću metode konačnih razlika, uzimajući korak $h = 1$.

`Rješenje.`

$[a,b] = [x_0, x_0 + X] = [x_0, x_N]$, $\quad h = X/N$, ekvidistantna mreža,

$$y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + O(h^2), \qquad y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + O(h^2),$$

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ y(a) = A, \quad y(b) = B \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2}(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + p(x_n)\frac{1}{2h}(y_{n+1} - y_{n-1}) + q(x_n)y_n = f(x_n), \quad 1 \le n \le N-1 \\ y_0 = A, \quad y_N = B \end{cases}$$

Ima $N+1$ uslova, $N+1$ nepoznatih $y_0, y_1, \ldots, y_N$ ($N-1$ uslova, $N-1$ nepoznatih $y_1, \ldots, y_{N-1}$). U našem zadatku $N = 3$. Redom

$$x = 2: \qquad 3 - 2y_2 + y_1 + 3 - y_1 + 8y_2 = e^2, \qquad 6y_2 = e^2 - 6 \qquad y_2 = \frac{1}{6}e^2 - 1,$$

$$x = 1: \qquad y_2 - 2y_1 + 1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2} + y_1 = e, \qquad \frac{3}{2}y_2 - \frac{3}{2}y_1 = e - \frac{1}{2} \qquad y_2 - y_1 = \frac{2}{3}e - \frac{1}{3}$$

$$y_1 = y_2 - \frac{2}{3}e + \frac{1}{3}, \qquad e = 2{,}72 \qquad e^2 = 7{,}39 \qquad y_2 = 0{,}23 \qquad y_1 = -1{,}25.$$

Odgovor:

x	0	1	2	3
y	1	$-1{,}25$	$0{,}23$	3

17 Dokazati da diferencni izraz $M(y,h) = \frac{1}{h^2}\Big[(1-h)y_{k-1} - 2y_k + (1+h)y_{k+1}\Big]$ aproksimira diferencijalni izraz $L(y) = y''(x) + 2y'(x)$ u tački $x = x_k$ i odrediti red (po h) te aproksimacije. Pretpostavlja se da je funkcija $y = y(x)$ dovoljno glatka.

`Rješenje.`

$L = y'' + 2y'$, $M = \frac{1}{h^2}\Big((1-h)y(x-h) - 2y(x) + (1+h)y(x+h)\Big)$, oznaka $y = y(x_n)$, $y' = y'(x_n)$, …, Taylor

$$M = \frac{1}{h^2}\Big((1-h)\Big(y - hy' + \frac{h^2}{2}y'' - \frac{h^3}{6}y''' + \frac{h^4}{24}y^{IV} + O(h^5)\Big) - 2y + (1+h)\times$$

$$\Big(y + hy' + \frac{h^2}{2}y'' + \frac{h^3}{6}y''' + \frac{h^4}{24}y^{IV} + O(h^5)\Big)\Big) =$$

$$\frac{1}{h^2}\Big(2h^2y' + h^2y'' + \frac{h^4}{3}y''' + \frac{h^4}{12}y^{IV} + O(h^5)\Big) = 2y' + y'' + \frac{h^2}{3}y''' + \frac{h^2}{12}y^{IV} + O(h^3),$$

$\rho = \rho(h)$ greška aproksimacije, $\rho = L - M = -\frac{h^2}{3}y''' - \frac{h^2}{12}y^{IV} + O(h^3) = Ch^2 + O(h^3)$, $\rho \sim Ch^2$.

Znači $\lim_{h\to 0}\rho = 0$, tako da zaista aproksimira. Odgovor: aproksimacija je drugog reda (drugog stepena).

18 Nastavak prethodnog zadatka. Upotrebiti približnu formulu od maločas $L(y) \approx M(y,h)$ za određivanje približne vrijednosti rješenja $y = y(x)$ graničnog zadatka, na intervalu $0 \le x \le 1$,

$$\begin{cases} y'' + 2y' = x \\ y(0) = 1, \quad y'(1) = 1 \end{cases}$$

uzimajući da je korak mreže $h = \dfrac{1}{3}$, tj. uzimajući da mrežu čvorova čine $x_k = kh$, $0 \le k \le 3$.

`Rješenje.`

Dato je $y'' + 2y' \approx \frac{1}{h^2}\Big((1-h)y(x-h) - 2y(x) + (1+h)y(x+h)\Big)$.

Neka je $h = \frac{1}{3}$, neka je $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = 1$, neka su y_0, y_1, y_2, y_3 odgovarajuće približne vrijednosti rješenja.

