PRVI IZVOD

Neka je $y = f(x)$ funkcija definisana na intervalu $[a,b]$, x_0 unutrašnja tačka tog intervala, Δx ($\gtrless 0$) priraštaj argumenta i Δy odgovarajući priraštaj funkcije. Ako postoji granična vrijednost količnika priraštaja funkcije i priraštaja argumenta, kad priraštaj argumenta teži nuli, onda za funkciju $y = f(x)$ kažemo da je **diferencijabilna u tački x_0**. Graničnu vrijednost količnika priraštaja funkcije Δy i priraštaja argumenta Δx, kad $\Delta x \to 0$, zovemo **(prvim) izvodom funkcije u tački x_0** i označavamo sa

$$y'_{x_0} \text{ ili sa } f'(x_0)$$

$$y'_{x_0} \equiv f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Primjer 1. Naći izvod funkcije $f(x) = \sqrt{x}$

u tačkama a) $x_0 = 3$, b) $x_0 = c$, $c > 0$.

Rješenje: Kako je a)

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sqrt{3 + \Delta x} - \sqrt{3}$$

$$y'(3) = f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{3 + \Delta x} - \sqrt{3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3 + \Delta x - 3}{\Delta x\left(\sqrt{3 + \Delta x} + \sqrt{3}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Na isti način dobijamo da je b):

$$f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}}$$

Ako funkcija ima izvod u svakoj tački nekog intervala, kažemo da je **diferencijabilna na tom intervalu**. U tom slučaju svakoj vrijednosti argumenta x iz tog intervala odgovara vrijednost prvog izvoda $f'(x)$ date funkcije, pa je prvi izvod funkcije $y = f(x)$ na tom intervalu (na kome je diferencijabilna) takođe neka funkcija. Tu funkciju zovemo **izvodnom** ili **marginalnom** funkcijom funkcije $f(x)$ i označavamo sa y' ili $f'(x)$, tj.

$$y' \equiv f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Operaciju nalaženja izvoda date funkcije zovemo **diferenciranje**, a dio matematike čiji je predmet diferenciranje i primjena izvoda - **diferencijalni račun**.

NEPREKIDNOST I DIFERENCIJABILNOST

T: Ako je funkcija diferencijabilna, tada je ona neprekidna

Dokaz:

$$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = y' \cdot 0 = 0$$

Dakle, $\Delta x \to 0 \;\Rightarrow\; \Delta y \to 0$

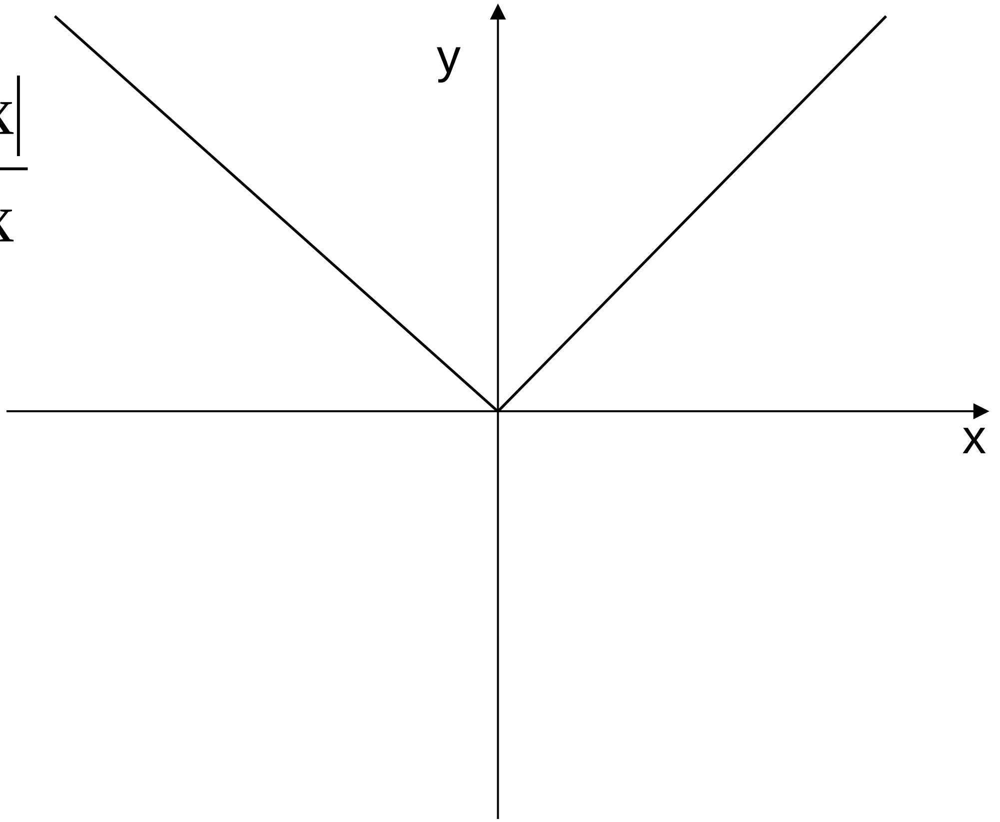
Obrnuto tvrđenje - da iz neprekidnosti slijedi diferencijabilnost - nije tačno.

Primjer. Funkcija $f(x) = |x|$ je neprekidna za svako $x \in R$. Međutim, u tački $x = 0$, data funkcija nema izvod, jer je

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=-1$$

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=1$$



Tablica izvoda

	y	y'
1.	c	0
2.	x^n	nx^{n-1}
3.	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
4.	$\log_a x$	$\dfrac{1}{x\ln a}$
5.	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
6.	a^x	$a^x \ln a$
7.	e^x	e^x

Tablica izvoda

	y	y'
8.	$\sin x$	$\cos x$
9.	$\cos x$	$-\sin x$
10.	tgx	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
11.	ctgx	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
12.	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13.	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14.	$arctgx$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
15.	$arcctgx$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$

IZVOD ZBIRA, PROIZVODA I KOLIČNIKA

$$\left[f(x) \pm g(x)\right]' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\left[f(x) \cdot g(x)\right]' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

