POMORSKI FAKULTET

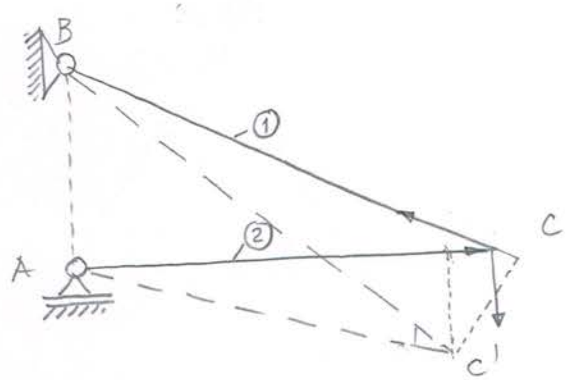
BRODOMAŠINSTVO

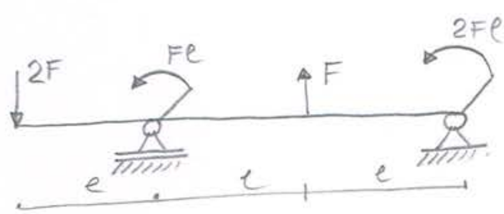
POMORSKA ELEKTROTEHNIKA

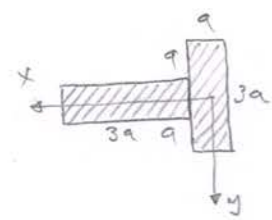
TEHNIČKA MEHANIKA

4. KOLOKVIJUM

(OTPORNOST MATERIJALA)



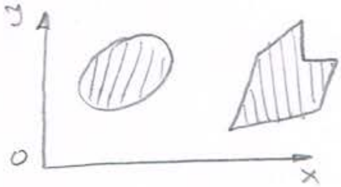




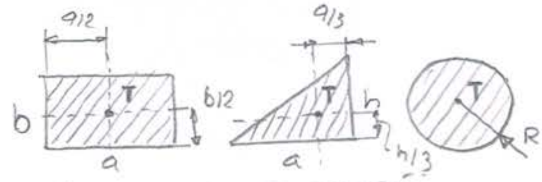
1. GEOMETRIJSKE KARAKTERISTIKE RAVNIH POVRŠI

POJAM RAVNE POVRŠI

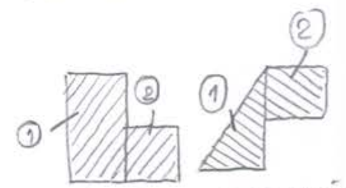
POD RAVNOM POVRŠI, U RAVNI xOy (SLIKA) PODRAZUMIJEVAMO OBLAST OGRANIČENU ZATVORENOM KRIVOM ILI IZLOMLJENOM PRAVOM LINIJOM.



JEDNOSTAVNA RAVNA POVRŠ JE ONA ZA KOJU ZNAMO TEŽIŠTE. SLOŽENA RAVNA POVRŠ JE RAVNA POVRŠ KOJA SE SASTOJI OD VIŠE JEDNOSTAVNIH RAVNIH POVRŠI.



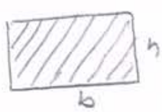
PROSTE RAVNE POVRŠI



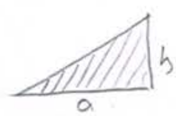
SLOŽENE RAVNE POVRŠI

POVRŠINA RAVNE POVRŠI

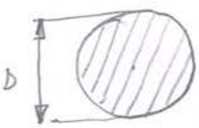
IZRAZI ZA IZRAČUNAVANJE POVRŠINA PROSTIH RAVNIH POVRŠI:



$A = b \cdot h$;



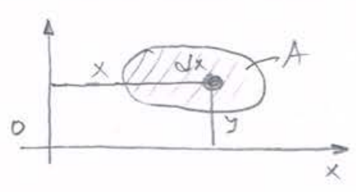
$A = \frac{1}{2} a h$;



$A = \frac{D^2 \pi}{4}$

POVRŠINA SLOŽENE RAVNI POVRŠI JE JEDNAKA ZBIRU POVRŠINA POJEDINIH RAVNIH POVRŠI: $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_N = \sum_{i=1}^{N} A_i$