Tako da je ustvari dato $y''(x_k) + 2y'(x_k) \approx \frac{1}{h^2}\Big((1-h)y_{k-1} - 2y_k + (1+h)y_{k+1}\Big)$. Redom

$y(0) = 1 \quad y_0 = 1, \quad y'(1) = 1 \quad \frac{y_3 - y_2}{h} = 1 \quad y_3 - y_2 = \frac{1}{3} \quad y_3 = y_2 + \frac{1}{3}, \quad y'' + 2y' = x \quad (0 < x < 1)$

$$x = \frac{1}{3}: \qquad \frac{2}{3}y_0 - 2y_1 + \frac{4}{3}y_2 = \frac{1}{27}, \qquad -2y_1 + \frac{4}{3}y_2 = -\frac{17}{27} \qquad -6y_1 + 4y_2 = -\frac{17}{9},$$

$$x = \frac{2}{3}: \qquad \frac{2}{3}y_1 - 2y_2 + \frac{4}{3}y_3 = \frac{2}{27}, \qquad 2y_1 - 6y_2 + 4y_3 = \frac{2}{9} \qquad 2y_1 - 2y_2 = -\frac{10}{9},$$

$$\text{odgovor:} \quad y_0 = 1, \;\; y_1 = \frac{37}{18}, \;\; y_2 = \frac{47}{18}, \;\; y_3 = \frac{53}{18}.$$

19 Razmotrimo granični zadatak $y'' + 2xy' - x^2y = x^2$, $y(0) = 1$, $y(1) = 0$. Neka je $h = 1/4$. Napisati diferencne jednačine, koristeći konačne razlike za sve izvode. Samo treba formirati sistem jednačina, ne treba ga rješavati.

20 Razmotrimo granični zadatak $y'' + 2xy' - x^2y = x^2$, $y'(0) + y(0) = 1$, $y'(1) + \frac{1}{2}y(1) = 0$. Neka je $h = 1/4$. Napisati diferencne jednačine, koristeći konačne razlike za sve izvode. Samo treba formirati sistem jednačina, ne treba ga rješavati.

$\bowtie$ Metoda konačnih elemenata za rješavanje graničnog zadatka za ODJ

21 Metodom Galerkina naći približno rješenje jednačine $y'' + y + x = 0$, $y(0) = y(1) = 0$. Za osnovne funkcije uzeti $u_1(x) = x(1-x)$, $u_2(x) = x^2(1-x)$ i $u_3(x) = x^3(1-x)$.

`Uputstvo:` $y = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + c_3u_3(x)$, $y'' + y + x \perp u_i$, tj. $\langle y'' + y + x, u_i\rangle = 0$.

Samo se napominje da je ispravno i $y'' + y + x \perp v_i$, gdje v_i mogu da budu na primjer splajni određenog tipa ili gdje je recimo $v_1(x) = \sin \pi x, \ldots, v_3(x) = \sin 3\pi x$ (tzv. test–funkcije).

22 Metodom Galerkina naći približno rješenje jednačine $y'' + y + x = 0$, $y(0) = y(1) = 0$. Za osnovne funkcije uzeti $u_1(x) = x(1-x)$ i $u_2(x) = x^2(1-x)$.

`Rješenje.`

Približno rješenje tražimo u obliku $y = c_1x(1-x) + c_2x^2(1-x)$ gdje se $u_1(x)$ i $u_2(x)$ pojavljuju u ulozi osnovnih funkcija. Tako

$y'' + y + x = -2c_1 + c_2(2-6x) + c_1(x-x^2) + c_2(x^2-x^3) + x.$

Veličine c_1 i c_2 tražimo iz uslova $y''+y+x \perp u_1(x)$ i $y''+y+x \perp u_2(x)$ gdje se $u_1(x)$ i $u_2(x)$ pojavljuju u ulozi probnih funkcija (test–funkcija). Račun

$\int_0^1 (y''+y+x)u_1(x)dx = 0$, $\int_0^1 (y''+y+x)u_2(x)dx = 0$, skalarni proizvod u prostoru $L^2(0,1)$,

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}c_1 - \frac{1}{6}c_2 + \frac{1}{12} + \frac{1}{30}c_1 + \frac{1}{60}c_2 = 0 \qquad 369c_1 - 71 = 0 \qquad c_1 = 0{,}19 \\ -\frac{1}{6}c_1 - \frac{2}{15}c_2 + \frac{1}{20} + \frac{1}{60}c_1 + \frac{1}{105}c_2 = 0 \qquad 41c_2 - 7 = 0 \qquad c_2 = 0{,}17 \end{cases}$$

Odgovor: približno rješenje glasi $y = 0{,}19(x-x^2) + 0{,}17(x^2-x^3)$.

Dodajmo da tačno rješenje glasi $y = \frac{\sin x}{\sin 1} - x$.

23 Metodom Galerkina naći približno rješenje graničnog zadatka $y'' + 2y = x$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$. Za osnovne funkcije uzeti $u_1 = x^2 + ax$ i $u_2 = x^3 + bx$, gdje konstante a i b treba odrediti.