Primjer. Naći izvode

$$a)\, y = xe^x, \quad y' = (x)' e^x + x\left(e^x\right)' = e^x + xe^x$$

$$b)\; y = e^x \ln x, \quad y' = \left(e^x\right)' \ln x + e^x \left(\ln x\right)' = e^x \ln x + \frac{e^x}{x}$$

$$c)\; y = \frac{x^2}{x^2-1}, \quad y' = \frac{\left(x^2\right)'\left(x^2-1\right) - x^2\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2} =$$

$$\frac{2x\cdot\left(x^2-1\right) - x^2\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2} = -\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

IZVOD SLOŽENE FUNKCIJE

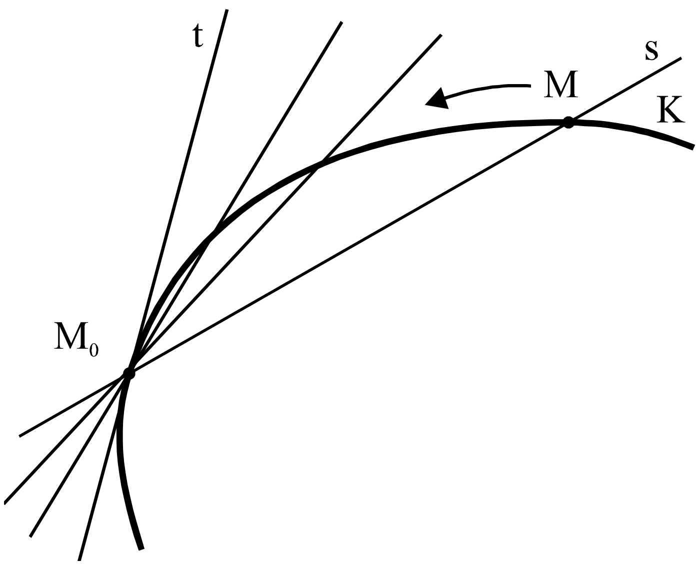
$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

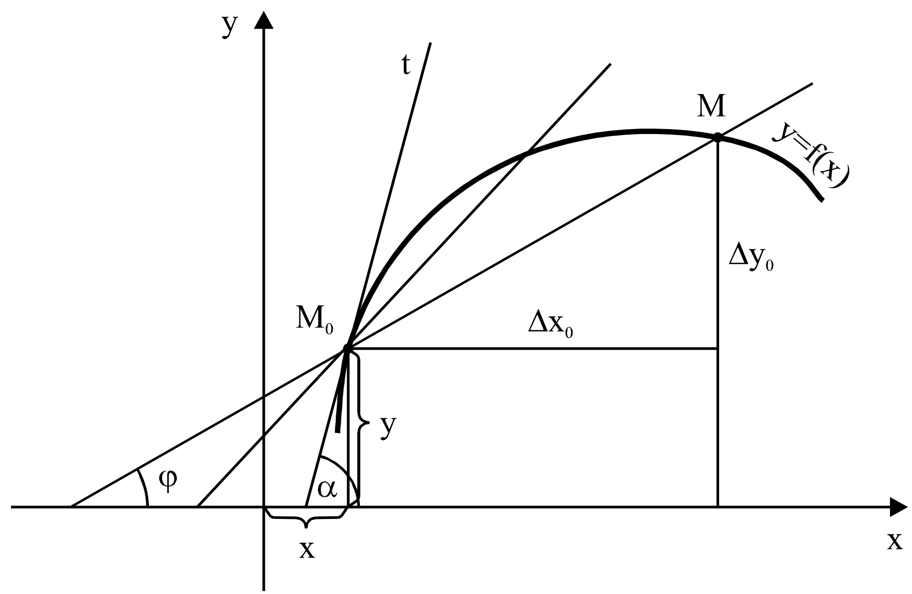
Primjer. Naći izvod funkcije y = ln(sinx).
y je složena funkcija (kompozicija) funkcija f(x) = lnx i u(x) = sinx, tj. y = lnu, u = sinx. Otuda je

$$y'_x = \frac{1}{u} u'_x = \frac{1}{\sin x} \sin' x = \frac{\cos x}{\sin x} = ctg\, x$$

GEOMETRIJSKO TUMAČENJE IZVODA

Prvi izvod funkcije y = f(x) u tački x_0 geometrijski predstavlja koeficijent pravca tangente grafika u tački $M_0(x_0,y_0)$.





Ako je k_t koeficijent pravca tangente i k_s koeficijent pravca sječice M_0M, onda je, prema definiciji tangente,

$$k_t = \lim_{M \to M_0} k_s$$

$$k_s = \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}, \text{ a } M \to M_0 \Leftrightarrow \Delta x_0 \to 0$$

$$k_t = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

Određivanje koeficijenta pravca tangente se, dakle, svodi na određivanje gornje granične vrijednosti

PRIMJER 1. Naći koeficijent pravca tangente grafika funkcije $y = x^2 + 3x + 2$ u tački čija je apscisa $x_0 = 1$.

RJEŠENJE: Kako je koeficijent $k(x)$ pravca tangente jednak prvom izvodu, to je

$k(x) = y' = 2x + 3$

i, za $x = 1$, $k(1) = 5$.

DIFERENCIJAL FUNKCIJE

Neka je $y = f(x)$ funkcija diferencijabilna na intervalu (a,b) i neka je na tom intervalu njen izvod neprekidna funkcija.

Proizvod prvog izvoda y_x' i priraštaja argumenta Δx u tački $x \in (a,b)$ zovemo **diferencijalom** funkcije $y = f(x)$ u tački x i označavamo sa dy ili df(x), tj.

$$dy = df(x) = y_x' \cdot \Delta x$$

Specijalno, diferencijal funkcije $y = x$ je

$dy = dx = 1 \cdot \Delta x$ ili $\Delta x = dx$,

pa iz $dy = y' \cdot \Delta x$, dobijamo

$$dy = y'\,dx \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$

IZVODI VIŠEG REDA

Pretpostavimo da funkcija $y = f(x)$ ima izvod na intervalu (a,b) i označimo taj izvod sa $g(x)$, tj.

$f'(x) = g(x)$.