STATIČKI MOMENTI RAVNE POVRŠI

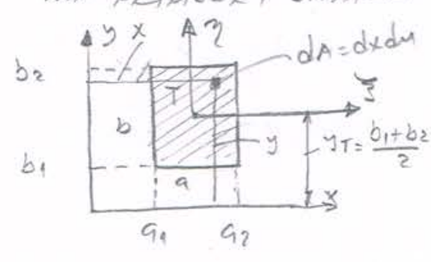


STATIČKI MOMENTI ZA x I y OSU:

$$S_x = \int_A y \cdot dA$$

$$S_y = \int_A x \cdot dA$$

NA PRIMJER, STATIČKI MOMENTI INERCIJE ZA x I y OSU SU:



$$S_x = \int_A y\, dA = \int_A y\, dx\, dy = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} y\, dy = \frac{b_2^2 - b_1^2}{2}(a_2 - a_1)$$

$$S_x = (b_2 - b_1)\left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right) a = b \cdot a \cdot y_T = A \cdot y_T \quad \ldots$$

$$S_y = \cdots = A \cdot x_T$$

$$S_\xi = A\, y_T = A \cdot 0 = 0$$

$$S_\eta = A\, x_T = A \cdot 0 = 0$$

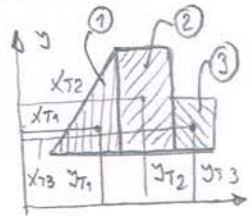
ZA TEŽIŠNE OSE ξ I η x_T I y_T SU JEDNAKI NULI

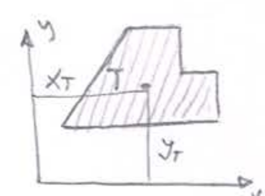
KOORDINATE TEŽIŠTA SLOŽENE FIGURE

$$S_x = S_x^{(1)} + S_x^{(2)} + S_x^{(3)} = y_{T1} \cdot A_1 + y_{T2} A_2 + y_{T3} \cdot A_3 + \cdots$$

$$S_x = \sum_{i=1}^{N} y_{Ti} A_i$$

$$S_y = S_y^{(1)} + S_y^{(2)} + S_y^{(3)} = x_{T1} A_1 + x_{T2} A_2 + x_{T3} A_3 + \cdots$$





POŠTO JE TAKOĐE I: $S_x = A \cdot y_T$

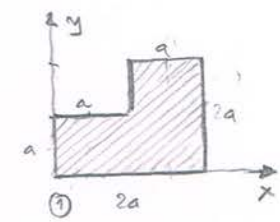
$S_y = A \cdot x_T$

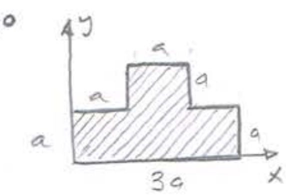
TO SU KOORDINATE TEŽIŠTA SLOŽENE RAVNE FIGURE:

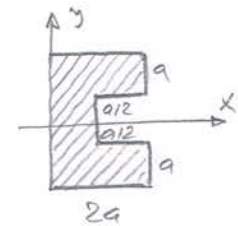
$$x_T = \frac{S_y}{A} = \frac{\Sigma x_{Ti} A_i}{\Sigma A_i} = \frac{x_{T1} A_1 + x_{T2} A_2 + \cdots}{A_1 + A_2 + \cdots}$$

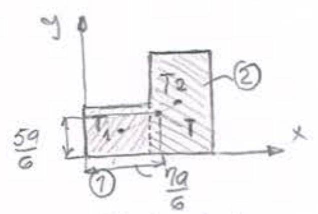
$$y_T = \frac{S_x}{A} = \frac{\Sigma y_{Ti} A_i}{\Sigma A_i} = \frac{y_{T1} A_1 + y_{T2} A_2 + \cdots}{A_1 + A_2 + \cdots}$$

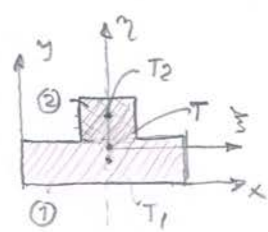
PRIMJER ZA RAVNE POVRŠI PRIKAZANE NA SLICI ODREDITI KOORDINATE TEŽIŠTA x_T I y_T. DATO JE a.