`Rješenje.`

$u_1(x) = x^2 + ax$, $u_2(x) = x^3 + bx$, osnovne funkcije moraju zadovoljavati granične uslove, $u_1'(x) = 2x + a$, $u_2'(x) = 3x^2 + b$, $u_1(0) = 0$, $u_1'(1) = 0$, $u_2(0) = 0$, $u_2'(1) = 0$, $a = -2$, $b = -3$, $u_1(x) = x^2 - 2x$, $u_2(x) = x^3 - 3x$

približno rješenje ima oblik $y = c_1u_1(x) + c_2u_2(x)$ (zadovoljava granične uslove), gdje treba odrediti c_1 i c_2, $y'' + 2y - x \perp u_1(x)$, $y'' + 2y - x \perp u_2(x)$, $\langle y'' + 2y - x, u_1\rangle = 0$, $\langle y'' + 2y - x, u_2\rangle = 0$, skalarni proizvod u prostoru $L^2(0,1)$, $\int_0^1 (y'' + 2y - x)u_1(x)dx = 0$, $\int_0^1 (y'' + 2y - x)u_2(x)dx = 0$

$y'' + 2y - x = 2c_1 + 6xc_2 + 2c_1(x^2 - 2x) + 2c_2(x^3 - 3x) - x$, etc. (treba izračunati, treba dovršiti).

24 Ritzovom metodom sa trigonometrijskom bazom $\{\sin x, \sin 2x\}$ riješiti granični zadatak $y'' - y + 1 = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$.

`Rješenje.`

U opštem slučaju: $-y'' + p(x)y = f(x)$, $y(a) = 0$, $y(b) = 0$.

Jedan od uslova teoreme traži $p(x) \geq 0$ za $a \leq x \leq b$.

Osnovne funkcije $u_1(x), \ldots, u_n(x)$. Recimo $n = 2$ osnovne funkcije $u_1(x)$ i $u_2(x)$.

Približno rješenje tražimo u obliku $y = c_1u_1(x) + c_2u_2(x)$. Ritzov sistem

$$\begin{bmatrix} \langle Lu_1, u_1\rangle & \langle Lu_1, u_2\rangle \\ \langle Lu_2, u_1\rangle & \langle Lu_2, u_2\rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, u_1\rangle \\ \langle f, u_2\rangle \end{bmatrix} \qquad \text{druge oznake} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Matrica je simetrična. Skalarni proizvod u prostoru $L^2(a,b)$. Obično se

$$\langle Lu, v\rangle = \int_a^b \Big(Lu(x)\Big)v(x)dx = \int_a^b \Big(-u''(x) + p(x)u(x)\Big)v(x)dx$$

računa kao

$$\langle Lu, v\rangle = \int_a^b \Big(u'(x)v'(x) + p(x)u(x)v(x)\Big)dx.$$

U našem zadatku: $-y'' + y = 1$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$, $u_1(x) = \sin x$, $u_2(x) = \sin 2x$, $a = 0$, $b = \pi$, $p(x) = 1$, $f(x) = 1$. Vidimo da je $p(x) \geq 0$ za $0 \leq x \leq \pi$.

Račun $a_{11} = \int_0^\pi (\cos^2 x + \sin^2 x)dx = \pi$, $a_{12} = \int_0^\pi (2\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x)dx = 0$, $a_{21} = a_{12} = 0$, $a_{22} = \int_0^\pi (4\cos^2 2x + \sin^2 2x)dx = \frac{5\pi}{2}$, $b_1 = \int_0^\pi \sin x dx = 2$, $b_2 = \int_0^\pi \sin 2x dx = 0$,

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 = b_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi c_1 \qquad = 2 \\ \qquad \frac{5\pi}{2} c_2 = 0 \end{cases} \qquad c_1 = \frac{2}{\pi}, \quad c_2 = 0.$$

Odgovor: numeričko rješenje glasi $y = \frac{2}{\pi} \sin x$.

(25) Ritzovom metodom sa bazom $\{1 - x^2, 1 - x^4\}$ riješiti granični zadatak $y'' - (1+x^2)y = 1$, $y(-1) = y(1) = 0$.