Ako funkcija $g(x)$ ima izvod $g'(x)$ u svakoj tački intervala (a,b) onda se taj izvod zove **drugi izvod** funkcije $f(x)$ na intervalu (a,b). Za drugi izvod funkcije $y = f(x)$ koristimo neku od sledećih oznaka:

$$y_x^{(2)},\ y''_x,\ \frac{d^2y}{dx^2},\ f''(x)$$

Analogno se definišu i označavaju **izvodi n-tog reda** funkcije $y = f(x)$, $n > 3$:

$$y_x^{(n)},\ \frac{d^ny}{dx^n},\ f^{(n)}(x)$$

ELASTIČNOST FUNKCIJE

Neka je y = f(x) data funkcija - pravilo po kome veličina y zavisi od veličine x. Ta zavisnost veličine y od veličine x postaje “očiglednija” ako znamo koliku procentualnu promjenu veličine y izaziva promjena veličine x za, na primjer, 1%. U cilju procjene takve zavisnosti uvodimo pojam elastičnosti funkcije u tački.

Prethodno ćemo definisati **relativni priraštaj argumenta** i **relativni priraštaj funkcije** u tački x kao količnike priraštaja argumenta i samog argumenta, odnosno priraštaja funkcije i same funkcije, tj.:

$$\frac{\Delta x}{x} \quad \text{i} \quad \frac{\Delta \mathrm{f}(\mathrm{x})}{\mathrm{f}(\mathrm{x})} \equiv \frac{\Delta \mathrm{y}}{\mathrm{y}}$$

Elastičnošću diferencijabilne funkcije y = f(x) u tački x zovemo izraz

$$E_y(x) = \frac{x}{y} \cdot y' = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Ako uzmemo da je $y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$ dobija se

$$E_y(x) \approx \frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta y}{y} \Rightarrow \frac{\Delta y}{y} \approx E_y(x) \cdot \frac{\Delta x}{x}$$

Ako pretpostavimo da je $\frac{\Delta x}{x} = 1\%$ dobija se

$$\frac{\Delta y}{y} \approx E_y(x)\%$$

Tumačenje

Elastičnost funkcije u nekoj tački kazuje koliki je približno releativni priraštaj funkcije u procentima ako relativni priraštaj argumenta iznosi 1%. Drugim riječima: ako se argument x sa vrijednosti x_0 poveća na $x_0 + 1\%x_0$, onda se funkcija y(x) sa vrijednosti $y(x_0)$ promijeni (poveća ili smanji) približno za $Ey(x_0)\%y_0$ tj. na $y_0 + Ey(x_0)\%y_0$.

Apsolutnu vrijednost elastičnosti zovemo **koeficijentom elastičnosti** i označavamo sa η: $\eta(x) = |\, Ey(x)\, |$.
Ako je $\eta(x) > 1$ kažemo da je u tački x funkcija **elastična**,
ako je $\eta(x) < 1$ - **neelastična**.

TEOREME O SREDNJOJ VRIJEDNOSTI

Rolova teorema: Ako je $y = f(x)$ funkcija neprekidna na intervalu $[a,b]$ i diferencijabilna na intervalu (a,b) i ako je $f(a) = f(b) = 0$, onda postoji bar jedna tačka $c \in (a,b)$ takva da je $f'(c) = 0$.

Dokaz: (nije obavezan!)
f diferencijabilna $\Rightarrow$ f neprekidna $\Rightarrow$ postojanje najmanje i najveće vrijednosti m i M funkcije $f(x)$ na intervalu $[a,b]$.
Ako je $m = M$ funkcija je konstantna: $f(x) = k$, $x \in (a,b)$ pa je za svako $x \in (a,b)$, $f'(x) = 0$, tj. za tačku c možemo uzeti proizvoljnu tačku iz (a,b).

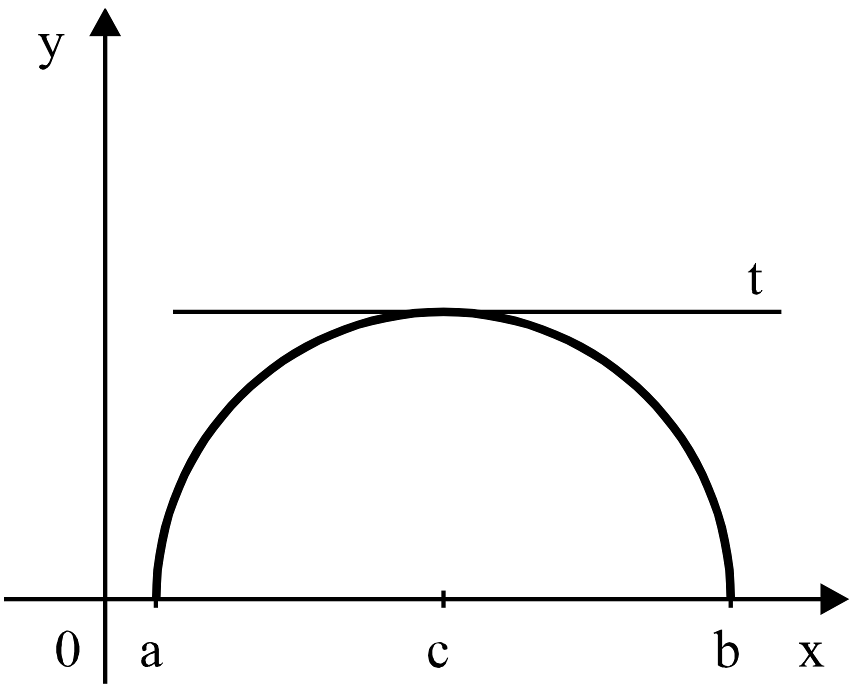
Neka je $m \neq M$. Tada je $M \neq 0$ ili $m \neq 0$. Neka je $M \neq 0$. Označimo sa c onu vrijednost argumenta x za koju je $f(x) = M$. Kako je $f(a) = f(b) = 0$ i $M \neq 0$, to je $c \neq a$ i $c \neq b$, dakle $c \in (a,b)$. U tački $x = c$ funkcija ima najveću vrijednost na intervalu $[a,b]$, pa je, za $c + \Delta x \in (a,b)$, $f(c+\Delta x) \leq f(c)$, i, ako je $\Delta x > 0$:

$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$$

Prema pretpostavci, postoji granična vrijednost izraza na lijevoj stani kad $\Delta x \to 0$ i ta granična vrijednost je $f'(c)$. Iz osobina granične vrijednosti slijedi da je $f'(c) \leq 0$ (1). Za $\Delta x < 0$ isti količnik nije negativan pa nije negativna ni njegova granična vrijednost, tj. $f'(c) \geq 0$ (2)

Iz (1) i (2) slijedi tvrđenje, tj. postojanje tačke c u kojoj je $f'(c) = 0$.

