



# Elektrotehnika sa elektronikom

## Uvod



## Nastavno osoblje

### ■ Nastavnik

- Prof. dr Milovan Radulović,  
***III sprat kabinet 331***  
***konsultacije 13-14 časova ponedjeljak***

### ■ Asistent

- Luka Lazović MSc

## Nastavni plan

- Predavanja
  - 2 časa sedmično
- Vježbe
  - 2 časa sedmično
  - Auditorne

## Ispit

### **Oblici provjere znanja i ocjenjivanje:**

Ocjenjuju se:

- Dva kolokvijuma po 20 poena (Ukupno 40 poena),
- Pet domaćih zadataka po 1 poen (Ukupno 5 poena).
- Pet testova po 1 poen (Ukupno 5 poena)
- Završni ispit sa 50 poena.
- Prelazna ocjena se dobija ako se kumulativno sakupi najmanje 51 poena
- Ocjena
  - 51-59(E),
  - 60-69(D),
  - 70-79(C),
  - 80-89(B),
  - 90-100(A)

## Literatura

- **Dr Jozo Pralas: Elektrotehnika, Univerzitet Crne Gore, Podgorica, 2000.**
- **Mr T. Stanković, Mr M. Žugić: Zbirka zadataka iz elektrotehnike, Univerzitet Crne Gore, Podgorica,**

Obnavljanje gradiva iz  
**FIZIKE**

## Elektrotehnika

- Oblast tehnike koja se bavi primenom fizičkih pojava povezanih sa naelektrisanjima
- Osnove elektrotehnike: elektrostatika, elektrodinamika, magnetizam, elektromagnetizam, teorija električnih kola
- Energetika: proizvodnja, prenos i upotreba električne energije
- Elektronika: proizvodnja, prenos i upotreba električnih signala

## 1. ELEKTROSTATIKA

Elektrostatika je oblast elektrotehnike u kojoj se izučava elektricitet u mirovanju makroskopski posmatrano u odnosu na posmatračev referentni sistem, što znači da naelektrisanja smatramo statičkim (u miru) iako u njima postoji stalno kretanje naelektrisanih čestica.

Naelektrisanje  $q$ , za koje se u literaturi susreću i nazivi: električno opterećenje, količina elektriciteta, naboj ili tovar, dakle, predstavlja cijeli multipl elementarnog naelektrisanja .

$$q = n \cdot q_e$$

## Naelektrisanje

- Osnovna osobina materije (kao masa)
- Svojstvo elementarnih čestica
- Dvije “vrste”
  - Pozitivno
  - Negativno
- Oznaka Q, jedinica kulon (C)
- $e=1,602 \cdot 10^{-19}C$ , proton +e, elektron -e

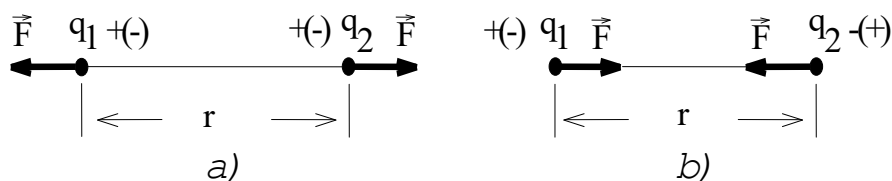
## Elektrostatička sila među česticama

- Privlačna među česticama naelektrisanim različitim “vrstama” naelektrisanja
- Odbojna među česticama naelektrisanim istom “vrstom” naelektrisanja
- Osnova i suština cijele elektrotehnike, “tjera” naelektrisanja da se kreću, što mi koristimo

Naelektrisano tijelo zanemarljivo malih dimenzija naziva se tačkastim, ili punktualnim, naelektrisanjem.

Makroskopsko svojstvo međusobnog djelovanja naelektrisanih tijela mehaničkom silom  $F$ , za slučaj djelovanja dva tačkasta naelektrisanja  $q_1$  i  $q_2$ , koja se nalaze u homogenoj sredini na međusobnom rastojanju  $r$ , kvantitativno se izražava *Kulonovim zakonom*:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$



$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{r}_0$$

**Dielektrična konstanta  $\epsilon$**  ili, kako se još naziva, specifična dielektrična propustljivost, ukazuje da Kulonova sila, osim od količina elektriciteta kojima su tijela naelektrisana i rastojanja tih tijela, zavisi i od sredine u kojoj se tijela nalaze

Najmanju dielektričnu konstantu ima prazan prostor - vakuum i ona iznosi:

$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \left[ \frac{C^2}{Nm^2} \right]$$

Sve ostale supstance imaju dielektričnu konstantu  $\varepsilon > \varepsilon_0$ .

Odnos  $\varepsilon/\varepsilon_0$  naziva se  $\varepsilon_r$  **relativna dielektrična konstanta**.

sredina	$\varepsilon_r$
vazduh	1,0006
transformatorsko ulje	2,2 - 2,5
čista voda	78
elektrotehnički porcelan	5,5 - 6,0
staklo	4 - 17
guma	3,0 - 6,0

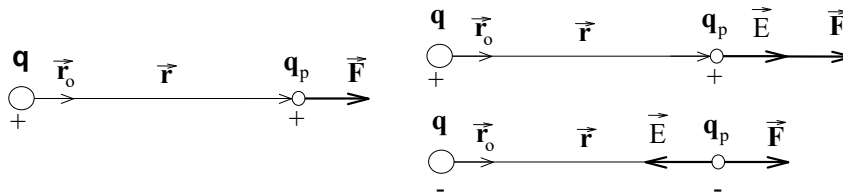
## 1.2 Elektrostatičko polje

Prema shvatanjima savremene fizike, svako uzajamno djelovanje (osim mehaničkog) prenosi se posredstvom fizičkog polja. Fizička polja se prostiru brzinom svjetlosti. Polje u okolini naelektrisanog tijela koje miruje naziva se **elektrostatičko polje E**.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_p} \left[ \frac{N}{C} \right]$$

### 1.2.1 Polje usamljenog tačkastog naelektrisanja

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{r}_o$$



### 1.2.2 Polje naelektrisanog tijela

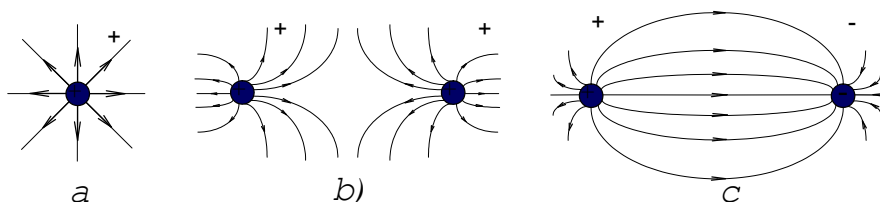
$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \left[ \frac{C}{m^2} \right] \quad \text{površinska gustina naelektrisanja}$$

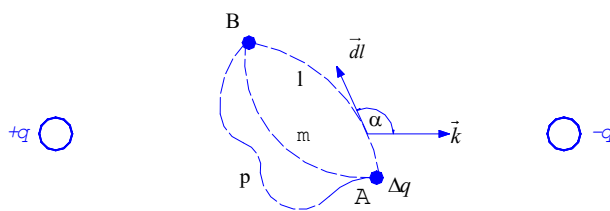
$$\vec{E} = \oint_S d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \oint_S \frac{dq}{r^3} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \oint_S \frac{\sigma}{r^3} \vec{r} dS$$



### 1.2.3 Predstavljanje elektrostatickog polja



### 1.4 Elektrostaticki potencijal i napon



$$A = \int_A^B \vec{F} d\vec{l} = \Delta q \int_A^B \vec{E} d\vec{l} = W_B - W_A$$

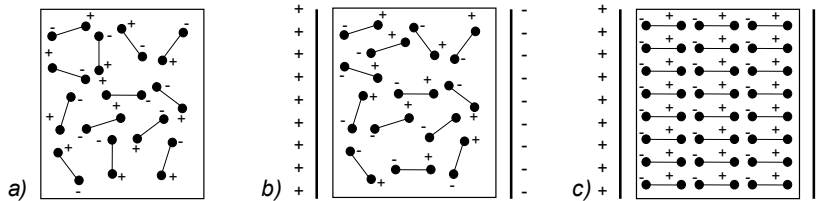
$$V_M = \int_M^\infty \vec{E} d\vec{l} . \quad U = V_A - V_B = \int_A^P \vec{E} d\vec{l} - \int_B^P \vec{E} d\vec{l} = \int_A^B \vec{E} d\vec{l}$$

## 1.5 Elektrostatičko polje u supstancijama

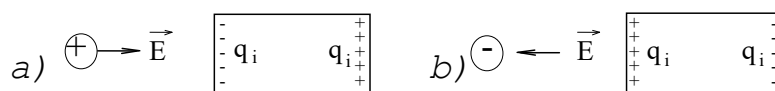
provodnici

dielektrici (izolatori)

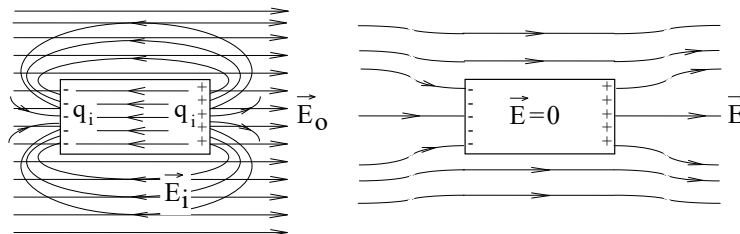
Polarizacija dielektrika



### 1.5.2 Elektrostatičko polje u provodnicima



Efekti pojave elektrostatičke indukcije u provodnom tijelu.