`Rješenje.`

Polazimo od $-y'' + (1 + x^2)y = -1$, $y(-1) = 0$, $y(1) = 0$, $u_1(x) = 1 - x^2$, $u_2(x) = 1 - x^4$, $a = -1$, $b = 1$, $p(x) = 1 + x^2$, $f(x) = -1$. Ispunjen je uslov $p(x) \geq 0$ za $-1 \leq x \leq 1$.
Numerički odgovor ima oblik $y = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$, gdje treba odrediti c_1 i c_2:

$$\begin{bmatrix} \langle Lu_1, u_1 \rangle & \langle Lu_1, u_2 \rangle \\ \langle Lu_2, u_1 \rangle & \langle Lu_2, u_2 \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, u_1 \rangle \\ \langle f, u_2 \rangle \end{bmatrix}.$$

Matrica je simetrična,

$$\langle Lu_1, u_1 \rangle = \int_{-1}^{1} \Big(u_1'(x) u_1'(x) + p(x) u_1(x) u_1(x) \Big) dx,$$

$$\langle Lu_1, u_2 \rangle = \int_{-1}^{1} \Big(u_1'(x) u_2'(x) + p(x) u_1(x) u_2(x) \Big) dx,$$

$$\langle f, u_1 \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) u_1(x) dx, \qquad \text{etc.} \qquad \text{(treba izračunati, treba dovršiti).}$$

(26) Razmotrimo funkcional $F(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 4x - 4y$ $(x, y \in R)$. Odredite najmanju moguću vrijednost datog funkcionala. U kojoj tački (x, y) se ostvaruje najmanja moguća vrijednost?

U zadacima **27–32** koriste se konačni elementi $\varphi_{n,k}(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Te funkcije definisane su za $0 \leq x \leq 1$ relacijama

$$\varphi_{n,k}(x) = \begin{cases} (x - x_{k-1})/h & \text{za} \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k \\ (x_{k+1} - x)/h & \text{za} \quad x_k \leq x \leq x_{k+1} \\ 0 \quad \text{inače} \end{cases} \qquad (k = 1, \ldots, n-1)$$

$$\varphi_{n,0}(x) = \begin{cases} (x_1 - x)/h & \text{za} \quad 0 \leq x \leq x_1 \\ 0 \quad \text{inače} \end{cases} \qquad \varphi_{n,n}(x) = \begin{cases} (x - x_{n-1})/h & \text{za} \quad x_{n-1} \leq x \leq 1 \\ 0 \quad \text{inače} \end{cases}$$

Stavili smo $h = 1/n$, $x_k = kh$. Mi smo za trenutak fiksirali jedan prirodan broj n. V. sliku.

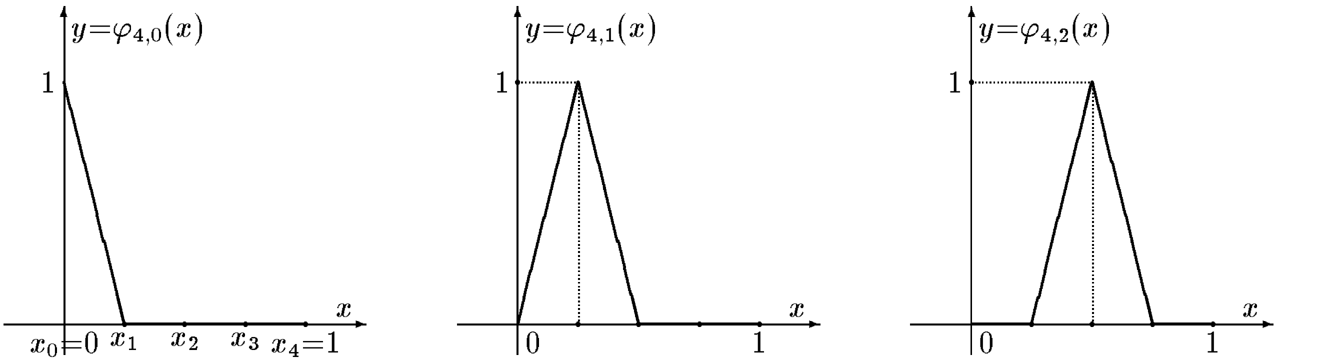
(27) Razmotrimo granični zadatak $-y'' + y = 1$, $y(0) = y(1) = 0$. Želimo da nađemo njegovo numeričko rješenje Ritzovom metodom u formi metode konačnih elemenata. Treba fiksirati jedan prirodan broj n. Tada numeričko rješenje ima oblik $v(x) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \varphi_{n,i}(x)$. Treba odrediti c_i. Formirajte Ritzov sistem $M\mathbf{c} = \mathbf{b}$ dimenzije $n - 1$ za određivanje koeficijenata $c_1, \ldots, c_{n-1}$.