Geometrijsko tumačenje Rolove teoreme je sledeće:
U bar nekoj tački grafika funkcije $y = f(x)$ koja se anulira u tačkama a i b i koja je neprekidna na intervalu $[a,b]$ i diferencijabilna na intervalu (a,b) tangenta je paralelna x-osi.



NAPOMENA: Rolova teorema važi i ako se u pretpostavci uslov $f(a) = f(b) = 0$ zamijeni uslovom $f(a) = f(b)$.

Lagranžova teorema: **Ako je y = f(x) funkcija neprekidna na intervalu [a,b] i diferencijabilna na intervalu (a,b), onda postoji tačka c $\in$ (a,b):**

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

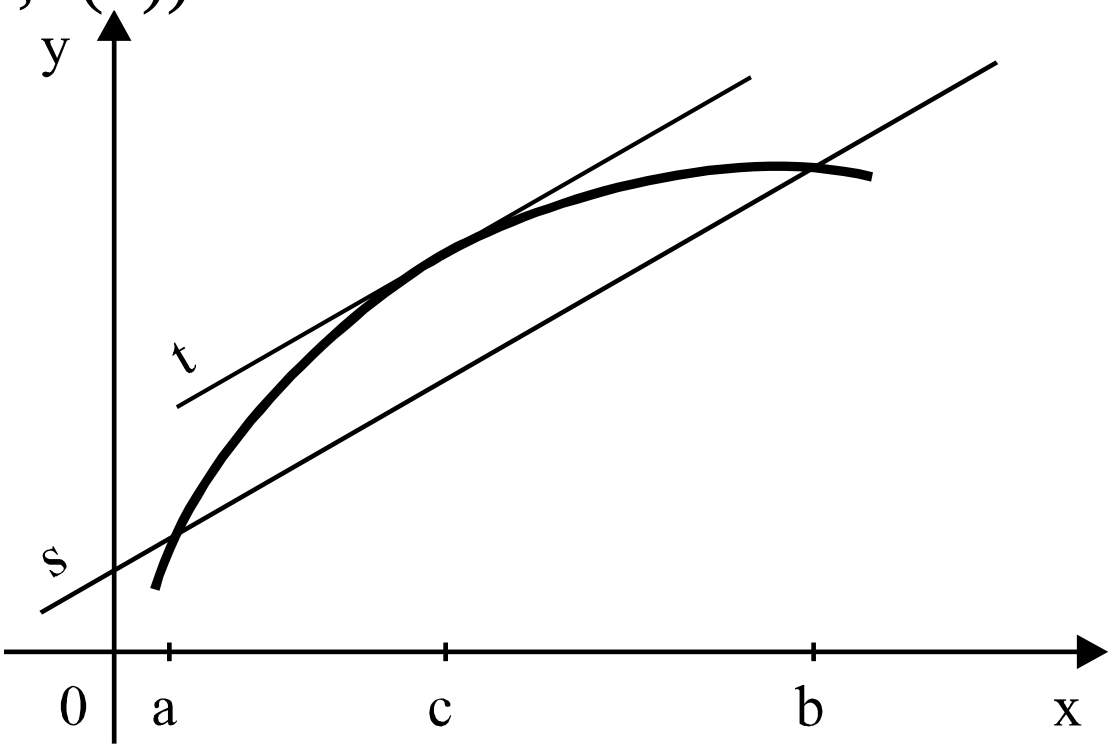
Dokaz: (nije obavezan!) Označimo sa g(x) sledeću funkciju:

$g(x) = [f(x) - f(a)](b - a) - [f(b) - f(a)](x - a)$.

Funkcija g(x) je diferencijabilna na intervalu (a,b) (kao zbir proizvoda diferencijabilnih funkcija) i još je g(a) = g(b) = 0, što znači da ispunjava uslove Rolove teoreme. Postoji, dakle, tačka c $\in$ (a,b) takva da je

$$g'(c) = f'(c)(b - a) - [f(b) - f(a)] = 0, \text{ tj. } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Geometrijski: U bar jednoj tački c $\in$ (a,b) tangenta grafika funkcije neprekidne na intervalu [a,b] i diferencijabilne na intervalu (a,b) paralelna je sječici određenoj tačkama (a, f(a)) i (b, f(b))



Košijeva teorema: Ako su f(x) i g(x) funkcije neprekidne na intervalu [a,b] i diferencijabilne na intervalu (a,b) i ako je $g'(x) \neq 0$, onda postoji tačka $c \in (a,b)$ takva da je

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Primjer.

Primjenom Lagranžove teoreme, lako se dokazuje da ako je prvi izvod f-je jednak 0, tada je ta funkcija konstantna! (lijeva strana relacije na slajdu 20 je 0, pa je f(x)=f(a)- const, za svako x sa intervala (a,b)).

Tajlorova formula (bez dokaza):

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

gdje je c neki broj iz intervala (a,x). Izraz

$$G = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$ zove se **ostatak**.

Primjer. Primjenjujući Tajlorovu formulu na funkciju $f(x) = e^x$, za a = 0 i n = 7, imaćemo

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^7}{7!} + \frac{e^c}{8!}x^8$$

Za x = 1, odbacujući poslednji sabirak, dobijamo da je

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} = 2{,}718154...$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + G$$

Maclaurinov red- prikazuje razvoj funkcije *f(x)* oko nule (a=0)

Lopitalovo pravilo (bez dokaza**)**: Neka su f(x) i g(x) diferencijabilne funkcije čija je granična vrijednost, kad $x \to a$, nula i neka količnik njihovih izvoda ima granicu A kad $x \to a$. Tada je

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Napomena. Pravilo se primjenjuje i na oblik ∞/∞. Ostali neodređeni izrazi se svode na 0/0 ili ∞/∞.