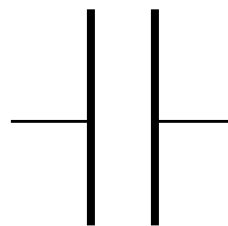
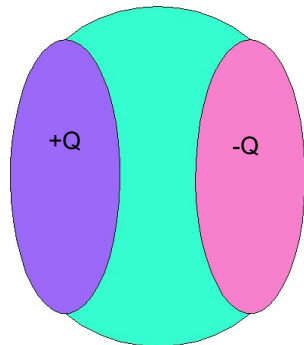


a) Provodno tijelo u stranom polju;    b) Rezultantno polje.

# Pojam kondenzatora

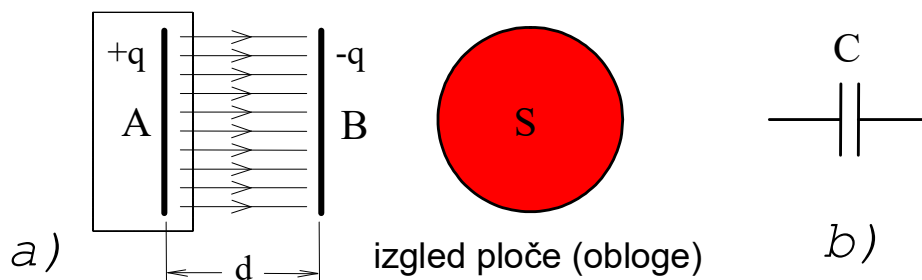
## ■ Sistem

- elektrotehnički element
- dva provodnika
- naelektrisanj jednakim količinama naelektrisanja suprotnog znaka
- između kojih se nalazi izolator



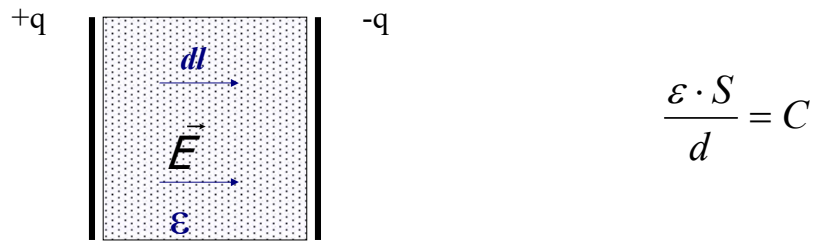
## 1.6 Električna kapacitivnost – Kondenzator

### Pločasti kondenzator



$$E = \frac{q}{\varepsilon \cdot S}$$

### 1.6.1 Napon između ploča kondenzatora



$$\frac{\varepsilon \cdot S}{d} = C$$

$$U_{ab} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{q}{\varepsilon \cdot S} dl \cdot \cos(0^\circ) = \frac{q}{\varepsilon \cdot S} d = \frac{q}{\frac{\varepsilon \cdot S}{d}}$$

$$C = \frac{q}{U}; \quad U = \frac{q}{C}; \quad q = U \cdot C$$

Jedinica za mjerenja kapacitivnosti je **farad (F)**

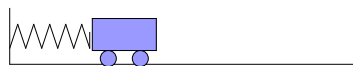
### 1.6.2 Energija napunjenog kondenzatora

$$W_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} q \cdot U = \frac{1}{2} C \cdot U^2$$

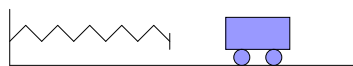
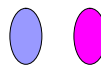
$$w_E = \frac{W_E}{V} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C \cdot S \cdot d} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \quad \left[ \frac{J}{m^3} \right]$$

## Namjena i svrha kondenzatora

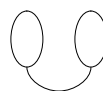
- Prikupljanje naelektrisanja
- Prikupljanje potencijalne energije električnog polja
- “Električna opruga”



mirovanje i potencijalna energija

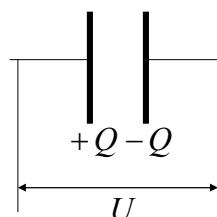
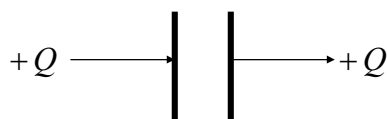


kretanje i kinetička energija



## Kapacitivnost kondenzatora

- Opisuje koliko kondenzator “podnosi” naelektrisanje



$$C = \frac{Q}{U}$$

$$[C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{C}{V} = F$$

- Nije isto (mada je slično) što i kapacitivnost provodnika
- Kapacitivnost kondenzatora je mnogo veća nego kap. provodnika

## Energija kondenzatora

- Rad koji treba uložiti da bi se kondenzator “napunio” (“nabio”) naelektrisanjem
- To je potencijalna energija
- Ako se ploče kondenzatora spoje žicom, naelektrisanja će kroz žicu “poletjeti” jedna drugima u susret, pretvorivši se potencijalna energija u kinetičku

$$\Delta q: Q_1 = 0 \Rightarrow U_1 = \frac{Q_1}{C} = 0 \Rightarrow A_1 = \Delta q \cdot U_1 = 0$$

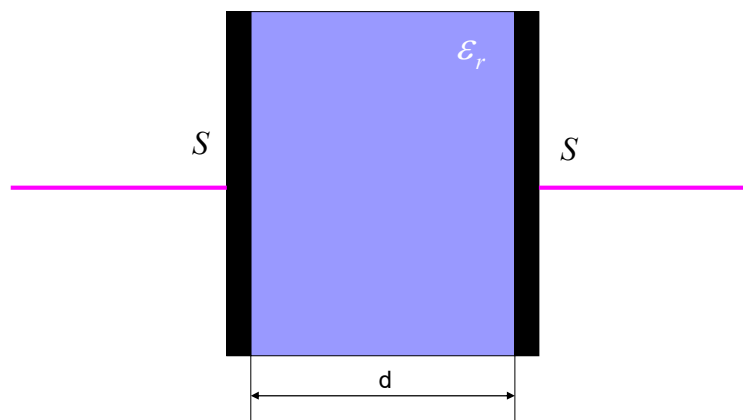
$$\Delta q: Q_2 = q \Rightarrow U_2 = \frac{\Delta q}{C} \Rightarrow A_2 = \Delta q \cdot U_2 = \frac{\Delta q^2}{C}$$

$$\Delta q: Q_3 = 2 \cdot \Delta q \Rightarrow U_3 = \frac{2\Delta q}{C} \Rightarrow A_3 = \Delta q U_3 = \frac{2\Delta q^2}{C}$$

$$A = \sum_{k=1}^N \Delta q \cdot U_k \rightarrow \int_0^Q U \cdot dq = \int_0^Q \frac{q}{C} \cdot dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} QU$$