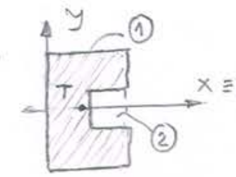
1° 

2° 

3° 

1° 

2° 

3° 

1°:

①: $A_1 = a^2$ ② $A_2 = 2a^2$

$x_{T1} = \frac{a}{2}$ $x_{T2} = \frac{3}{2}a$

$y_{T1} = \frac{a}{2}$ $y_{T2} = a$

$A = A_1 + A_2 = 3a^2$

$$x_T = \frac{S_y}{A} = \frac{x_{T1}A_1 + x_{T2}A_2}{A_1 + A_2} = \frac{\frac{a}{2}a^2 + \frac{3a}{2}2a^2}{3a^2} = \frac{7}{6}a$$

$$y_T = \frac{S_x}{A} = \frac{y_{T1}A_1 + y_{T2}A_2}{A_1 + A_2} = \frac{\frac{a}{2}a^2 + a \cdot 2a^2}{3a^2} = \frac{5}{6}a$$

2°:

R: $x_T = \frac{3}{2}a$;

$y_T = \frac{3}{4}a$

3°:

$$x_T = \frac{a \cdot 6a^2 - \frac{3a}{2}a^2}{6a^2 - a^2}$$

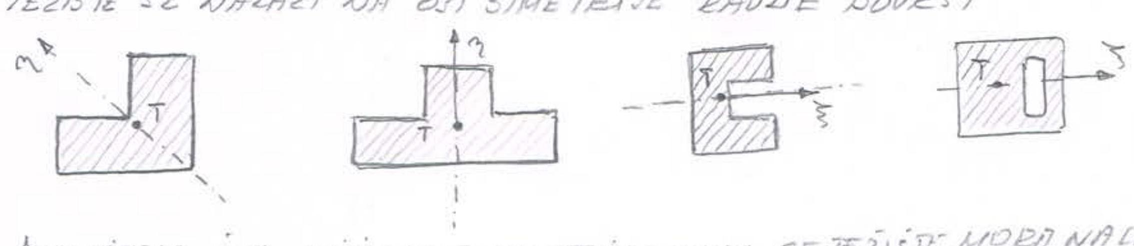
$$x_T = \frac{9}{10}a$$

$$y_T = \frac{0 \cdot 6a^2 - 0a^2}{6a^2 - a^2} = 0$$

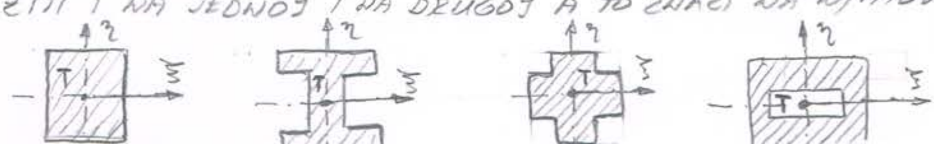
MOŽE SE ZAKLJUČITI:
TEŽIŠTE SE NALAZI NA OSI SIMETRIJE TIJELA. AKO TIJELO IMA DVIJE OSE SIMETRIJE TEŽIŠTE SE NALAZI NA NJIHOVOM PRESJEKU.

NA OSNOVU PRETHODNIH PRIMJERA JE MOŽE ZAKLJUČITI

- TEŽIŠTE SE NALAZI NA OSI SIMETRIJE RAVNE POVRŠI

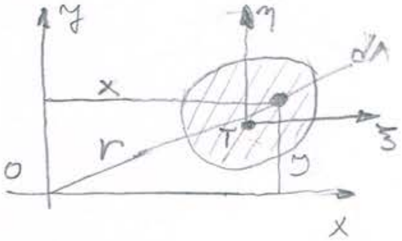


- AKO TIJELO IMA DVIJE OSE SIMETRIJE ONDA SE TEŽIŠTE MORA NALAZITI I NA JEDNOJ I NA DRUGOJ A TO ZNAČI NA NJIHOVOM PRESJEKU.