Primjer . Primjenjujući Lopitalovo pravilo (oblik $0(-\infty)$ sveli smo na $-\infty/\infty$!) dobijamo da je

$$\lim_{x \to 0} x \ln x = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

Monotonost funkcije

Već smo vidjeli da rastuća f-ja (iz $\Delta x>0$ slijedi $\Delta y>0$) ima prvi izvod pozitivan ili jednak nuli (tj. koefic. pravca tangente je pozitivan ili 0 - vidjeti grafik na slajdu 9). Analogno, za opadajuću f-ju (kod nje iz $\Delta x>0$ slijedi $\Delta y<0$) izvod je negativan ili 0. Kod crtanja grafika f-ja trebaće nam obrat tog tvrđenja. Pokazuje se da se ispitivanje monotonosti diferencijabilne funkcije svodi se na ispitivanje znaka prvog izvoda (formalan dokaz se izvodi korišćenjem Lagranžove teoreme i pretpostavke monotonosti):

Na intervalu na kome je prvi izvod pozitivan funkcija raste; na intervalu na kome je prvi izvod negativan funkcija opada

Primjer. y=lnx je stalno rastuća, jer je u domenu prvi izvod (1/x) stalno pozitivan.

ODREĐIVANJE INTERVALA MONOTONOSTI

Za funkciju $y = f(x)$ kažemo da **raste**, oznaka $y\uparrow$, na intervalu $(a,b)\subset D$ ako je za svako $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in (a,b)$ ispunjena nejednakost

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Ako je, uz iste pretpostavke

$$f(x_1) \leq f(x_2),$$

kažemo da, na intervalu $(a,b) \subset D$, funkcija $f(x)$ **ne opada**.

Analgono se definišu **opadanje** ($y\downarrow$) i **nerašćenje** funkcije na nekom intervalu.

Intervale rašćenja i intervale opadanja zovemo **intervalima monotonsosti** funkcije.

Određivanje intervala monotonosti zovemo još i ispitivanje **toka** funkcije.

Neka je $y = f(x)$ funkcija diferencijabilna na intervalu [a,b] i neka na tom intervalu raste. Tada uz uslove,

$$x_0 \in (a,b),\ \Delta x_0 > 0 \text{ i } x_0+\Delta x_0 \in (a,b)$$

važi jednakost

$$f(x_0 + \Delta x_0) > f(x_0),$$

odnosno

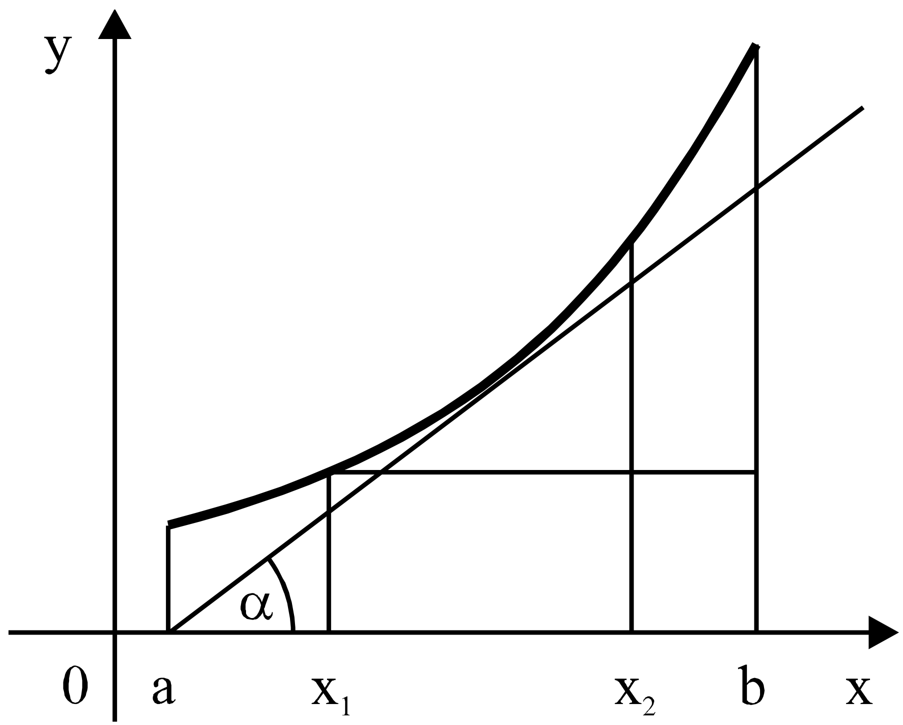
$$\Delta y_0 = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0) > 0.$$

No, tada je i količnik $\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$ pozitivan, a njegova granična vrijednost kad $\Delta x_0 \to 0$ nenegativna, tj.

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = f'(x_0) \geq 0 .$$

Iz pretpostavke da diferencijabilna funkcija raste, slijedi nenegativnost izvoda.

Geometrijski: Tangenta grafika diferencijabilne funkcije koja raste na intervalu [a,b] je ili paralelna x-osi ili sa njom gradi oštar ugao (slika 1).



Slika 1.

Pretpostavimo, sada, da je na intervalu [a,b] funkcija f(x) diferencijabilna i da je $f'(x) > 0$, $x \in [a,b]$. Ako su x_1 i x_2, $x_1 < x_2$ proizvoljne tačke intervala [a,b], onda, prema Lagranžovoj teoremi, postoji tačka $c \in (x_1,x_2)$ takva da je