## Konstrukcija kondenzatora

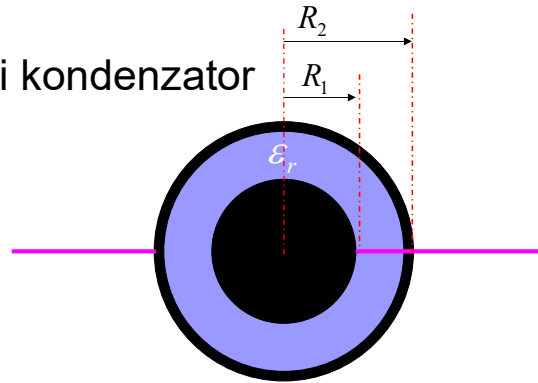
- Pločasti - ravni kondenzator



$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d}$$

## Konstrukcija kondenzatora

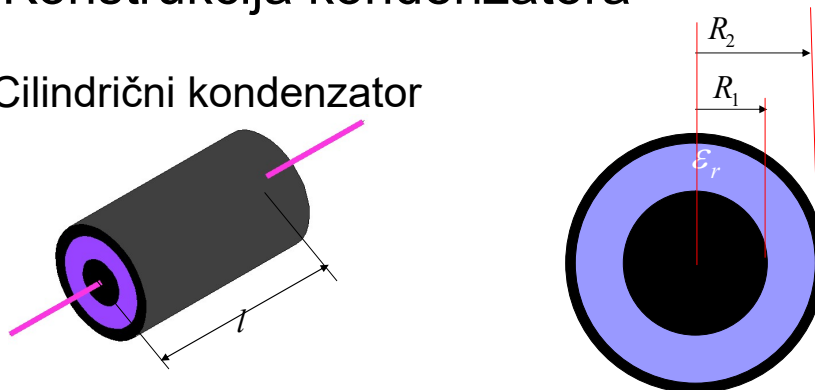
### ■ Sferni kondenzator



$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

## Konstrukcija kondenzatora

### ■ Cilindrični kondenzator



$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

## Vezivanje kondenzatora

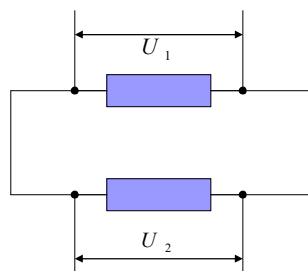
### ■ Načini povezivanja kondenzatora

- Paralelno
- Redno
- Kombinovano

## Povezivanje kondenzatora

### Paralelna veza

- Dva električna elementa su paralelno povezana ako su naponi na njima jednaki



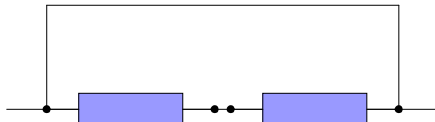
$$U_1 = U_2$$

- Oba kraja paralelno vezanih električnih elemenata su neposredno povezana

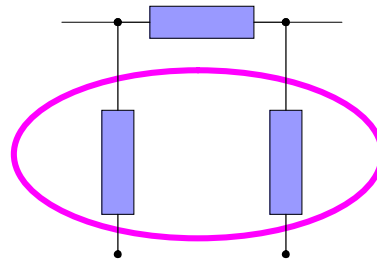


## Povezivanje kondenzatora

### ■ Česte greške



**JESU PARALELO VEZANI**



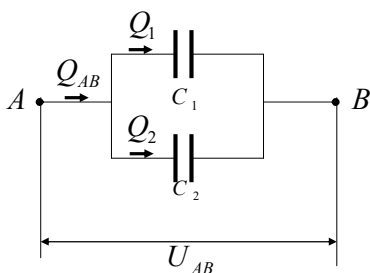
**NIJESU PARALELO VEZANI**

- Paralelno nacrtani ne znači paralelno vezani

## Povezivanje kondenzatora

### Paralelna veza

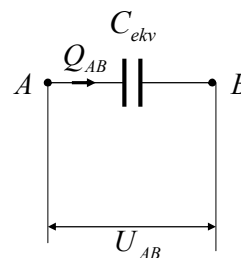
- Povezani kondenzatori se mogu zamijeniti kondenzatorom ekvivalentne kapacitivnosti



$$Q_{AB} = Q_1 + Q_2$$

$$C_{ekv} = \frac{Q_{AB}}{U_{AB}} = \frac{Q_1 + Q_2}{U_{AB}} = \frac{Q_1}{U_{AB}} + \frac{Q_2}{U_{AB}} = C_1 + C_2$$

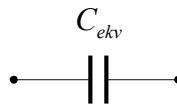
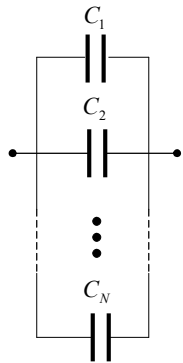
$$\boxed{C_{ekv} = C_1 + C_2}$$



## Povezivanje kondenzatora

### Paralelna veza

- Slučaj paralelnog povezivanja većeg broja kondenzatora



$$C_{ekv} = C_1 + C_2 + \dots + C_N = \sum_{i=1}^N C_i$$

- Paralelno povezivanje povećava kapacitivnost sistema u odnosu na kapacitivnost komponenti

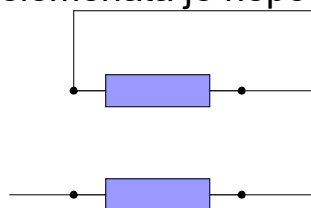
## Povezivanje kondenzatora

### Redna veza

- Dva električna elementa su redno povezana ako su količine naelektrisanja koje kroz njih protiču jednake



- Samo po jedan kraj redno vezanih električnih elemenata je neposredno povezan

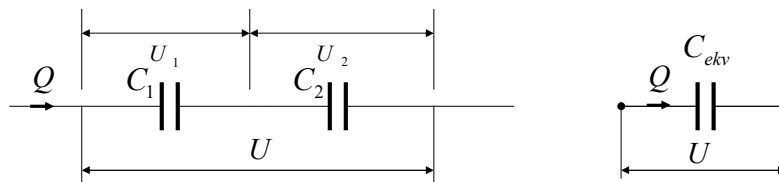


**JESU REDNO VEZANI**

## Povezivanje kondenzatora

### Redna veza

- Povezani kondenzatori se mogu zamijeniti kondenzatorom ekvivalentne kapacitivnosti



$$U = U_1 + U_2$$

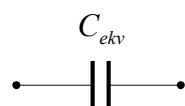
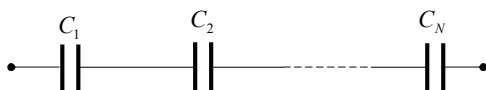
$$C_{ekv} = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{U_1 + U_2} \quad \text{nije} = \frac{Q}{U_1} + \frac{Q}{U_2} \quad \frac{12}{4} + \frac{12}{2} \neq \frac{12}{6}$$

$$\frac{1}{C_{ekv}} = \frac{U}{Q} = \frac{U_1 + U_2}{Q} = \frac{U_1}{Q} + \frac{U_2}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \boxed{\frac{1}{C_{ekv}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

## Povezivanje kondenzatora

### Redna veza

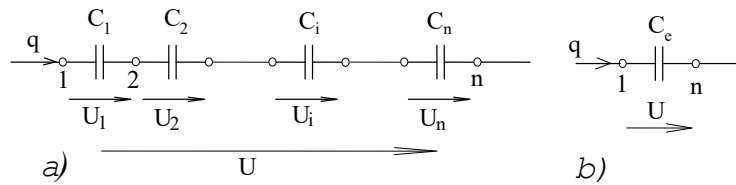
- Slučaj rednog povezivanja većeg broja kondenzatora



$$\boxed{\frac{1}{C_{ekv}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}}$$

- Redno povezivanje smanjuje kapacitivnost sistema u odnosu na kapacitivnost komponenti

### 1.6.4 Međusobno vezivanje više kondenzatora

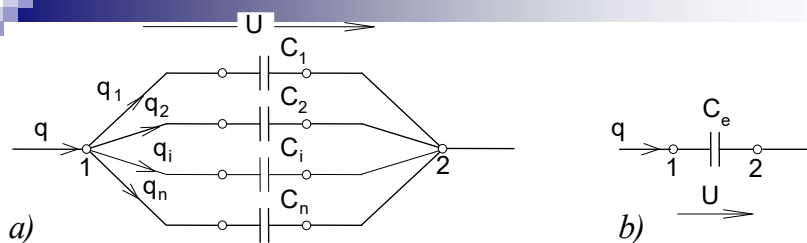


a) Redna veza kondenzatora; b) Ekvivalentni kondenzator.

$$q = q_1 = q_2 = \dots = q_i = \dots = q_n = C_1 U_1 = C_2 U_2 = \dots = C_i U_i = \dots = C_n U_n$$

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_i + \dots + U_n = q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_i} + \dots + \frac{1}{C_n} \right)$$

$$U = \frac{q}{C_e} \quad \frac{1}{C_e} = \frac{U}{q} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$



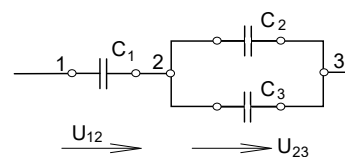
a) Paralelna veza kondenzatora; b) Ekvivalentni kondenzator.