MOMENTI INERCIJE RAVNE POVRŠI

POD MOMENTIMA INERCIJE RAVNE POVRŠI ZA OSE X I Y PODRAZUMIJEVAMO VELIČINE DEFINISANE NA SLJEDEĆI NAČIN:



$I_x = \int y^2 dA$ – AKSIJALNI MOMENT INERCIJE ZA X-OSU

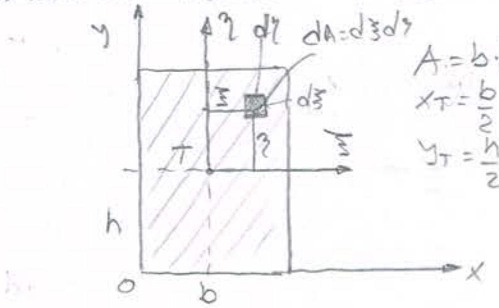
$I_y = \int x^2 dA$ – –"– –"– –"– Y-OSU

$I_{xy} = \int xy\, dA$ – CENTRIFUGALNI MOMENT INERCIJE

$I_o = \int r^2 dA$ – POLARNI MOMENT INERCIJE

UKOLIKO MOMENTE INERCIJE ODREĐUJEMO U ODNOSU NA TEŽIŠNE ξ I η OSE RAVNE POVRŠI ONDA SE RADI O TEŽIŠNIM (CENTRALNIM, SOPSTVENIM) MOMENTIMA INERCIJE.

ZA RAVNU POVRŠ U OBLIKU PRAVOUGAONIKA IMAMO:



$A = b \cdot h$

$x_T = \frac{b}{2}$

$y_T = \frac{h}{2}$

$dA = d\xi \cdot d\eta$

$$J_\xi = \int_A \eta^2 dA = \int_A \eta^2 d\eta\, d\xi = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta^2 d\eta \int_{-\frac{b}{2}}^{b/2} d\xi$$

$$J_\xi = \frac{\eta^3}{3}\Big|_{-h/2}^{h/2} \cdot \xi\Big|_{-b/2}^{b/2} = \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \left(-\frac{h}{2}\right)^3}{3}\left(\frac{b}{2} + \frac{b}{2}\right)$$

$$J_\xi = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \left(-\frac{h}{2}\right)^3\right) \cdot b$$

$$J_\xi = \frac{b}{24}\left[h^3 - (-h)^3\right] = \frac{b}{24}\left[h - (-h)\right]\left(h^2 - h(-h) + (-h)^2\right)$$

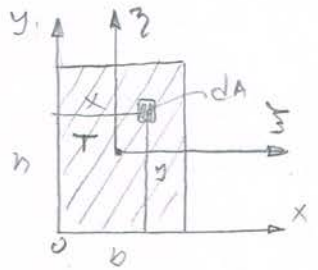
$$J_\xi = \frac{b}{24} \cdot 2h\, h^2 = \boxed{\frac{b \cdot h^3}{12} = J_\xi}$$

$$J_\eta = \int_A \xi^2 dA = \dots = \boxed{\frac{h \cdot b^3}{12} = J_\eta}$$

$$J_{\xi\eta} = \int_A \xi\eta\, dA = \dots = \boxed{0 = J_{\xi\eta}}$$

$$J_o = J_\xi + J_\eta = \boxed{\frac{b \cdot h}{12}(b^2 + h^2) = J_o}$$

MOMENTI INERCIJE J_ξ, J_η, J_o SU UVIJEK POZITIVNI. CENTRIFUGALNI MOMENT INERCIJE MOŽE BITI I POZITIVAN I NEGATIVAN PA I JEDNAK NULI.



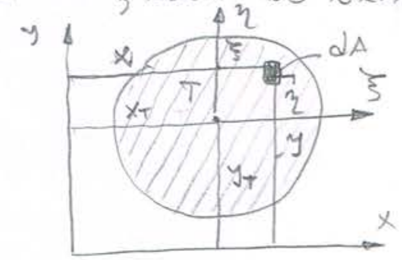
ZA X-OSU KOORDINATNOG SISTEM xOy, SAGLASNO DEFINICIJI AKSIJALNI MOMENT INERCIJE JE:

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A y^2 dy\, dx = \frac{y^3}{3}\Big|_0^h x\Big|_0^b = \boxed{\frac{bh^3}{3} = I_x}$$

SLIČNO SE DOBIJA:

$$\boxed{I_y = \frac{hb^3}{3}}, \quad \boxed{I_{xy} = \frac{h^2 b^2}{4}}, \quad \boxed{I_o = \frac{bh}{3}(b^2 + h^2)}$$

ŠTAJNEROVA TEOREMA DAJE VEZU IZMEĐU MOMENTA INERCIJE ZA OSU KOJA JE PARALELNO POMJERENA U ODNOSU NA NJENU TEŽIŠNU OSU, KOJA JE ISKAZANA JEDNAČINAMA:



