Domaći zadatak

Grupa 1

1\. Razmotrimo sistem linearnih jednačina $\begin{array}{l} 10x_1 + 4x_2 - x_3 = 8 \\ 2x_1 - 10x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 12 \end{array}$ $(A\mathbf{x} = \mathbf{b})$. Dokažite da Jacobijev iterativni proces (za njegovo numeričko rješavanje) konvergira. Napišite formulu po kojoj se računaju uzastopne aproksimacije. Nakon što proizvoljno izaberete početnu aproksimaciju $\mathbf{x}_0$, izračunajte prve dvije aproksimacije $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$, po formuli od maločas.

2\. Razmotrimo granični zadatak: $(x^2+1)y'' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = 3 + \pi/2 = 4{,}57080$. Metodom konačnih razlika, naći približnu vrijednost njegovog rješenja sa korakom $h = 0{,}25$.

3\. Ritzovom metodom sa trigonometrijskom bazom $\{\sin x, \sin 2x\}$ riješiti granični zadatak $y'' - y + 2 = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$.

4\. Naći najbolju aproksimaciju oblika $y = ax + b$ za podatke

x	-1	0	1	2
y	1	2	3	5

.

Grupa 2

1\. Razmotrimo sistem linearnih jednačina $\begin{array}{l} 10x_1 - x_2 + 4x_3 = 8 \\ 2x_1 - 10x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 12 \end{array}$ $(A\mathbf{x} = \mathbf{b})$. Dokažite da Jacobijev iterativni proces (za njegovo numeričko rješavanje) konvergira. Napišite formulu po kojoj se računaju uzastopne aproksimacije. Nakon što proizvoljno izaberete početnu aproksimaciju $\mathbf{x}_0$, izračunajte prve dvije aproksimacije $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$, po formuli od maločas.

2\. Razmotrimo granični zadatak: $(x^2+1)y'' - 2y = 0$, $y(0) = 2$, $y(1) = 5 + \pi/2 = 6{,}57080$. Metodom konačnih razlika, naći približnu vrijednost njegovog rješenja sa korakom $h = 0{,}25$.

3\. Metodom Galerkina naći približno rješenje jednačine $y'' + y + 1 - x = 0$, $y(0) = y(1) = 0$. Za osnovne funkcije uzeti $u_1(x) = x(1-x)$, $u_2(x) = x^2(1-x)$ i $u_3(x) = x^3(1-x)$. Uputstvo: $y = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + c_3u_3(x)$, $y'' + y + x \perp u_i$, tj. $\langle y'' + y + x, u_i \rangle = 0$. Znamo da se u Lebesgueovom prostoru $L^2(0,1)$ skalarni proizvod definiše kao $\langle y_1, y_2 \rangle = \int_0^1 y_1(x)y_2(x)dx$.

4\. Naći najbolju aproksimaciju oblika $y = ax + b$ za podatke

x	-1	0	1	2
y	1	2	4	5

.

Grupa 3

1\. Razmotrimo matricu $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Želimo da numerički izračunamo njenu dominantnu svojstvenu vrijednost λ_1. U tom cilju, primjenjujemo metodu stepena. Napišite formule po kojima se računaju uzastopne aproksimacije $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$. Izračunajte μ_0, μ_1, μ_2. Proizvoljno se bira polazni vektor $\mathbf{x}_0 \in R^2$.

2\. Razmotrimo granični zadatak: $y'' - y = 2x$, $y(0) = 0$, $y(1) = -1$. Metodom konačnih razlika, naći približnu vrijednost njegovog rješenja sa korakom $h = 0{,}25$.

3\. Ritzovom metodom sa bazom $\{1-x^2, 1-x^4\}$ riješiti granični zadatak $y'' - (1+x^2)y + 1 = 0$, $y(-1) = y(1) = 0$.

4\. Razmotrimo neprekidno polje $z = z(x,y)$. Mjerenjem su dobijeni podaci:

x	0	20	0	20
y	0	0	20	20
z	10	12	20	26

. Odredite $\hat{z}_0$, tj. odredite aproksimaciju za $z_0 = z(x_0, y_0)$, gdje je

$(x_0, y_0) = (10, 10)$. Primijenite metodu inverznih distanci. Ako se u računu pojavljuju decimale, dovoljno je da se radi sa malim brojem decimala, sa malim brojem sigurnih cifara.

Grupa 4

1. Razmotrimo matricu $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Želimo da numerički izračunamo njenu dominantnu svojstvenu vrijednost λ_1. U tom cilju, primjenjujemo metodu stepena. Napišite formule po kojima se računaju uzastopne aproksimacije $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$. Izračunajte μ_0, μ_1, μ_2. Proizvoljno se bira polazni vektor $\mathbf{x}_0 \in R^2$.

2. Razmotrimo granični zadatak: $y'' - y = 3x$, $y(0) = 0$, $y(1) = -2$. Metodom konačnih razlika, naći približnu vrijednost njegovog rješenja sa korakom $h = 0{,}25$.

3. Metodom Galerkina naći približno rješenje graničnog zadatka $y'' + 2y = 2x$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$. Za osnovne funkcije uzeti $u_1 = x^2 + ax$ i $u_2 = x^3 + bx$, gdje konstante a i b treba odrediti.

4. Razmotrimo neprekidno polje $z = z(x, y)$. Mjerenjem su dobijeni podaci:

x	0	20	0	20
y	0	0	20	20
z	10	12	20	26

. Odredite $\hat{z}_0$, tj. odredite aproksimaciju za $z_0 = z(x_0, y_0)$, gdje je $(x_0, y_0) = (10, 0)$. Primijenite metodu inverznih distanci. Ako se u računu pojavljuju decimale, dovoljno je da se radi sa malim brojem decimala, sa malim brojem sigurnih cifara.