$$q_1 = C_1 U; q_2 = C_2 U; \dots; q_i = C_i U; \dots; q_n = C_n U$$

$$C_e = \frac{q}{U} = \sum_{i=1}^n C_i$$

$$q = q_1 + q_2 + q_i + \dots + q_n$$

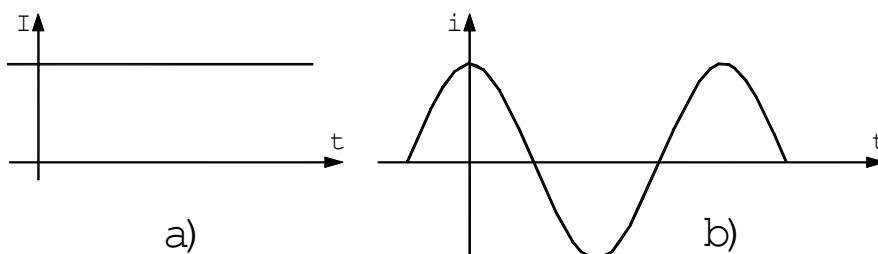
Primjer mješovite veze kondenzatora



## 2. ELEKTROKINETIKA

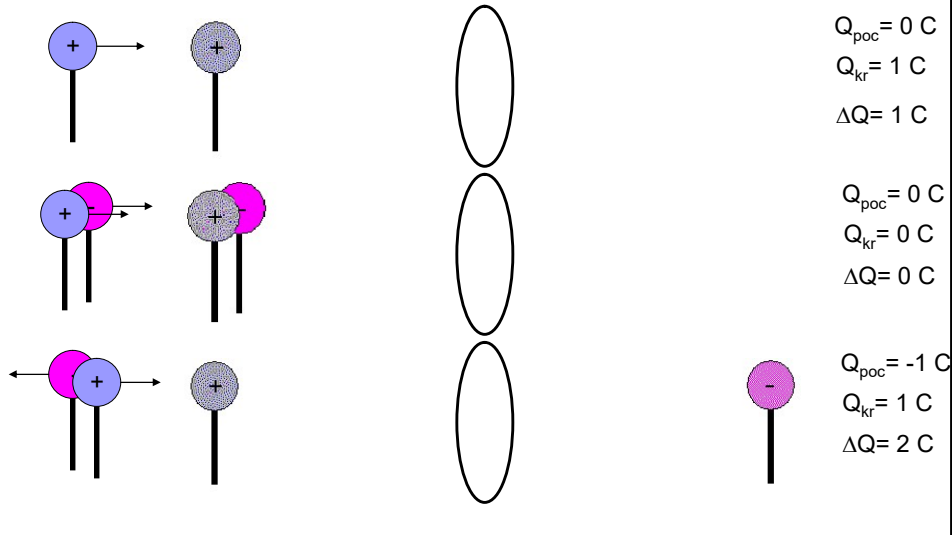
Elektrokinetika je oblast elektrotehnike u kojoj se izučava elektricitet u usmjerenom kretanju u odnosu na posmatračev referentni sistem. Usmjerenom kretanje naelektrisanja, pozitivnog ili negativnog, ili oba istovremeno, nazivamo **električna struja**. Brzina prostiranja struje u električki provodnim sredinama jednaka je brzini svjetlosti, dok je srednja brzina osnovnih nosilaca naelektrisanja (elektrona) oko 4.5 mm/min.

U posmatranom vremenskom intervalu "t" struja se može razlikovati i po intenzitetu i po smjeru. Struju, koja se ne mijenja po smjeru, nazivamo **jednosmjerna struja**. Struju, koja se mijenja i po vrijednosti i po smjeru, nazivamo **naizmjenična struja**.



## Pojam električne struje

### ■ Usmjerenno kretanje naelektrisanja



## Pojam električne struje

- Protoci naelektrisanja suprotnih znakova u istom smeru međusobno poništavaju efekte
- Protok negativnih naelektrisanja u jednom smeru ima isti efekat kao protok pozitivnih naelektrisanja u suprotnom smeru
- Metali: elektroni
- Elektroliti: negativni i pozitivni joni
- Jonizovani gasovi: elektroni i pozitivni joni

## Jačina električne struje

- Fizička veličina kojom se opisuje električna struja

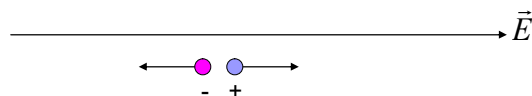
$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad I = \frac{dQ}{dt} \quad [I] = \frac{[Q]}{[t]} = \frac{C}{s} = A$$

$$\Delta Q = \Delta Q_+ + \Delta Q_- \Rightarrow I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\Delta Q_+ + \Delta Q_-}{\Delta t} = I_+ + I_-$$

- Jačina struje nije vektor
- Jačina struje jeste usmjerena veličina
- Dogovor: za smjer električne struje uzima se smjer kretanja pozitivnih naelektrisanja (suprotan od smjera kretanja negativnih naelektrisanja)

## Klasifikacije električnih struja

- prema smjeru struje
  - jednosmjerne
  - naizmjenične
- prema vremenskoj promjenljivosti
  - stacionarne (oznake velikim slovima)
  - promjenljive (oznake malim slovima)
- prema uzroku električne struje
  - difuzione
  - kondukcione



## Efekti električne struje

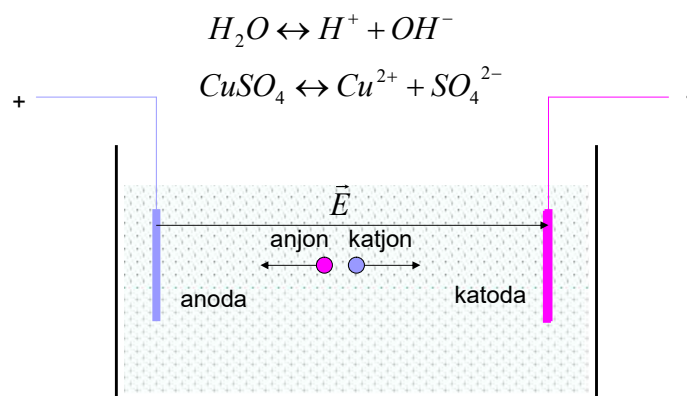
- Čovjek ne može da opazi

- Efekti

- uvek se pojavljuju
  - **magnetni**: postojanje magnetnog polja u okolini
- u velikom broju slučajeva se pojavljuju
  - **toplotni**: zagrijavanje sredine kroz koji protiče el. struja
  - **svjetlosni**: sredina emituje svjetlost usled zagrijavanja
  - **hemijski**: promjena hemijskog sastava sredine kroz koju električna struja prolazi

## Elektroliza

- Tehnološki postupak za dobijanje metala iz rastvora
- Razlaganje rastvora pomoću električne struje i taloženje metala iz rastvora na ploče





## Faradejevi zakoni elektrolize

### ■ Kvantitativno opisuju proces elektrolize

I zakon elektrolize

Masa metala koji se izdvoji na katodi proporcionalna je ukupnom naelektrisanju koje protekne kroz rastvor

$$m = kQ = kIt$$

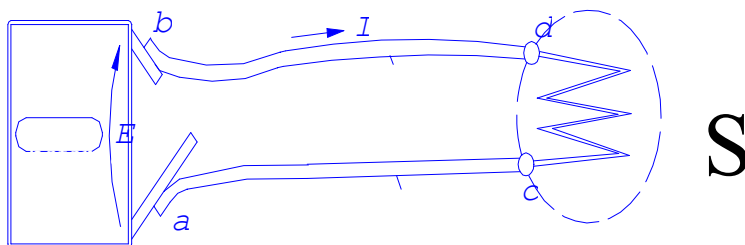
k – hemijski ekvivalent elementa [kg/C]

II zakon elektrolize

Elektrohemijski ekvivalent nekog elementa proporcionalan je njegovom hemijskom ekvivalentu

$$k = \frac{1}{N_A} \cdot \frac{M}{q}$$

Da bi se uspostavila struja mora se formirati **električno kolo** od materijala kroz koji se elektricitet može kretati. Znamo, na primjer, da se elektroni mogu kretati kroz metale, a isto tako, da se pozitivni i negativni joni mogu kretati kroz elektrolite.

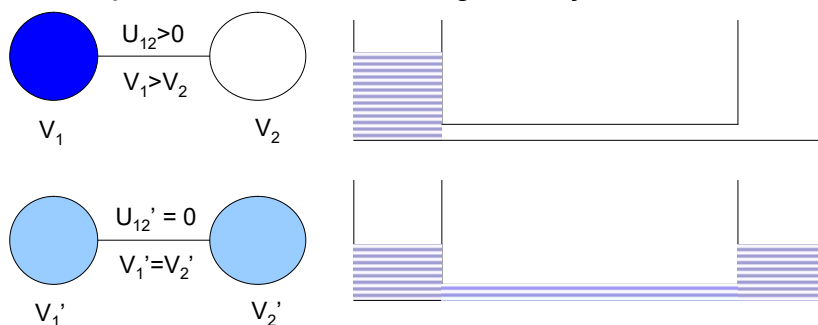


Opšte govoreći: sijalica S je **potrošač** ili **prijemnik** električne struje, baterija B je **izvor električne struje**, a provodnicima Cu ostvaruje se **električna veza** između izvora i potrošača. Bakarni provodnici su izolovani jedan od drugog. Istina, u prirodi nema idealnih izolatora, tako da jedan mali dio elektrona, umjesto da prođe kroz sijalicu, “preskoči” na povratni provodnik (vod). Sa inženjerskog stanovišta ova nesavršenost se zanemaruje i moguće je definisati **kružni put kretanja naelektrisanja – električno kolo**.

Strujanje elektriciteta (električna struja) uvijek je popraćeno energetske zbivanjima. Na primjer, sijalica svijetli, žica se grije. U prijemniku, električna energija se pretvara u neki drugi oblik energije, po potrebi korisnika (u posmatranom slučaju u svjetlosnu energiju). Zbog toga, u električnom kolu mora postojati izvor električne struje u kome se neki drugi oblik energije pretvara u električnu. Kažemo da izvor električne struje raspolaže **elektromotornom silom  $E$  (ems  $E$ )**, koja je **uzročnik kretanja elektriciteta**.