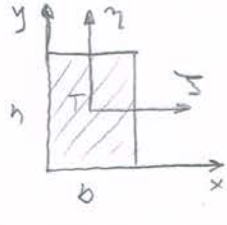
$$I_x = I_\xi + y_T^2 \cdot A$$
$$I_y = I_\eta + x_T^2 A$$
$$I_{xy} = I_{\xi\eta} + x_T y_T A .$$

IZAISTA VAŽI:

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A (y_T + \eta)^2 dA = \int_A \eta^2 dA + \int_A 2 y_T \eta \, dA + \int_A y_T^2 A =$$
$$= I_\xi + 2 \cdot y_T \cancel{\int_A \eta \, dA}^{\to 0} + y_T^2 A = I_\xi + y_T^2 A$$

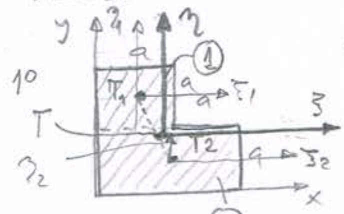
SLIČNO JE MOGUĆE POKAZATI VAŽENJE I OSTALIH JEDNAČINA.

$\boxed{\text{PRIMJER}}$ PRIMJENOM ŠTAJNEROVIH FORMULA ODREDITI I_x, I_y I I_{xy} ZA PRAVOUGAONIK PRIKAZAN NA SLICI. POZNATO JE: $I_\xi = \frac{bh^3}{12}$; $I_\eta = \frac{hb^3}{12}$; $I_{\xi\eta} = 0$; b, h.



$$I_x = I_\xi + y_T^2 A = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot b \cdot h = \frac{b \cdot h^3}{3}$$
$$I_y = I_\eta + x_T^2 A = \frac{hb^3}{12} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot b \cdot h = \frac{h b^3}{3}$$
$$I_{xy} = I_{\xi\eta} + x_T y_T A = \frac{b}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot b \cdot h = \frac{b^2 \cdot h^2}{4}$$

$\boxed{\text{PRIMJER}}$ ZA RAVNE POVRŠI PRIKAZANE NA SLICI ODREDITI VRIJEDNOSTI MOMENATA INERCIJE ZA TEŽIŠNE OSE.



$A_1 = a^2$

$A_2 = 2a^2$

$I_{\xi_1} = \frac{a \cdot a^3}{12} = \frac{a^4}{12}$ $\quad I_{\xi_1 \eta_1} = 0$

$I_{\eta_1} = \frac{a^4}{12}$ $\quad I_{\xi_2 \eta_2} = 0$

$I_{\xi_2} = \frac{2a \, a^3}{12} = \frac{a^4}{6}$

$I_{\eta_2} = \frac{a (2a)^3}{12} = \frac{2a^4}{3}$

$x_{T1} = \frac{a}{2}$

$y_{T1} = \frac{3a}{2}$

$x_{T2} = a$

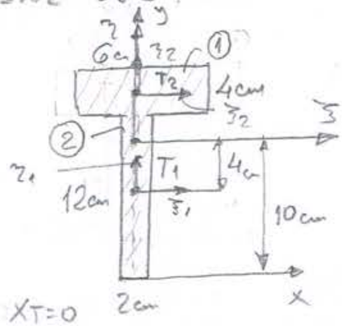
$y_{T2} = \frac{a}{2}$

$$x_T = \frac{\left(\frac{a}{2}\right) a^2 + a \cdot 2a^2}{3a^2} = \frac{5a}{6}$$

$$y_T = \frac{\left(\frac{3a}{2}\right) \cdot a^2 + \left(\frac{a}{2}\right) 2a^2}{3a^2} = \frac{5a}{6}$$

$\xi_{T1} = -\frac{a}{3}$; $\eta_{T1} = \frac{2a}{3}$; $\xi_{T2} = \frac{a}{6}$; $\eta_{T2} = -\frac{a}{3}$

$$I_\xi = (I_{\xi_1} + \eta_{T1}^2 A_1) + (I_{\xi_2} + \eta_{T2}^2 A_2)$$
$$I_\xi = \left[\frac{a^4}{12} + \left(\frac{2a}{3}\right)^2 \cdot a^2 + \frac{a^4}{6} + \left(\frac{a}{3}\right)^2 \cdot 2a^2\right]$$
$$I_\xi = \frac{a^4}{3}\left[\frac{1}{4} + \frac{4}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right] = \frac{a^4}{3} \frac{(3 + 16 + 6 + 8)}{12} = \frac{11}{12} a^4$$
$$I_\eta = (I_{\eta_1} + \xi_{T1}^2 A_1) + (I_{\eta_2} + \xi_{T2}^2 A_2) = \dots = \frac{11}{12} a^4$$



