U dokazu teoreme jedinstvenosti za karakteristične funkcije koristimo Stonovu teoremu.

TEOREMA 1 (STONE) *Neka je $f(x)$ neprekidna funkcija na $[-l, l]$ i $f(-l) = f(l)$. Za $\forall \varepsilon > 0$ postoji trigonometrijski polinom*

$$T_n(x) = \sum_{v=-n}^{n} a_v e^{i\pi v \frac{x}{l}}$$

takav da je $\sup\limits_{[-l,l]} |T_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

TEOREMA 2 (TEOREMA JEDINSTVENOSTI) *Neka su F i G funkcije raspodjele koje imaju istu karakterističnu funkciju na $\mathbb{R}$ tj. za svako $t \in \mathbb{R}$ važi*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dG(x). \tag{1}$$

Tada je $F = G$.

Fiksirajmo $a, b \in \mathbb{R}\,(a < b), \varepsilon > 0$ i formirajmo funkciju $f^{(\varepsilon)}$ za koju važi:

$$f^{(\varepsilon)}(x) = \begin{cases} 0, & x < a - \varepsilon,\, x \geqslant b, \\ \frac{x-a+\varepsilon}{\varepsilon}, & a - \varepsilon \leqslant x < a, \\ 1, & a \leqslant x < b - \varepsilon, \\ \frac{b-x}{\varepsilon}, & b - \varepsilon \leqslant x < b. \end{cases}$$

Dokažimo da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(\varepsilon)}(x) dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(\varepsilon)}(x) dG(x). \tag{2}$$

Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $[a - \varepsilon, b] \subset [-n, n]$ i neka je $(\delta_n,\, n \in \mathbb{N})$ takav niz da je $\delta_n \geqslant 0$ i $\delta_n \downarrow 0,\, n \to \infty$. Funkcija $f^{(\varepsilon)}$ ispunjava uslove Stonove teoreme te postoji konačna suma

$$f_n^{(\varepsilon)}(x) = \sum_k a_k e^{\frac{i\pi x k}{n}}$$

tako da važi

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \mid f^{(\varepsilon)}(x) - f_n^{(\varepsilon)}(x) \mid \leqslant \delta_n.$$

Funkciju $f_n^{(\varepsilon)}$ periodično produžimo na $\mathbb{R}$. Primijetimo

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \mid f_n^{(\varepsilon)}(x) \mid \leqslant 2.$$

Iz (1) slijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n^{(\varepsilon)}(x) dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n^{(\varepsilon)}(x) dG(x).$$

Imamo

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f^{(\varepsilon)}(x)dF(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f^{(\varepsilon)}(x)dG(x)\right| = \left|\int_{-n}^{n} f^{(\varepsilon)}(x)dF(x) - \int_{-n}^{n} f^{(\varepsilon)}(x)dG(x)\right| \leqslant$$

$$\left|\int_{-n}^{n} f_n^{(\varepsilon)}(x)dF(x) - \int_{-n}^{n} f_n^{(\varepsilon)}(x)dG(x)\right| + 2\delta_n \leqslant$$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f_n^{(\varepsilon)}(x)dF(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f_n^{(\varepsilon)}(x)dG(x)\right| + 2\delta_n + 2F\big([-n,n]^c\big) + 2G\big([-n,n]^c\big), \quad (3)$$

gdje je $F(A) = \int_A dF(x)$ i $G(A) = \int_A dG(x)$. Puštajući da $n \to \infty$ zaključujemo da (3) teži ka 0. Ovim je dokazana jednakost (2).

Primijetimo $f^{(\varepsilon)}(x) \to I_{[a,b)}(x)$ kad $\varepsilon \to 0$. Na osnovu teoreme o dominantnoj konvergenciji iz (2) slijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} I_{[a,b)}(x)dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} I_{[a,b)}(x)dG(x)$$

tj. $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$. Zbog proizvoljnosti a i b zaključujemo da je $F(x) = G(x)$ za svako $x \in \mathbb{R}$.♦

Komentar. Teoremom jedinstvenosti je pokazana injektivnost korespondencije između funkcija raspodjele i karakterističnih funkcija.

Teorema 3 *Neka je $X_n, n = 1, 2, ..$ niz slučajnih promjenljivih promjenljivih i neka je X slučajna promjenljiva. $X_n \xrightarrow{si} X$ ako i samo ako se za $\forall \varepsilon > 0$ sa vjerovatnoćom 1 realizuje najviše konačno mnogo događaja iz niza $A_n^\varepsilon = \{|X_n - X| > \varepsilon\}, n = 1, 2, ...$*

($\Rightarrow$) Koristićemo oznaku $L = \{\omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\}$. Znamo da je L događaj. Neka je $\varepsilon > 0, \omega_0 \in L$. Kako $X_n(\omega_0) \to X(\omega_0)$ to za najviše konačno mnogo indeksa n važi $|X_n(\omega_0) - X(\omega_0)| > \varepsilon$ tj. ω_0 se nalazi u najviše konačno mnogo članova niza A_n^ε. Dakle

$$L \subseteq (\limsup A_n^\varepsilon)^c \Rightarrow P((\limsup A_n^\varepsilon)^c) = 1$$

($\Leftarrow$) Neka je $B_k, k = 1, 2, ...$ događaj da se realizuje najviše konačno mnogo događaja iz niza $A_n^k = \{|X_n - X| > k^{-1}\}, n = 1, 2, ...$ Jasno $B_k \downarrow$. Neka je $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ i neka je $\omega_0 \in B$. Kako $\omega_0 \in B_1$, $\omega_0 \in B_2, ...$ zaključujemo: za najviše konačno mnogo n-ova važi $|X_n(\omega_0) - X(\omega_0)| > 1$, za najviše konačno mnogo n-ova važi $|X_n(\omega_0) - X(\omega_0)| > 2^{-1}$ itd. Iz prethodnog slijedi $X_n(\omega_0) \to X(\omega_0)$ ili drugim riječima $\omega_0 \in L$. Dakle

$$B \subseteq L,\ P(B) = \lim_{k\to\infty} P(B_k) = 1 \Rightarrow P(L) = 1.$$