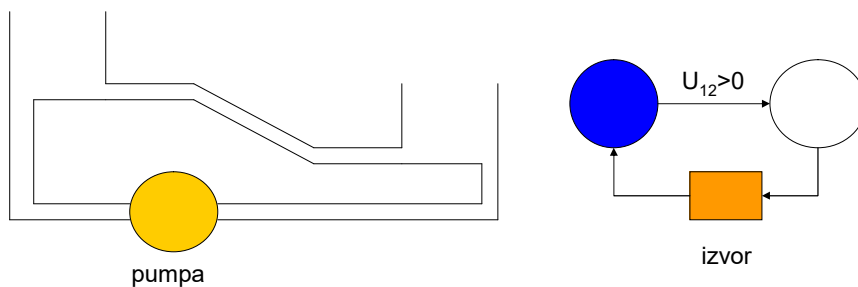
## Stalan tok električne struje

- Zakon o konzervaciji elektrostatičkog polja ukazuje da nije moguće napraviti stalan tok električne struje na osnovu elektrostatičkih sila
- Elektrostatičke sile vode ravnotežnom stanju
- Analogno gravitacionim silama, gdje voda ne može da kruži u prirodi samo na osnovu gravitacije



## Izvor električne struje

- Uređaj koji pretvara neku neelektričnu energiju u električnu
- “Tjera” naelektrisanja da se kreću suprotno električnom polju



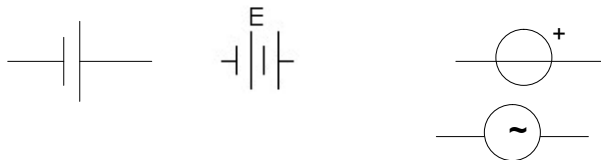
## Izvor električne struje

### ■ Vrste

#### □ prema vrsti energije koju koriste

- hemijski
  - baterije
  - akumulatori
- fotoizvori
- indukcioni (generatori)

### ■ Oznake



## Izvor električne struje

### ■ Veličine kojima se opisuju izvori električne struje

- elektromotorna sila (ems)
  - NIJE MEHANIČKA SILA
  - samo se tako zove
  - mjeri koliku energiju izvor predaje neelektrisanju

$$E = \frac{\Delta W}{\Delta q}$$

$$E = \frac{\Delta W}{\Delta q} = \frac{W_+ - W_-}{\Delta q} = \frac{\Delta q(V_+ - V_-)}{\Delta q} = V_+ - V_- \quad [E] = V$$

- kod hemijskih izvora *kapacitet izvora*
  - količina naelektrisanja koju izvor može da prenese sa nižeg energetskog nivoa na viši
  - jedinica C, ali u praksi je često Ah (1 Ah = 1A·3600 s = 3,6 kC)

EMS-a se definiše na sledeći način. Zamislimo da je kroz izvor prošla količina elektriciteta  $dQ$  i da je, tom prilikom, u izvoru izvršen rad  $dA$  (rad koji je potrebno uložiti da bi se neelektrična energija pretvorila u električnu energiju). Količnik:

$$E = \frac{dA}{dQ}$$

je po definiciji elektromotorna sila izvora.

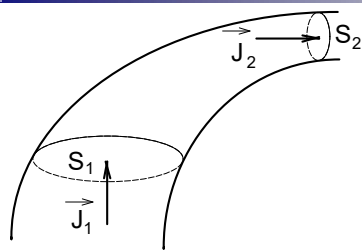
Elektromotorna sila, kontraelektromotorna sila i pad napona imaju istu jedinicu kao i **napon –volt (V)**:

$$E = \frac{A}{Q} \quad E(=) \frac{1J}{1C} (=) 1V$$

**Jačina električne struje  $I$**  predstavlja brzinu proticanja elektriciteta  $Q$  kroz datu površinu  $S$

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

$dQ$ - je pozitivna količina elektriciteta koja za vrijeme  $dt$  prođe kroz površinu  $dS$ . Razumije se, ako se kreće negativni elektricitet (npr. elektroni), što je slučaj kod metala, onda, pri računanju protoka  $dQ$ , treba voditi računa o smjeru (struja je suprotnog smjera od smjera kretanja elektrona). Kod elektrolita, gdje se kreću pozitivni i negativni joni, struja je jednaka zbiru struja pozitivnih i negativnih jona.



*Gustina struje  $J$  kroz površinu provodnika.*

Uočimo element površine  $dS$  na površini  $S$ . Moguće je na mjestu elementa  $dS$  definisati **vektor gustine električne struje** tako da skalarni proizvod tog vektora i vektora elementarne površine daje jačinu električne struje kroz površinu  $dS$ :

$$dI = \vec{J}d\vec{S}$$

Ukupna struja kroz površinu  $S$  dobija se integraljenjem:

$$I = \int_S \vec{J}d\vec{S} = \int_S JdS \cos \alpha$$

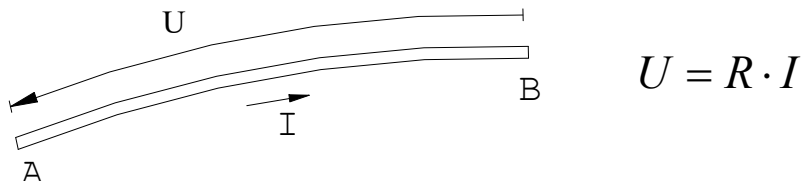
Jedinica za mjerenje jačine električne struje je **amper (A)**.

$$I = \frac{Q}{t} \quad I(=) \frac{1C}{1s} (=) 1A$$

a za gustinu struje:

$$J = \frac{I}{S} \quad J(=) \frac{1A}{1m^2}$$

## 2.1 Omov zakon



Između napona  $U$  i struje  $I$  kroz provodnik postoji linearna zavisnost.

Koeficijent srazmjernosti:  $R = \frac{U}{I}$

naziva se **električna otpornost** i izražava u omima,  $\Omega(\text{Om})$ .

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

Veličina  $\rho$  se naziva **specifična električna otpornost materijala**. To je veličina koja zavisi od prirode materijala provodnika i od temperature (kod nekih materijala specifična električna otpornost zavisi i od napona, osvijetljenosti, pritiska). Napomenimo da, pri vrlo niskim temperaturama, specifična električna otpornost pada na vrijednost blisku nuli. Ta pojava se naziva supraprovodnost. Pri temperaturama na kojima obično rade električni uređaji, specifična električna otpornost, pa time i otpornost, se mijenjaju skoro linearno sa promjenom temperature, što se u prvoj aproksimaciji može izraziti:

$$\rho_g = \rho_o(1 + \alpha_o \mathcal{G}) \text{ i } R_g = R_o(1 + \alpha_o \mathcal{G})$$

$$\text{ili } \rho_g = \rho_{20}(1 + \alpha_{20} \cdot \Delta \mathcal{G})$$

Recipročna vrijednost električne otpornosti naziva se električna provodnost G

$$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U} \qquad G = \frac{1}{R} = \frac{S}{\rho \cdot l} = \gamma \frac{S}{l}$$

čija je jedinica S (Simens):  $1S = \frac{1}{\Omega} = \Omega^{-1}$

Recipročna vrijednost specifične električne otpornosti  $\rho$  naziva se specifična električna provodnost i označava se sa  $\gamma$ (gama).

$$\gamma = \frac{1}{\rho} \qquad \gamma(=) \frac{S}{m}$$

## 2.2 Džulov zakon

$$A = RI^2 t \qquad dA = RI^2 dt$$

$$P = \frac{dA}{dt} = RI^2 \qquad P = I^2 R = \frac{U^2}{R} = UI$$

$$W = \frac{J}{\text{sec}} = \Omega \cdot A^2 = \frac{V^2}{\Omega} = V \cdot A$$



## Omov zakon

- Realni provodnik u električnom kolu
- Omov zakon opisuje strujno naponsku zavisnost provodnika

$$I_R \propto U_R \Rightarrow I_R = G \cdot U \Leftrightarrow I = \frac{U}{R}$$

- R: otpornost provodnika
  - G: provodnost provodnika
- $$G = \frac{1}{R}$$

$$[R] = \frac{V}{A} = \Omega \quad \text{om (Ohm)}$$

$$[G] = \frac{1}{\Omega} = S \quad \text{(simens)}$$



## Džulov zakon

- U šta se pretvara električna energija u provodniku ?
- U TOPLOTU
- Džulov zakon određuje količinu toplote koja se oslobađa u provodniku kroz koji protiče električna struja

$$W = P \cdot t = u \cdot i \cdot t = R \cdot i \cdot i \cdot t = R \cdot i^2 \cdot t$$

$$P = R \cdot i^2 = \frac{U^2}{R}$$

- Pri vezivanju na isti izvor, manje toplote se oslobađa u otporniku veće otpornosti, jer kroz njega teče manja struja
- Malu otpornost imaju uređaji za proizvodnju toplote (električne peći, grijalice, bojleri, ringle,...)
- Veliku otpornost imaju uređaji kod kojih je zagrijavanje neželjeno (elektronika)

## Otpornost provodnika

- Zavisí od konstrukcionih karakteristika otpornika
  - dužine provodnika (povećava otpornost)
  - poprečnog preseka provodnika (smanjuje otpornost)
  - vrste materijala od koga je provodnik napravljen