$A_1 = 24 \text{ cm}^2$

$I_{\xi 1} = \frac{6 \cdot 4^3}{12} = 32 \text{ cm}^4$

$I_{\eta 1} = \frac{4 \cdot 6^3}{12} = 72 \text{ cm}^4$

$A_2 = 24 \text{ cm}^2$

$I_{\xi 2} = \frac{2 \cdot 12^3}{12} = 288 \text{ cm}^4$

$I_{\eta_2} = \frac{12 \cdot 2^3}{12} = 8 \text{ cm}^4$

$x_T = 0$

$$y_T = \frac{y_{T1} A_1 + y_{T2} A_2}{A_1 + A_2} = \frac{6 \cdot 24 + 14 \cdot 24}{24 + 24} = 10 \text{ cm}$$

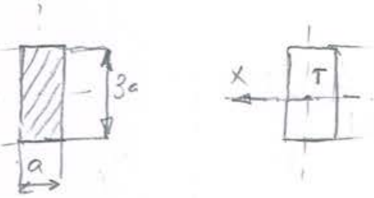
$y_{T1} = 4 \text{ cm}$

$y_{T2} = 4 \text{ cm}$

$$I_\xi = (I_{\xi 1} + y_{T_1}^2 A_1) + (I_{\xi_2} + y_{T2}^2 A_2)$$
$$I_\xi = 32 + 4^2 \cdot 24 + 288 + 4^2 \cdot 24$$
$$I_\xi = 1088 \text{ cm}^4$$
$$I_\eta = I_{\eta_1} + I_{\eta_2} = 72 + 8 = 80 \text{ cm}^4$$
$$I_{\xi\eta} = 0$$

ZADATAK ZA RAVNE FIGURE PRIKAZANE NA SLICI ODREDITI AKSIJALNI MOMENT INERCIJE ZA X-OSU KOJA PROLAZI KROZ TEŽIŠTE RAVNE FIGURE.

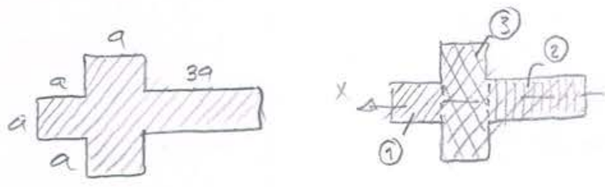
1



TEŽIŠTE SE NALAZI NA PRESJEKU OSA SIMETRIJE PA JE X-OSA TEŽIŠNA OSA

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{a(3a)^3}{12} = \frac{27a^4}{12} = \frac{9a^4}{4}$$

2



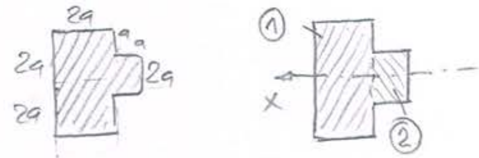
X-OSA JE OSA SIMETRIJE I NA NJOJ SE NALAZI TEŽIŠTE TJ. X-OSA JE TEŽIŠNA OSA

$$I_x = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3}$$

$$I_x = \frac{a^4}{12} + \frac{3a\,a^3}{12} + \frac{a(3a)^3}{12} = \frac{a^4}{12}(1+3+27)$$