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Kako je, po pretpostavci, $f'(c) > 0$ i $x_2 > x_1$, to je

$$f(x_2) > f(x_1)$$

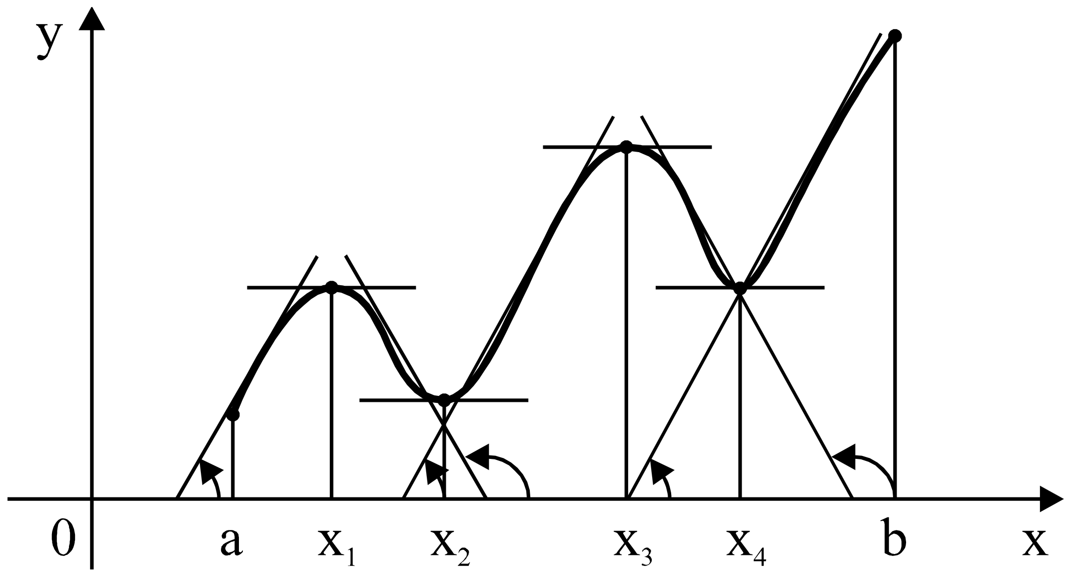
za svako x_1, x_2 iz intervala [a,b], što znači da na intervalu [a,b] funkcija raste.

Geometrijski: Ako tangenta grafika funkcije $y = f(x)$ u proizvoljnoj tački $x \in [a,b]$ gradi sa x-osom oštar ugao, onda na intervalu [a,b] funkcija raste (slika 1).

Na intervalu na kome je prvi izvod pozitivan funkcija raste;

na intervalu na kome je prvi izvod negativan - funkcija opada.

Važnu ulogu u ispitivanju funkcije imaju one tačke iz intervala definisanosti u kojima funkcija prelazi iz rašćenja u opadanje ili iz opadanja u rašćenje. Na slici 2. su to tačke x_1 i x_3 odnosno x_2 i x_4.



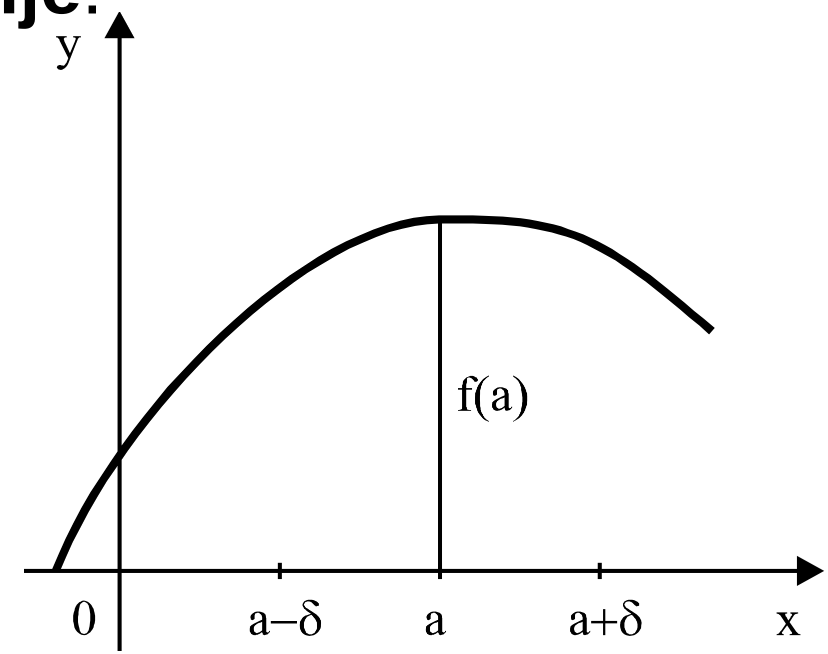
Slika 2.

Kažemo da u tački $x = a \in D_f$ funkcija f(x) ima **maksimum** ako postoji neka okolina tačke a u kojoj je f(a) najveća vrijednost. Tako, funkcija čiji je grafik dat na sl. 2 za $x = x_3$ ima maksimum jer je na intervalu (x_2, x_4) koji sadrži tačku x_3, $f(x_3)$ najveća vrijednost. Vrijednost f(a) se zove **maksimum funkcije**.

Simbolički: funkcija y = f(x) za x = a ima maksimum f(a), ako postoji neka okolina tačke a takva da je

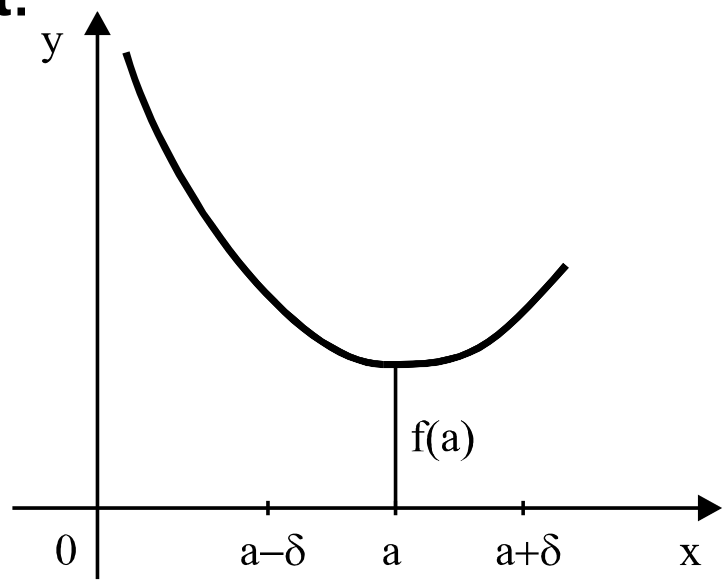
$$f(a) > f(x)$$

za svako $x \neq a$ iz te okoline (sl. 3.).