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

$\rho$  - specifična otpornost provodnika  $[\rho] = \left[ \frac{RS}{l} \right] = \Omega m \left( \frac{\Omega mm^2}{m} \right)$

- Zavisí od temperature

- povećava se sa temperaturom

$$\rho(t) = \rho_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t) \quad \rho_0 = \rho(t = 0^\circ C)$$

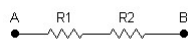
$\alpha$  - temperaturski koeficijent otpornosti


- superprovodnost ( $T > 0, R=0$  !!! olovo, niobijum, keramike)

## Vezivanje otpornika

- Radi dobijanja otpornika željene otpornosti
- Posledica toga što je svaki provodnik otpornik

- redno (iste struje)

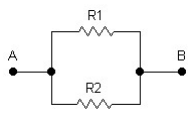



$$U_{AB} = U_1 + U_2 = R_1 I + R_2 I$$


$$U_{AB} = R_{ekv} \cdot I$$

$$R_{ekv} = R_1 + R_2$$

- paralelno (isti naponi)



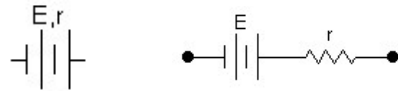
$$I_{AB} = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}$$


$$I_{AB} = \frac{U}{R_{ekv}}$$

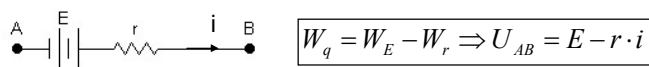
$$\frac{1}{R_{ekv}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

## Realni generatori

- Tokom rada, izvor se zagrijeva
- Predstavlja se unutrašnjom otpornošću



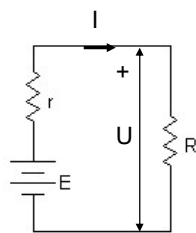
- Napon na krajevima realnog generatora je manji od njegove elektromotorne sile i zavisi od jačine struje koju izvor daje



- Elektromotorna sila izvora jednaka je naponu na njegovim krajevima kada kroz izvor ne protiče električna struja
- Idealni izvor ima unutrašnju otpornost jednaku nuli

## Realno prosto električno kolo

- Realni generator i potrošač



$$U = E - rI \wedge U = RI \Rightarrow I = \frac{E}{R + r}$$

$$P_{el} = EI = \frac{E^2}{R + r}$$

$$P_{gub} = rI^2 = \frac{rE^2}{(R + r)^2} = \frac{r}{R + r} \cdot |P_{el}|$$

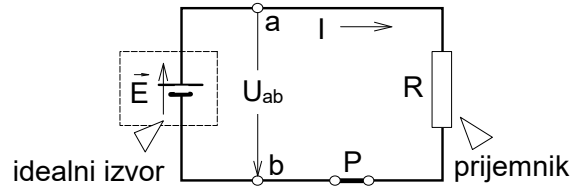
$$P_{kor} = RI^2 = \frac{RE^2}{(R + r)^2} = \frac{R}{R + r} \cdot |P_{el}|$$

$$\eta = \frac{P_{kor}}{P_{el}} = \frac{R}{r + R}$$

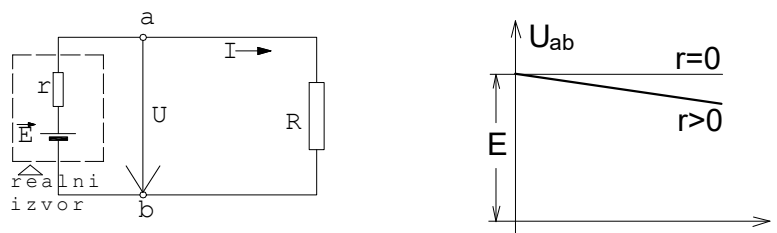
- Za povećanje koeficijenta korisnog dejstva bitno je da je otpornost potrošača što veća u odnosu na un. otp. izvora
- Za preuzimanje najveće snage iz izvora, otpornost potrošača treba da bude jednaka otpornosti izvora

## 2.4 Prosto kolo jednosmjerne struje

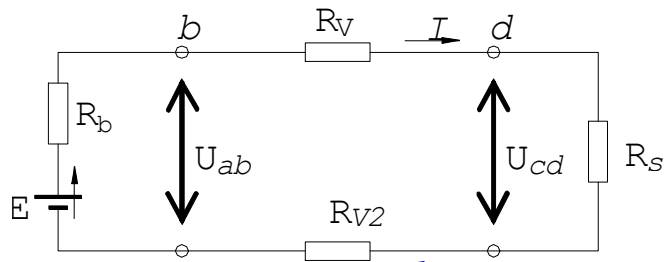
Prosto električno kolo sa idealnim izvorom



Prosto električno kolo sa realnim izvorom



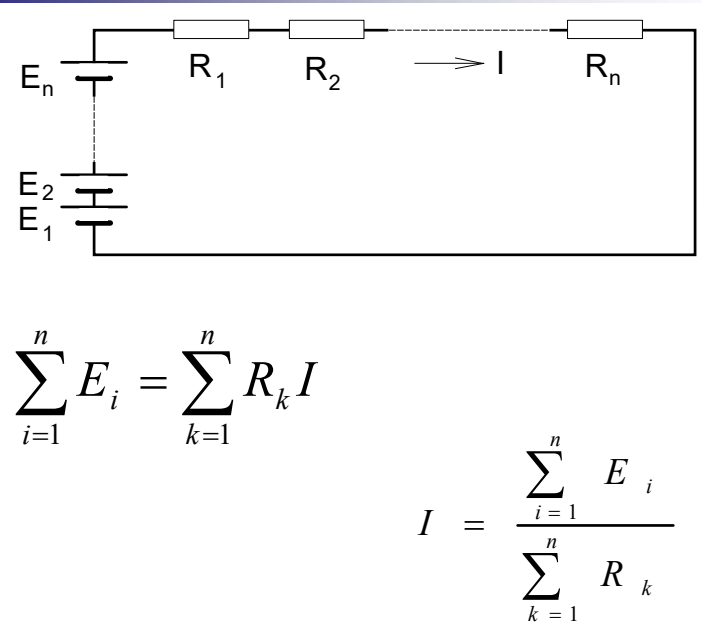
Električno kolo baterijske lampe



$$P_{h \rightarrow e} - P_{tb} - P_{tV_1} - P_{ts} - P_{tV_2} = 0$$

$$E \cdot I - R_b I^2 - R_{V_1} I^2 - R_s I^2 - R_{V_2} I^2 = 0$$

$$E - R_b I - R_{V_1} I - R_s I - R_{V_2} I = 0$$



$$\sum_{i=1}^n E_i = \sum_{k=1}^n R_k I$$

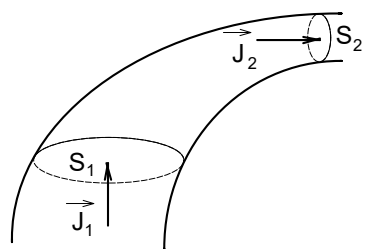
$$I = \frac{\sum_{i=1}^n E_i}{\sum_{k=1}^n R_k}$$

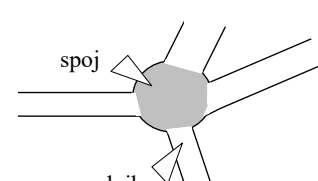
### 2.5.1 Prvi Kirhofov zakon

$$\int_S \vec{J} d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}$$

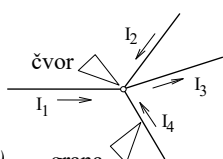
$$I_1 = \int_{S_1} \vec{J}_1 d\vec{S} \quad \text{ i } \quad I_2 = \int_{S_2} \vec{J}_2 d\vec{S}$$

$$\oint \vec{J} d\vec{S} = 0$$





a) spoj  
provodnik



b) čvor  
grana

$$-I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = 0$$

$$\sum_{i=1}^m I_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n i_i = 0$$

**Zbir struja koje pritiču u jedan čvor jednak je zbiru struja koje iz tog čvora ističu.**

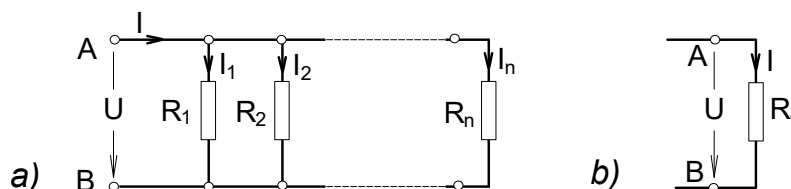
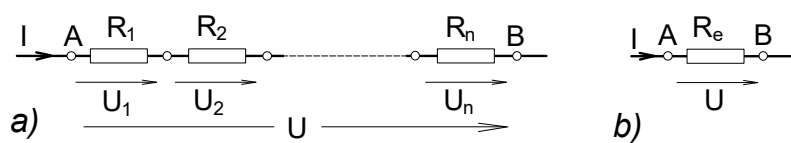
## 2.5.2 Drugi Kirhofov zakon