$$I_x = \frac{31a^4}{12}$$

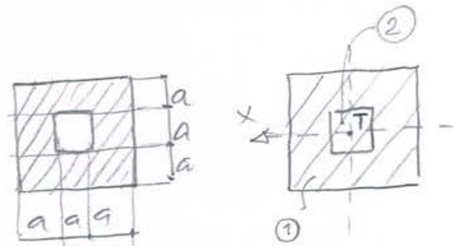
3



X-OSA JE OSA SIMETRIJE PA SE NA NJOJ MORA NALAZITI TEŽIŠTE TJ. X-OSA JE TEŽIŠNA OSA

$$I_x = \frac{2a \cdot (4a)^3}{12} + \frac{a(2a)^3}{12} = \frac{34a^4}{12}$$

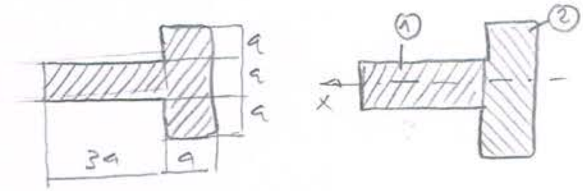
4



X-OSA JE OSA SIMETRIJE PA SE NA NJOJ MORA NALAZITI TEŽIŠTE TJ X-OSA JE TEŽIŠNA OSA

$$I_x = I_{x1} - I_{x2} = \frac{(3a)^4}{12} - \frac{a^4}{12} = \frac{81a^4}{12} - \frac{a^4}{12} = \frac{20a^4}{3}$$

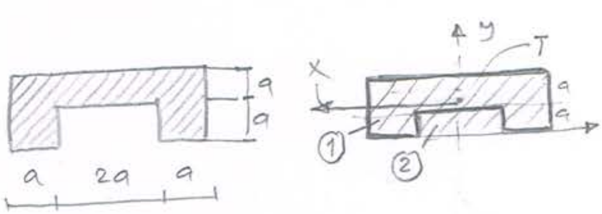
5



X-OSA JE TEŽIŠNA OSA

$$I_x = I_{x1} + I_{x2} = \frac{3a\,a^3}{12} + \frac{a(3a)^3}{12} = \frac{5a^4}{2}$$

6



Y-OSA JE TEŽIŠNA OSA

$x_T = 0.$

$$y_T = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2}$$

$A = 6a^2$

$A_1 = 8a^2$

$A_2 = -2a^2$

$$y_T = \frac{a \cdot 8a^2 + \frac{a}{2}(-2a^2)}{8a^2 - 2a^2} = \frac{7}{6}a$$

X-OSA JE TEŽIŠNA OSA

$$I_x = I_{\xi_1} + \eta_1^2 A_1 - \left(I_{\xi_2} + \eta_2^2 A_2\right)$$

$\eta_1 = -\frac{1}{6}a$

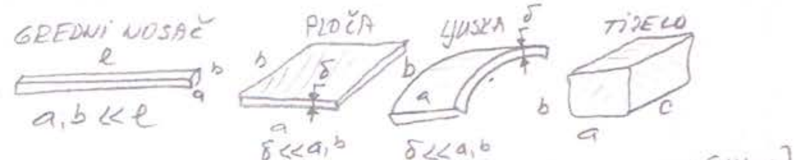
$$I_x = \frac{4a(2a)^3}{12} + \left(-\frac{1}{6}a\right)^2 8a^2 - \left(\frac{2a\,a^3}{12} + \left(-\frac{2a}{3}\right)^2 2a^2\right)$$

2. UNUTRAŠNJE SILE-NAPONI

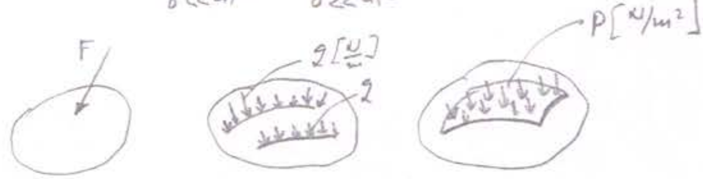
UVODNE NAPOMENE

OTPORNOST MATERIJALA JE DIO MEHANIKE DEFORMABILNOG TIJELA KOJI SE BAVI IZNALAŽENJEM I PROUČAVANJEM VEZE IZMEĐU DVIJE GRUPE PARAMETARA I TO: OBLIKA TIJELA, OPTEREĆENJA NA TIJELO I VRSTE MATERIJALA OD KOJEGA JE TIJELO IZRAĐENO, SA JEDNE STRANE I UNUTRAŠNJIH SILA-NAPONA I DEFORMACIJA TIJELA, SA DRUGE STRANE