Slika 3.

Analogno se definiše i **minimum** funkcije sl. 4. Minimum i maksimum zovemo **ekstremnim vrijednostima**.



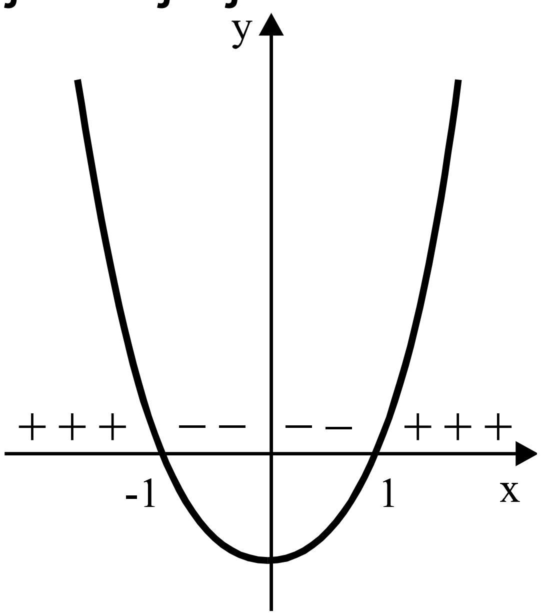
Slika 4.

Teorema (potreban uslov): Ako u tački x = a diferencijabilna funkcija ima ekstremnu vrijednost, onda je u toj tački prvi izvod jednak nuli.

Teorema (dovoljan uslov): Ako je u stacionarnoj tački x=a drugi izvod različit od 0, onda u toj tački f-ja ima ekstremnu vrijednost, i to: ako je drugi izvod u stacionarnoj tački pozitivan- minimum, u suprotnom (drugi izvod negativan)- maksimum

POTREBAN I DOVOLJAN USLOV:
Diferencijabilna funkcija u tački x = a ima ekstremnu vrijednost ako i samo ako je x = a nula prvog izvoda i ako, prolazeći kroz tu tačku, prvi izvod mijenja znak. Pritom, ako prvi izvod mijenja znak sa + na - funkcija ima maksimum, ako mijenja sa - na + ima minimum.
Nule prvog izvoda zovu se **stacionarne** ili **kritične** tačke.

Primjer. Odrediti ekstremne vrijednosti funkcije $y = x^3 - 3x + 1$.
Rešenje: Nule prvog izvoda (stacionarne-kritične tačke) su rješenja jednačine $3x^2 - 3 = 0$, tj. $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$.



Prolazeći kroz tačku $x = -1$ prvi izvod mijenja znak (i to sa $+$ na $-$ pa u toj tački data funkcija ima maksimum:

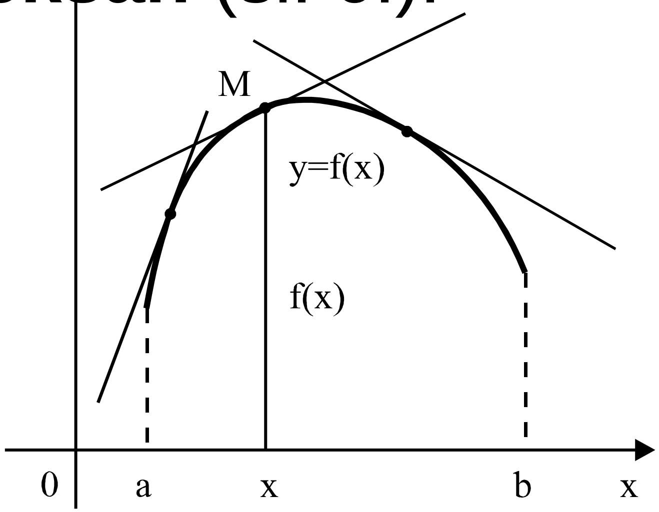
$$y_{max} = y(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3.$$

Prolazeći kroz tačku $x = 1$ prvi izvod mijenja znak i to sa $-$ na $+$, pa u ovoj tački data funkcija ima minimum:

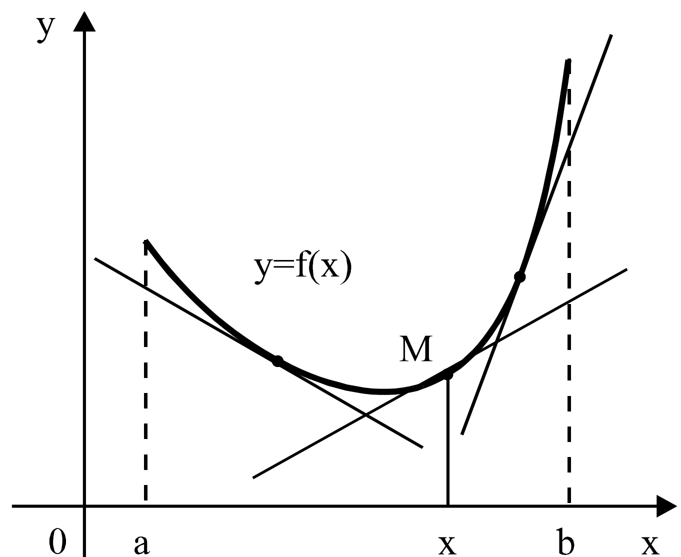
$$y_{min} = y(1) = -1.$$

KONVEKSNOST I KONKAVNOST. PREVOJNE TAČKE

Ako su ordinate proizvoljne tačke grafika funkcije $y = f(x)$ čije apscise pripadaju intervalu (a,b) manje ili jednake od odgovarajućih ordinata tangente t, onda kažemo da je na intervalu (a,b) grafik funkcije $y = f(x)$ **konkavan** (sl. 5.). Ako su, uz iste pretpostavke, ordinate tangente manje ili jednake od odgovarajućih ordinata grafika funkcije, kažemo da je na intervalu (a,b) grafik funkcije **konveksan** (sl. 6.).



Slika 5.