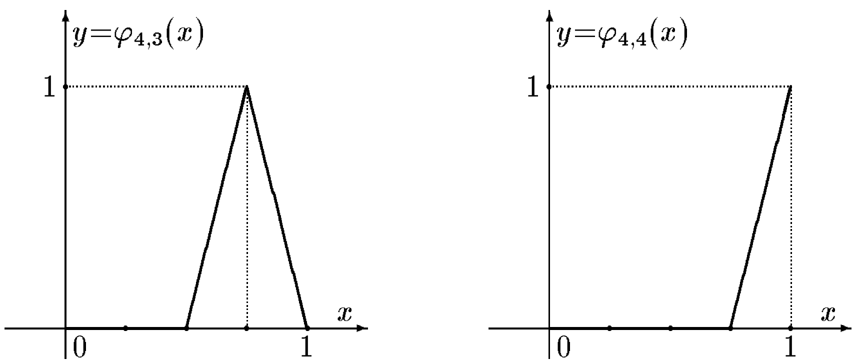
`Objašnjenje:` $M = [m_{ij}]_{i,j=1}^{n-1}$, $\mathbf{c} = [c_1 \ \ \ldots \ \ c_{n-1}]^T$, $\mathbf{b} = [b_1 \ \ \ldots \ \ b_{n-1}]^T$, $M\mathbf{c} = \mathbf{b}$ ili

$$\begin{bmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n-1,1} & \cdots & m_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}.$$

`Rezultat:` $m_{ii} = 2n + \frac{2}{3n}$, $m_{i,i-1} = m_{i,i+1} = -n + \frac{1}{6n}$, ostali $m_{ij} = 0$ (matrica M je trodijagonalna), $b_i = \frac{1}{n}$.

Do rezultata se dolazi sa $m_{ij} = \langle A\varphi_{n,i}, \varphi_{n,j}\rangle = \int_0^1 \left[\varphi'_{n,i}(x)\varphi'_{n,j}(x) + p(x)\varphi_{n,i}(x)\varphi_{n,j}(x)\right] dx$, $b_i = \langle f, \varphi_{n,i}\rangle = \int_0^1 f(x)\varphi_{n,i}(x)dx$.





Grafici konačnih elemenata $\varphi_{n,i}(x)$ $(0 \le i \le n)$ u slučaju $n = 4$

(28) Nastavak prethodnog zadatka. Izaberimo $n = 4$, tako da je $v(x) = c_1\varphi_{n,1}(x) + \ldots + c_3\varphi_{n,3}(x)$. Sprovedite račun, tj. nađite rješenje Ritzovog sistema $M\mathbf{c} = \mathbf{b}$. Drugim riječima, izračunajte $c_1, \ldots, c_3$.

`Rezultat:` $c_1 = 0{,}08573$, $c_2 = 0{,}11372$, $c_3 = 0{,}08573$. Zapaziti da je $v(x_i) = c_i$. Analitičko rješenje glasi $y = 1 - \cosh(x - 0{,}5)/\cosh 0{,}5$. Njegove vrijednosti u čvorovima su $y_1 = 0{,}08532$, $y_2 = 0{,}11318$, $y_3 = 0{,}08532$, tako da pojedinačna odstupanja (greške) iznose $r_1 = -0{,}00041$, $r_2 = -0{,}00054$, $r_3 = -0{,}00041$.

(29) Razmotrimo granični zadatak $-y'' + y = 1$, $y(0) = 2$, $y(1) = 1$. Želimo da nađemo njegovo numeričko rješenje Ritzovom metodom u formi metode konačnih elemenata. Treba fiksirati jedan prirodan broj n. Tada numeričko rješenje ima oblik $v(x) = 2\varphi_{n,0}(x) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i\varphi_{n,i}(x) + \varphi_{n,n}(x)$. Treba odrediti c_i. Formirajte Ritzov sistem $M\mathbf{c} = \mathbf{b}$ dimenzije $n-1$ za određivanje koeficijenata $c_1, \ldots, c_{n-1}$.

`Rezultat:` $m_{ii} = 2n + \frac{2}{3n}$, $m_{i,i-1} = m_{i,i+1} = -n + \frac{1}{6n}$, ostali $m_{ij} = 0$ (matrica M je trodijagonalna), $b_i = \frac{1}{n}$ za $2 \le i \le n-2$, $b_1 = \frac{1}{n} - 2(-n + \frac{1}{6n})$, $b_{n-1} = \frac{1}{n} - (-n + \frac{1}{6n})$.

Granični uslovi $y(0) = a$, $y(1) = b \Rightarrow$ približno rješenje $v(x) = a\varphi_{n,0}(x) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i\varphi_{n,i}(x) + b\varphi_{n,n}(x)$.

(30) Nastavak prethodnog zadatka. Izaberimo $n = 4$, tako da je $v(x) = 2\varphi_{n,0}(x) + c_1\varphi_{n,1}(x) + \ldots + c_3\varphi_{n,3}(x) + \varphi_{n,4}(x)$. Sprovedite račun, tj. nađite rješenje Ritzovog sistema $M\mathbf{c} = \mathbf{b}$. Drugim riječima, izračunajte $c_1, \ldots, c_3$.

