

Registrujemo kosmičke čestice koje padaju na lokalitet, intenzitet potoka čestica je λ , λ je nepoznato. Slučajna promjenljiva X_1 predstavlja broj čestica koje padnu u toku prvog minuta, X_2 predstavlja broj čestica koje padnu u toku drugog minuta, ..., X_n predstavlja broj čestica koje padnu u toku n -tog minuta. Obilježje X je broj čestica koje padnu u toku jednog minuta i X ima $\mathcal{P}(\lambda)$ raspodjelu. Slučajne promjenljive X_1, \dots, X_n su nezavisne i svaka ima $\mathcal{P}(\lambda)$ raspodjelu. (X_1, \dots, X_n) je prost slučajni uzorak. Prost slučajni uzorak je matematički model n nezavisnih registrovanja (mjerenja) obilježja X . Postupak n nezavisnih registrovanja (mjerenja) obilježja X nazivamo statističkim eksperimentom. Formalno, prost slučajni uzorak je slučajni vektor (X_1, \dots, X_n) gdje su X_1, \dots, X_n nezavisne slučajne promjenljive i svaka je raspodijeljena kao obilježje X . Koristili smo činjenice 1. slučajne promjenljive koje prebrojavaju čestice na disjunktним vremenskim intervalima su nezavisne 2. raspodjela slučajne promjenljive koja prebrojava čestice na vremenskom intervalu dužine t je $\mathcal{P}(\lambda t)$.

Primjer. Obilježje X je rezultat mjerenja fizičke veličine, dok rezultati n mjerenja predstavljaju prost slučajni uzorak (uzorak). Dopustiva familija raspodjela je normalna.

Primjer. Obilježje X je rezultat mjerenja koeficijenta inteligencije osobe, dok rezultati mjerenja koeficijenta inteligencije n osoba predstavljaju prost slučajni uzorak (uzorak). Dopustiva familija raspodjela je normalna.

Obilježje X ima raspodjelu koja pripada dopustivoj familiji raspodjela \Leftrightarrow dopustivoj familiji funkcija raspodjele (zbog relacije između raspodjele vjerovatnoće slučajne promjenljive i funkcije raspodjele).

Neka dopustivu familiju funkcija raspodjele obilježja X čine funkcije $F_\alpha(x)$, $\alpha \in A$. Označimo sa $\mathcal{F}^1 = \{F_\alpha(x), \alpha \in A\}$ tu familiju. Dopustiva familija funkcija raspodjele uzorka $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ je $\mathcal{F}^2 = \{F_\alpha(x_1, \dots, x_n) = F_\alpha(x_1) \dots F_\alpha(x_n), \alpha \in A\}$, koristimo nezavisnost komponenti uzorka.

Familija faznih prostora obilježja X je $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ gdje je \mathcal{P} familija raspodjela koje su pridružene funkcijama iz \mathcal{F}^1 . Familija faznih prostora uzorka \mathbf{X} je $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \mathcal{P}^n)$ gdje je \mathcal{P}^n familija raspodjela koje su pridružene funkcijama iz \mathcal{F}^2 . Familija faznih prostora $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \mathcal{P}^n)$ se naziva statistička struktura.

Primjer. U kutiji se nalazi N listica i na njima su zapisani brojevi x_1, x_2, \dots, x_N . Obilježje je broj na listici.

a) model sa vraćanjem, vadimo n listica.

$$P\{X_i = x_j\} = \frac{1}{N}, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, N, a = EX_i, DX_i = \sigma^2, E\bar{X}_n = a, D\bar{X}_n = \frac{\sigma^2}{n}.$$

b) model bez vraćanja, $n \leq N$.

$$P\{X'_i = x_j\} = \frac{1}{N}, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, N, a = EX'_i, DX'_i = \sigma^2, \rho_{X'_k, X'_l} = -\frac{1}{N-1}, E\bar{X}'_n = a, D\bar{X}'_n = \frac{\sigma^2}{n} \frac{N-n}{N-1}, D\bar{X}'_n < D\bar{X}_n \quad n \geq 2.$$

Primjer. U kutiji se nalazi M bijelih i $N - M$ crnih kuglica. Ocjenjujemo relativnu učestalost bijelih kuglica to jest $\frac{M}{N}$. Ono što ćemo uraditi istovremeno obuhvata slučajeve a) M nepoznato, N poznato i b) M nepoznato i N nepoznato.

1. Model sa vraćanjem, vadimo n kuglica.

$$X_i : \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 - \frac{M}{N} & \frac{M}{N} \end{matrix}, i = 1, 2, \dots, n, \sum_{i=1}^n X_i : \mathcal{B}(n, \frac{M}{N}), E\bar{X}_n = \frac{M}{N}, D\bar{X}_n = \frac{M}{nN}(1 - \frac{M}{N}).$$

U istu shemu se uklapa model u kome ocjenjujemo nepoznatu vjerovatnoću padanja pisma. Novčić bacamo n puta.

$$X_i : \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 - p & p \end{matrix}, i = 1, 2, \dots, n, \sum_{i=1}^n X_i : \mathcal{B}(n, p), E\bar{X}_n = p, D\bar{X}_n = \frac{p(1-p)}{n}.$$

2. Model bez vraćanja, vadimo n kuglica, $n \leq N$.

$$X'_i : \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 - \frac{M}{N} & \frac{M}{N} \end{matrix}, i = 1, 2, \dots, n, \rho_{X'_k, X'_l} = \frac{\frac{n-1}{N-1} - \frac{n}{N}}{1 - \frac{n}{N}}, E\bar{X}'_n = \frac{M}{N}, D\bar{X}'_n = \frac{M}{nN}(1 - \frac{M}{N})\frac{N-n}{N-1}.$$

Primjer Ocjenjujemo nepoznatu učestalost osoba čiji je koeficijent inteligencije između 105 i 115. $P\{105 < X < 115\} = p$, p je nepoznato. Zbog nezavisnosti i jednake raspodijeljenosti promjenljivih X_1, \dots, X_n događaji $A_1 = \{105 < X_1 < 115\}, \dots, A_n = \{105 < X_n < 115\}$ su nezavisni. Formiranjem slučajnih promjenljivih $X_1 = I_{A_1}, \dots, X_n = I_{A_n}$ problem ocjene nepoznatog p (kao i formiranja odgovarajućeg intervala povjerenja) se rješava korišćenjem statistike \bar{X}_n .

Veza modela sa vraćanjem i bez vraćanja Statistika koja prebrojava bijele kuglice u uzorku obima n (model bez vraćanja) ima hipergeometrijsku raspodjelu. Označimo tu statistiku sa W . Razmotrimo granični slučaj u kome $\frac{M}{N} \rightarrow p$. Lako se provjerava

$$P\{W = k\} \rightarrow \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n.$$

Dakle, u graničnom slučaju, statistika W ima $\mathcal{B}(n, p)$ raspodjelu. Budući da statistika $\sum_{i=1}^n X_i$ iz modela 1 ima $\mathcal{B}(n, \frac{M}{N})$ raspodjelu, dobijeni granični rezultat u praksi koristimo na sljedeći način: Ako je broj članova populacije N velik, uzoračke sredine tj. srednji broj izvučenih bijelih kuglica u oba modela imaju istu raspodjelu (preciznije približno istu, ali razlika je zanemarljiva). Ovo zapažanje je značajno kod formiranja intervala povjerenja nepoznate učestalosti. Naime, podatke biramo po modelu bez vraćanja. a kad formiramo interval povjerenja, koristimo rezultat dobijen za model sa vraćanjem. Na primjer, ocjenjujemo učestalost pušača.