Drugi Kirhofov zakon glasi: Algebarski zbir svih elektromotornih sila i padova napona duž zatvorene konture po električnom kolu jednak je nuli.

$$\sum_{i=1}^n E_i - \sum_{i=1}^n R_i I_i = 0$$

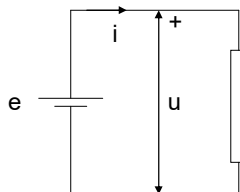
$$\sum_{i=1}^n u_i = 0$$

## 2.6 Uprošćavanje složenih električnih kola



## Prosto električno kolo

- Električna struktura koja se sastoji od izvora i prijemnika povezanih idealnim provodnikom
- Potrošač je električni element u kome se energija električne struje pretvara u neki drugi vid energije



- Izvor povećava energiju naelektrisanja  

$$\Delta W_q = \Delta q \cdot (V_+ - V_-) = \Delta q \cdot e = i \cdot \Delta t \cdot e$$
- Energija izvora se smanjuje  

$$\Delta W_E = -i \cdot \Delta t \cdot e$$
- Snaga izvora  

$$P_E = \frac{\Delta W_E}{\Delta t} = -e \cdot i < 0$$
- Potrošač umanjuje energiju naelektrisanja  

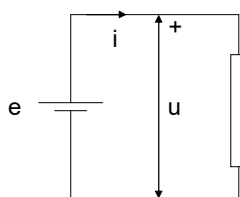
$$\Delta W_q = \Delta q \cdot (V_- - V_+) = \Delta q \cdot -u = -i \cdot \Delta t \cdot u$$
- Energija potrošača se povećava  

$$\Delta W_P = i \cdot \Delta t \cdot u$$
- Snaga potrošača  

$$P_P = \frac{\Delta W_P}{\Delta t} = u \cdot i > 0$$

## Električno kolo

- Prosto električno kolo je električna struktura u kojoj se energija izvora pretvara u energiju potrošača



$$P_E = e \cdot i$$

$$P_P = u \cdot i$$

$$u = e \Rightarrow P_E = P_P$$

zakon održanja energije

- Električno kolo je električna struktura u kojoj se energija m izvora pretvara u energije n potrošača

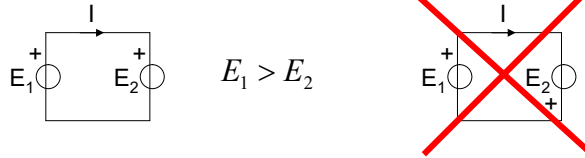
$$P_E^\Sigma = \sum_{k=1}^m e_k \cdot i_k \quad P_P^\Sigma = \sum_{k=1}^n u_k \cdot i_k$$

$$P_E^\Sigma = P_P^\Sigma$$

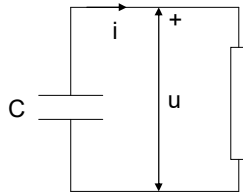
zakon održanja energije

## Izvori i potrošači

- Neki izvori mogu i da primaju energiju
- “Punjenje” akumulatora i *rechargable* baterija



- Neki potrošači mogu da predaju energiju
- “Pražnjenje” kondenzatora



## Strujno-naponska zavisnost

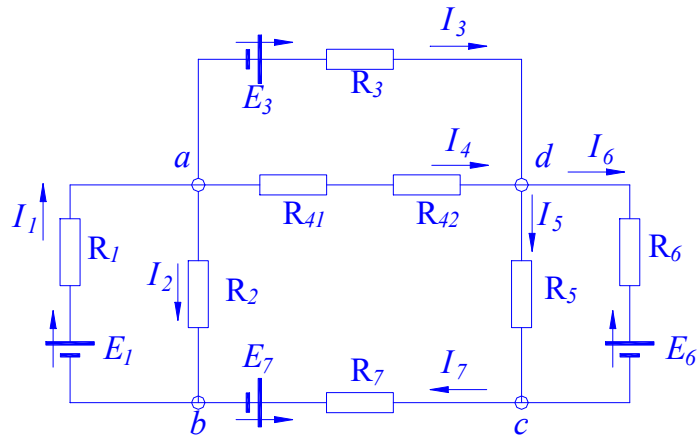
- Zavisnost jačine struje od napona koji postoji na nekom električnom elementu
- Omogućava opisivanje rada električnog elementa u kolu
- Kondenzator

$$i_c = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu_c)}{dt} = C \frac{du_c}{dt}$$

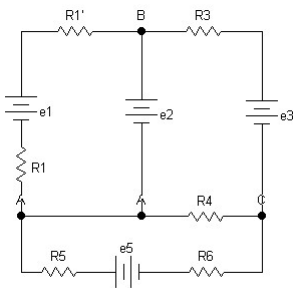
$$i_c = C \frac{du_c}{dt}$$



## 2.5 Složeno kolo jednosmjerne struje



## Pojmovi



- Skup redno vezanih elemenata (kroz koje protiče ista struja) čini **granu** električnog kola
- Skup međusobno povezanih grana u kome je početna tačka prve grane ujedno i krajnja tačka poslednje grane naziva se **kontura**
- Tačka u kojoj se spajaju bar tri grane naziva se **čvor** električnog kola

Riješiti električno kolo znači odrediti jačine struja svih grana u električnom kolu

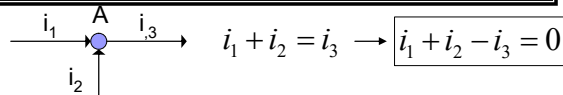
# Zakoni električnih kola

## ■ Kirhofovi zakoni

I Kirhofov zakon

Algebarski zbir struja u jednom čvoru jednak je nuli

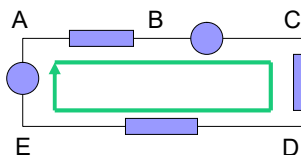
$$\sum_{\text{čvor}} I_k = 0$$



II Kirhofov zakon

Algebarski zbir napona u jednoj konturi jednak je nuli

$$\sum_{\text{kontura}} U_k = 0$$

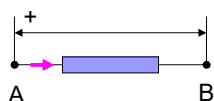


$$U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{DE} + U_{EA} = 0$$

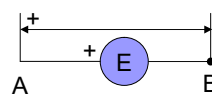
# Zakoni električnih kola

## ■ Algebarski napon

$$U_{AB} = R \cdot I$$



$$U_{AB} = E$$



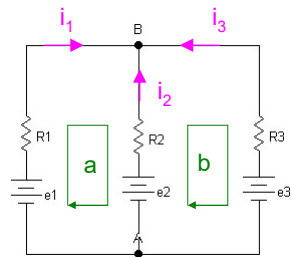
## Rešavanje električnih kola

- Metodi rešavanja cijelog kola
  - Metoda Kirhofovih zakona
  - Metoda konturnih struja
  - Metoda potencijala čvorova
- Rješavanje dijela kola
  - Teorema superpozicije
  - Tevenenova teorema
  - Nortonova teorema
- Rešavanje pojedinih kola
  - metodi transformacije kola

## Metoda Kirhofovih zakona

- Pisanje jednačina prema I i II Kirhofovom zakonu
- Svako električno kolo može da se riješi na taj način
- Postupak
  1. Obilježiti čvorove i grane kola
  2. Izabrati i naznačiti algebarske smjerove struja u granama
  3. Napisati jednačine I Kirhofovog zakona za  $n_c - 1$  čvor
  4. Napisati jednačine II Kirhofovog zakona za sve konture
  5. Riješiti dobijen sistem jednačina
  6. Protumačiti rezultat

## Metoda Kirhofovih zakona



$$B: I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad A: -I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$a: E_1 - R_1 I_1 + R_2 I_2 - E_2 = 0$$

$$b: E_2 - R_2 I_2 + R_3 I_3 - E_3 = 0$$

Primjer:

$$E_1 = 9 \text{ V}, E_2 = 12 \text{ V}, E_3 = 4,5 \text{ V}$$

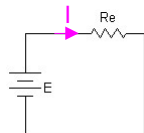
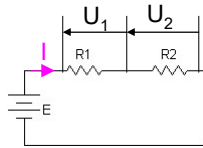
$$R_1 = 10 \text{ } \Omega, R_2 = 2 \text{ } \Omega, R_3 = 5 \text{ } \Omega$$

$$I_1 = -0,075 \text{ A} \quad I_2 = 1,125 \text{ A} \quad I_3 = -1,05 \text{ A}$$

## Metode transformacije kola

- Kolo se transformiše tako da se svede na jednostavnije kolo koje se rješava primenom Omovog zakona
- transformacija paralelne i redne veze
- transformacija trougla i zvijezde

## Transformacija redne veze

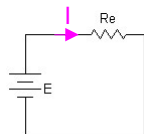
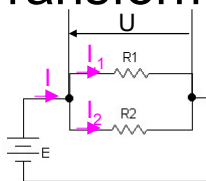


$$R_e = R_1 + R_2 \Rightarrow I = \frac{E}{R_e} = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

$$U_1 = R_1 I = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E \quad U_2 = R_2 I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