Rezultat: $c_1 = 1{,}69948$, $c_2 = 1{,}44314$, $c_3 = 1{,}21479$. Zapaziti da je $v(x_i) = c_i$. Analitičko rješenje glasi $y = 1 + \sinh(1-x)/\sinh 1$. Njegove vrijednosti u čvorovima su $y_1 = 1{,}69972$, $y_2 = 1{,}44341$, $y_3 = 1{,}21495$, tako da pojedinačna odstupanja (greške) iznose $r_1 = 0{,}00024$, $r_2 = 0{,}00027$, $r_3 = 0{,}00016$.

(31) Razmotrimo granični zadatak $-y'' - y = 1$, $y(0) = y(1) = 0$. Želimo da nađemo njegovo numeričko rješenje primjenom metode Galerkina u formi metode konačnih elemenata. Treba fiksirati jedan prirodan broj n. Tada numeričko rješenje ima oblik $v(x) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \varphi_{n,i}(x)$, linearna kombinacija osnovnih funkcija. Treba odrediti c_i. Formirajte sistem linearnih jednačina $M\mathbf{c} = \mathbf{b}$ dimenzije $n-1$ za određivanje koeficijenata $c_1, \ldots, c_{n-1}$.

Uvedimo oznaku za ostatak $Ly - f = -y'' - y - 1$. Sistem linearnih jednačina formira se na bazi uslova $(Lv - f) \perp \varphi_{n,i}$ ili svejedno $\langle Lv - f, \varphi_{n,i} \rangle = 0$ (skalarni proizvod) $(i = 1, \ldots, n-1)$, gdje $\varphi_{n,i}$ imaju ulogu test funkcija. Vidimo da jedne te iste funkcije služe i kao osnovne i kao test funkcije. U računu, $\langle L\varphi_{n,i}, \varphi_{n,j} \rangle = \int_0^1 \left[\varphi'_{n,i}(x)\varphi'_{n,j}(x) + p(x)\varphi_{n,i}(x)\varphi_{n,j}(x) \right] dx$.

Rezultat: $m_{ii} = 2n - \frac{2}{3n}$, $m_{i,i-1} = m_{i,i+1} = -n - \frac{1}{6n}$, ostali $m_{ij} = 0$ (matrica M je trodijagonalna), $b_i = \frac{1}{n}$.

(32) Nastavak prethodnog zadatka. Izaberimo $n = 4$, tako da je $v(x) = c_1\varphi_{n,1}(x) + \ldots + c_3\varphi_{n,3}(x)$. Sprovedite račun, tj. nađite rješenje sistema $M\mathbf{c} = \mathbf{b}$. Drugim riječima, izračunajte $c_1, \ldots, c_3$.

Rezultat: $c_1 = 0{,}10347$, $c_2 = 0{,}13869$, $c_3 = 0{,}10347$. Zapaziti da je $v(x_i) = c_i$. Analitičko rješenje glasi $y(x) = \frac{1-\cos 1}{\sin 1} \sin x + \cos x - 1$. Njegove vrijednosti u čvorovima su $y_1 = 0{,}10407$, $y_2 = 0{,}13949$, $y_3 = 0{,}10407$, tako da pojedinačna odstupanja (greške) iznose $r_1 = 0{,}00060$, $r_2 = 0{,}00080$, $r_3 = 0{,}00060$.

Pregled: **27–28** homogeni granični uslovi, Ritzova metoda, **29–30** nehomogeni granični uslovi, Ritzova metoda, **31–32** homogeni granični uslovi, metoda Galerkina.

$\bowtie$ Metoda konačnih razlika za PDJ eliptičkog tipa

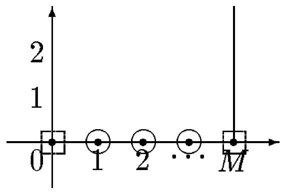
Nema zadataka iz ove oblasti.

$\bowtie$ Metoda konačnih razlika za PDJ paraboličkog tipa

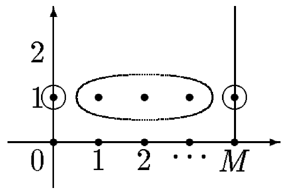
(33) Razmotrimo početno–granični problem sa paraboličkom jednačinom $u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = x(1-x)$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$. Želimo da odredimo njegovo približno rješenje u_{ij} po eksplicitnoj šemi, uzimajući prostorni korak (dužinski korak) $h = 1/4$ i vremenski korak $\tau = 1/16$. Izračunajte približne vrijednosti za prva dva vremenska presjeka $j = 1$ i $j = 2$ (tj. za $t = \tau$ i $t = 2\tau$).

Uputstvo. Imamo da je $Mh = 1$, tako da je $M = 4$. Stavlja se $x_i = ih$ za $0 \le i \le M$. Stavlja se $t_j = j\tau$ za $j \ge 0$. Brojevi u_{ij} predstavljaju aproksimacije vrijednosti analitičkog rješenja (tačnog rješenja) $u(x_i, t_j)$.