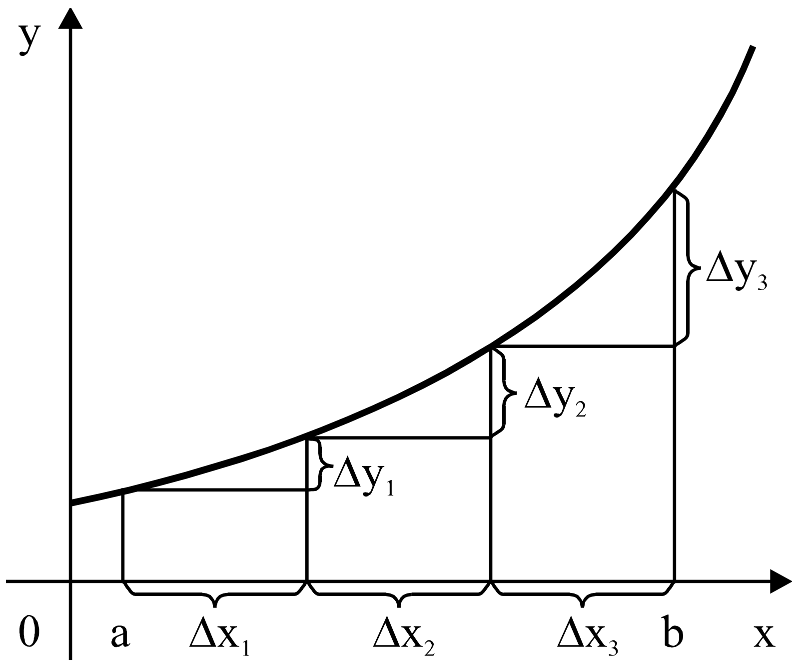
Slika 6.

Ako je grafik funkcije konkavan y = f(x), drugi izvod je nepozitivan; ako je drugi izvod negativan, grafik je konkavan .

Na intervalu konveksnosti drugi izvod funkcije y = f(x) je nenegativan; na intervalu na kome je drugi izvod pozitivan, grafik funkcije je konveksan.

Tačka P(a,f(a)) je prevojna tačka (tj. tačka koja razdvaja konveksan od konkavnog dijela) grafika f-je y akko je drugi izvod u toj tački jednak 0, i prolazeći kroz tu tačku drugi izvod mijenja znak.

Brzina rasta neprekidne funkcije: F-ja y = f(x) koja raste na intervalu (a,b) kažemo da, na tom intrvalu, **raste sve brže** ili da **raste progresivno**, ako jednakim priraštajima argumenta odgovaraju sve veći priraštaji funkcije.



Iz definicije slijedi da, za funkciju koja raste sve brže:

$0 < \Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \ldots$

$\Rightarrow \Delta y_1 < \Delta y_2 < \Delta y_3 < \ldots$

Na intervalu (a,b) funkcija y = f(x) koja ima drugi izvod raste sve brže ako i samo ako je

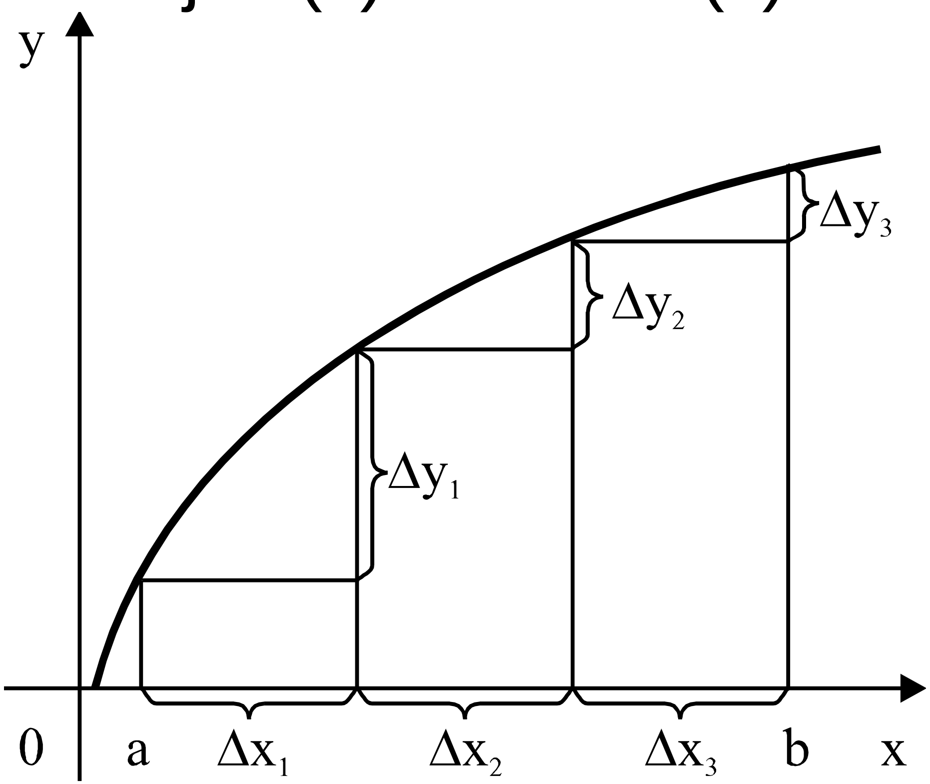
$f'(x) > 0 \quad i \quad f''(x) > 0,$

za svako $x \in (a,b)$.

Za funkciju y = f(x) koja raste na intervalu (a,b) kažemo da, na tom intervalu, **raste sve sporije (degresivno)** ako jednakim priraštajima argumenta odgovaraju sve manji priraštaji funkcije, tj.:

$0 < \Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \ldots \Rightarrow \Delta y_1 > \Delta y_2 > \Delta y_3 > \ldots$

na intervalu (a,b), funkcija y = f(x) raste sve sporije ako i samo ako je $f'(x) > 0$ i $f''(x) < 0$.



KARAKTERISTIKE FUNKCIJE. GRAFIK

Ispitati funkciju znači odrediti:

1. Oblast definisanosti D_f
2. Parnost, neparnost, periodičnost
3. Nule funkcije
4. Neprekidnost, ponašanje u prekidnim tačkama, vertikalne asimptote
5. Horizontalne i kose asimptote
6. Znak funkcije
7. Tok, ekstremne vrijednosti
8. Konveksnost, konkavnost, prevojne tačke
9. Grafik.