Napon na redno vezanim otpornicima proporcionalan je njihovim otpornostima

## Transformacija paralelne veze



$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow I = \frac{E}{R_e} = \frac{E}{R_1 R_2} (R_1 + R_2)$$

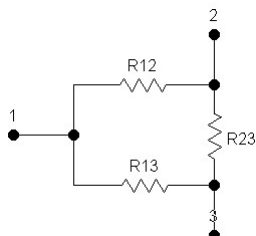
$$U = R_e I = E$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \quad I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

Jačina struje na paralelno vezanim otpornicima obrnuto je proporcionalna njihovim otpornostima

## Transformacije trougla i zvezde

Trougao

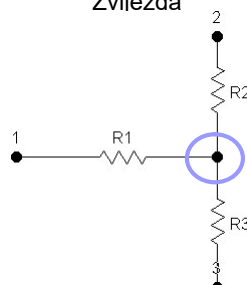


$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}$$

$$R_{13} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2}$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}$$

Zvjezda

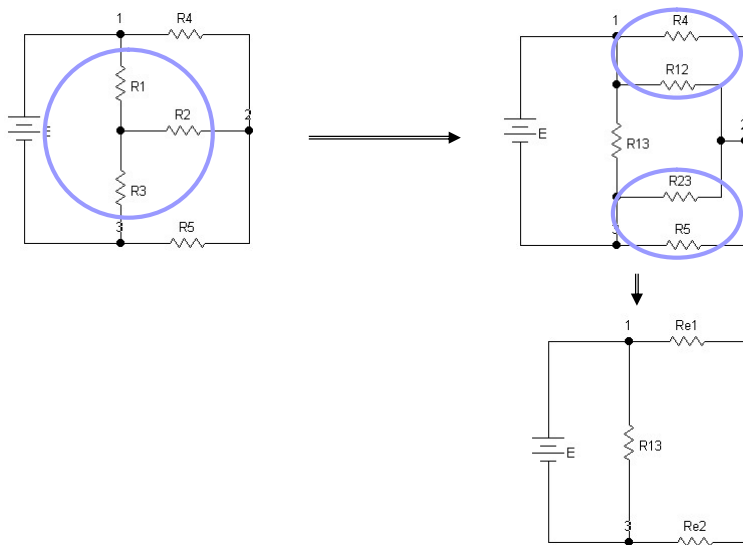


$$R_1 = \frac{R_{12} R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}$$

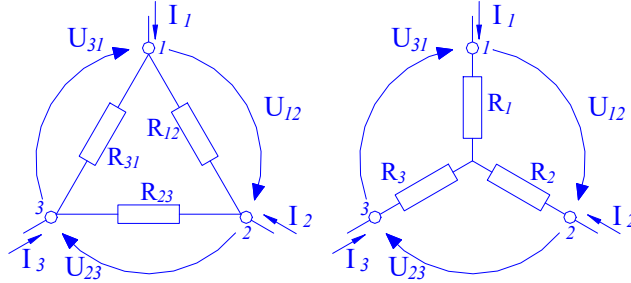
$$R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}$$

$$R_3 = \frac{R_{13} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}$$

## Transformacije trougla i zvijezde



### 2.6.3 Ekvivalentnost zvijezde sa trouglom otpora



$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_2 = \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

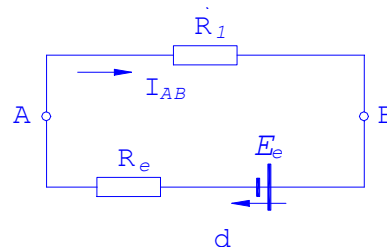
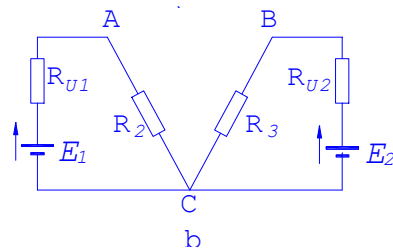
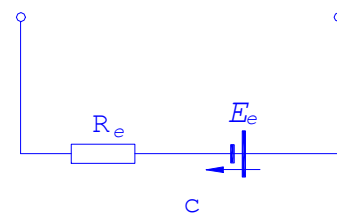
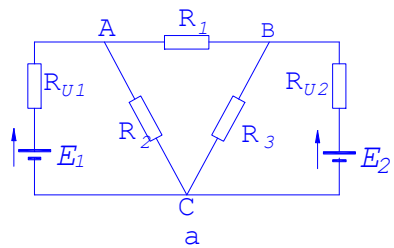
$$R_3 = \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}$$

$$R_{23} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}$$

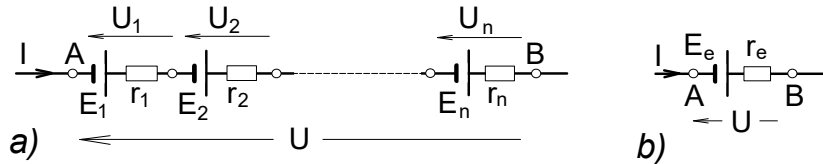
$$R_{31} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}$$

### 2.6.4 Tevenova teorema



## 2.7 Vezivanje izvora u baterije

### 2.7.1 Redna veza izvora u bateriju

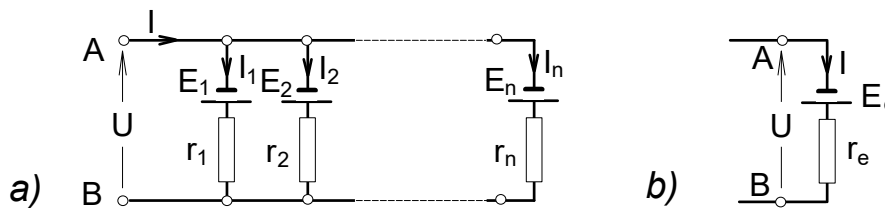


$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n = \sum_{i=1}^n (E_i - I r_i)$$

$$E_i = E \quad i \quad r_i = r$$

$$U = n(E - I r)$$

### 2.7.2 Paralelna veza izvora u bateriju



$$I = n I_i$$

$$U = E_i - r_i I_i$$

$$E_e = E \quad i \quad r_e = \frac{r}{n}$$

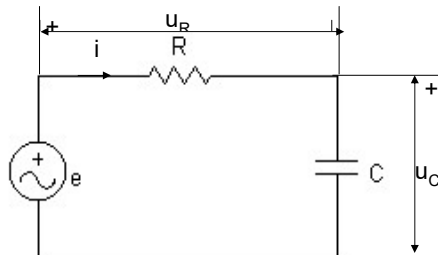
$$I = n \frac{E - U}{r} \quad i \quad U = E - \frac{r}{n} I$$



## RC kolo

- Kolo sa izvorom, otpornikom i kondenzatorom

$$\begin{aligned} e &= u_R + u_C \\ i &= \frac{u_R}{R} \quad i = C \frac{du_C}{dt} \\ u_R &= RC \frac{du_C}{dt} \\ e &= RC \frac{du_C}{dt} + u_C \end{aligned}$$



$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{e}{RC} \longrightarrow s + \frac{1}{RC} = 0 \quad \boxed{RC = \tau} \quad \text{vremenska konstanta kola}$$

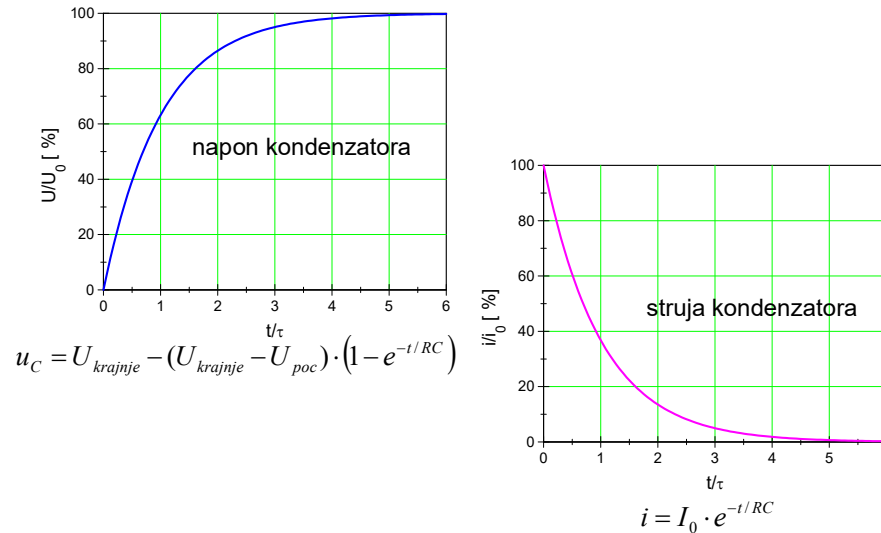
nehomogena linearna DJ prvog reda

## RC kolo

- homogeni dio: komponente kola
- nehomogeni dio: izvor
- početni uslov: da li je i koliko kondenzator napunjen

## RC kolo sa jednosmernim izvorom

### ■ punjenje



## RC kolo sa jednosmernim izvorom

### ■ pražnjenje