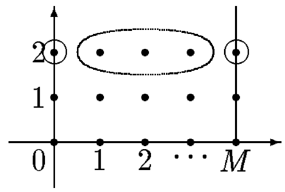
Veličine u_{ij} $(0 \le i \le M)$ računaju se na osnovu poznatih $u_{i,j-1}$ $(0 \le i \le M)$. Budući da je riječ o eksplicitnoj šemi, važi formula $(u_{ij} - u_{i,j-1})/\tau = (u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1})/h^2$ $(0 < i < M)$, s tim da je $u_{0j} = u_{Mj} = 0$. Ako je $j = 0$ onda su brojevi u_{ij} $(0 \le i \le M)$ dati početnim uslovom $u(x,0) = \alpha(x)$. Konkretno, $u_{i0} = \alpha(x_i)$ $(0 < i < M)$, s tim da je $u_{00} = u_{M0} = 0$. Zapaziti da je $\alpha(0) = \alpha(1) = 0$.



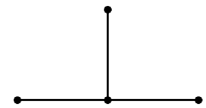
Na početku



Presjek $j = 1$



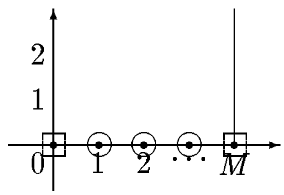
Presjek $j = 2$



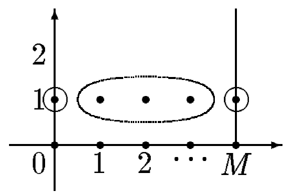
Šablon eksplicitne

(34) Želimo da odredimo njegovo približno rješenje u_{ij} po simetričnoj šemi.

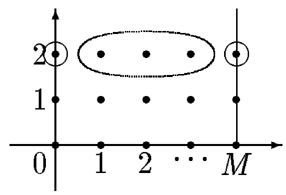
`Uputstvo.` Budući da je sada riječ o simetričnoj šemi, to formula glasi $(u_{ij} - u_{i,j-1})/\tau = \left((u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1})/h^2 + (u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j})/h^2\right)/2$ $(0 < i < M)$, s tim da je $u_{0j} = u_{Mj} = 0$.



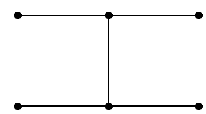
Na početku



Presjek $j = 1$



Presjek $j = 2$



Šablon simetrične

$\bowtie$ Zadatak o najboljoj aproksimaciji date funkcije

(35) a) Naći najbolju aproksimaciju oblika $y = ax + b$ za podatke

x	0	1	2
y	1	2	4

.

`Rezultat:` $y = (3/2)x + 5/6$.

`Uputstvo:` $(\sum_{i=1}^n x_i^2)a + (\sum_{i=1}^n x_i)b = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, $(\sum_{i=1}^n x_i)a + nb = \sum_{i=1}^n y_i$, kada ulazni podaci imaju oblik

x	x_1	$\ldots$	x_n
y	y_1	$\ldots$	y_n

, linearni trend.

b) $(x_1, y_1) = (0, 1)$, $(x_2, y_2) = (1, 2)$, $(x_3, y_3) = (2, 5)$. `Rezultat:` $y = 2x + 2/3$.
c) $(x_1, y_1) = (0, 1)$, $(x_2, y_2) = (1, 2)$, $(x_3, y_3) = (2, 2)$.
d) $(x_1, y_1) = (0, 10)$, $(x_2, y_2) = (1, 20)$, $(x_3, y_3) = (2, 32)$.
e) $(x_1, y_1) = (1, 1)$, $(x_2, y_2) = (2, 2)$, $(x_3, y_3) = (3, 4)$.
f) $(x_1, y_1) = (0, 1)$, $(x_2, y_2) = (1, 2)$, $(x_3, y_3) = (3, 3)$.
g) $(x_1, y_1) = (-1, 1)$, $(x_2, y_2) = (0, 2)$, $(x_3, y_3) = (1, 3)$, $(x_4, y_4) = (2, 5)$.
h) $(x_1, y_1) = (-1, 1)$, $(x_2, y_2) = (0, 2)$, $(x_3, y_3) = (1, 4)$, $(x_4, y_4) = (2, 5)$.

(36) Naći najbolju aproksimaciju oblika $y = ae^{bx}$ za podatke

x	0	1	2
y	1	2	5

.

`Uputstvo.` Postavljeni problem redukuje se na linearni model kada $\ln y$ preuzme ulogu zavisno promjenljive.

(37) a) Razmotrimo neprekidno polje $z = z(x, y)$. Mjerenjem su dobijeni podaci

x	100	200	300
y	200	100	300
z	10	11	15

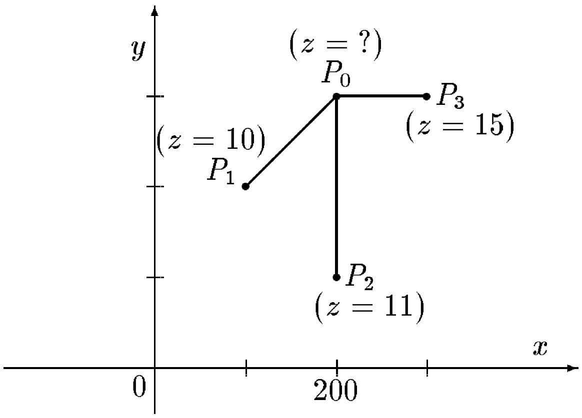
. Odredite $\hat{z}_0$, tj. odredite aproksimaciju za $z_0 = z(x_0, y_0)$, gdje je $(x_0, y_0) = (200, 300)$. Primijenite metodu inverznih distanci. Ako se u računu pojavljuju decimale, dovoljno je da se radi sa malim brojem decimala, sa malim brojem sigurnih cifara.

`Rezultat:` $\hat{z}_0 = 12{,}49$.

`Uputstvo.` Tačke $P_i(x_i, y_i)$, rastojanje dvije tačke $d_i = d(P_i, P_0) = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}$, koeficijenti $c_i = (1/d_i)/(1/d_1 + \ldots + 1/d_n)$, aproksimacija $\hat{z}_0 = \sum_{i=1}^n c_i z_i$, kada ulazni podaci imaja oblik

x	x_1	$\dots$	x_n
y	y_1	$\dots$	y_n
z	z_1	$\dots$	z_n

, metoda inverznih distanci. Zapaziti da ulaznim podacima pripada i (x_0, y_0).



Tačke $P_0, \dots, P_3$ i distance $d_1, \dots, d_3$.
Dobićemo $z(x_0, y_0) \approx 12{,}49$ kao rezultat.

b) $(x_1, y_1, z_1) = (100, 200, 10)$, $(x_2, y_2, z_2) = (200, 100, 11)$, $(x_3, y_3, z_3) = (300, 300, 15)$, $(x_0, y_0) = (200, 200)$. `Rezultat`: $\hat{z}_0 = 11{,}67$.

c) $(x_1, y_1, z_1) = (100, 200, 10)$, $(x_2, y_2, z_2) = (200, 100, 11)$, $(x_3, y_3, z_3) = (300, 300, 15)$, $(x_0, y_0) = (100, 100)$.

d) $(x_1, y_1, z_1) = (100, 200, 10)$, $(x_2, y_2, z_2) = (200, 100, 11)$, $(x_3, y_3, z_3) = (300, 300, 15)$, $(x_0, y_0) = (100, 300)$.

e) $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 10)$, $(x_2, y_2, z_2) = (20, 0, 20)$, $(x_0, y_0) = (5, 0)$.

f) $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 10)$, $(x_2, y_2, z_2) = (20, 0, 20)$, $(x_0, y_0) = (10, 0)$.

g) $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 10)$, $(x_2, y_2, z_2) = (20, 0, 12)$, $(x_3, y_3, z_3) = (0, 20, 20)$, $(x_4, y_4, z_4) = (20, 20, 26)$, $(x_0, y_0) = (10, 10)$.

h) $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 10)$, $(x_2, y_2, z_2) = (20, 0, 12)$, $(x_3, y_3, z_3) = (0, 20, 20)$, $(x_4, y_4, z_4) = (20, 20, 26)$, $(x_0, y_0) = (10, 0)$.

38 Razmotrimo neprekidno polje $z = z(x, y)$. Mjerenjem su dobijeni podaci

x	100	200	300
y	200	100	300
z	10	11	15

. Odredite $\hat{z}_0$, tj. odredite aproksimaciju za $z_0 = z(x_0, y_0)$, gdje je $(x_0, y_0) = (200, 300)$. Primijenite metodu kvadratnih inverznih distanci. Ako se u računu pojavljuju decimale, dovoljno je da se radi sa malim brojem decimala, sa malim brojem sigurnih cifara.

`Uputstvo`. Tačke $P_i(x_i, y_i)$, rastojanje dvije tačke $d_i = d(P_i, P_0) = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}$, koeficijenti $c_i = (1/d_i^2)/(1/d_1^2 + \ldots + 1/d_n^2)$, aproksimacija $\hat{z}_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i z_i$, kada ulazni podaci imaju oblik

x	x_1	$\dots$	x_n
y	y_1	$\dots$	y_n
z	z_1	$\dots$	z_n

, metoda kvadratnih inverznih distanci. Zapaziti da ulaznim podacima pripada i (x_0, y_0).