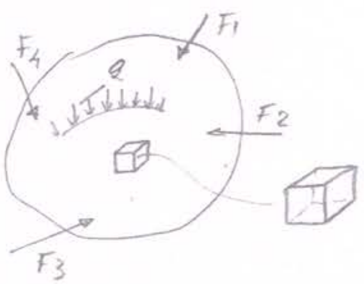
SMATRAĆEMO DA JE TIJELO KOJE POSMATRAMO: DEFORMABILNO, ELASTIČNO, HOMOGENO I DA IMA OBLIK GREDNOG NOSAČA. INAČE, **TIJELA PO SVOM OBLIKU** MOGU BITI U OBLIKU: GREDE (GREDNOG NOSAČA), PLOČE, LJUSKE I TRODIMENZIONALNOG TIJELA (SLIKA)

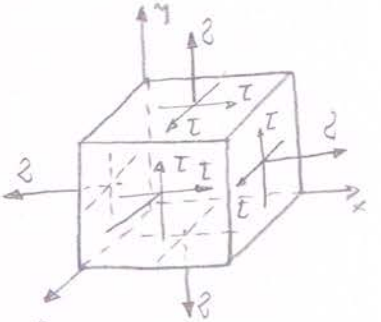


OPTEREĆENJE NA TIJELO TJ KONSTRUKCIJU MOŽE BITI: KONCENTRISANO, RASPOREĐENO PO LINIJI-KONTINUALNO (JEDNOLIKO ILI NEJEDNOLIKO), RASPOREĐENO PO POVRŠINI (JEDNOLIKO ILI NEJEDNOLIKO) KAO NA SLICI



POJAM I ANALIZA UNUTRAŠNJIH SILA - NAPONA

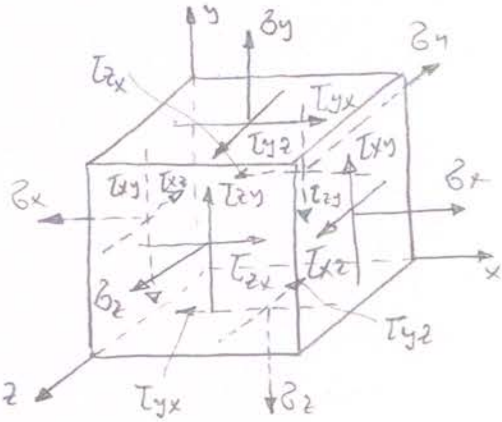




POD DEJSTVOM SPOLJAŠNJEG OPTEREĆENJA U UNUTRAŠNJOSTI TIJELA SE POJAVLJUJU UNUTRAŠNJE SILE KOJE DJELUJU IZMEĐU POJEDINIH DJELOVA I DJELIĆA TIJELA. DA BI TE UNUTRAŠNJE SILE UČINILI VIDLJIVIM, IZDVOJIĆEMO IZ TIJELA DJELIĆ U OBLIKU KVADRA MALIH DIMENZIJA (ELEMENTARNOG KVADRA) PA ĆEMO NA NJEGOVIM STRANICAMA PRIKAZATI UNUTRAŠNJE SILE (NAPONE) KOJE PREDSTAVLJAJU UTICAJ ODBAČENOG DIJELA TIJELA NA POSMATRANI DJELIĆ. TI UTICAJI SU KONTINUALNO (NEPREKIDNO) RASPOREĐENI PO STRANAMA KVADRA ŠTO ZNAČI DA IMAJU DIMENZIJU [SILA/POVRŠINA]. U PRINCIPU UNUTRAŠNJE SILE (NAPONI) MOGU BITI TROJAKI: NORMALNE NA ODGOVARAJUĆU STRANU KVADRA TJ NORMALNI NAPON σ (SIGMA) I MOGU LEŽATI U ODGOVARAJUĆIM STRANAMA KVADRA TJ TANGENCIJALNI NAPONI τ (TAU) KAO NA SLICI

DA BI NORMALNE NAPONE MEĐUSOBNO RAZLIKOVALI (JER NE MORAJU BITI MEĐUSOBNO ISTI) DODIJELIĆEMO IM INDEKSE KOJI OZNAČAVAJU PRAVCE

OSA KOORDINATNOG SISTEMA U KOJIMA SU USMJERENI. TAKO IMAMO NORMALNE NAPONE $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. DA BI TANGENCIJALNE NAPONE MEĐUSOBNO RAZLIKOVALI NIJE DOVOLJNO DA IM DODIJELIMO ISTE INDEKSE KAO ZA NORMALNE NAPONE (ODNOSE SE NA ISTU RAVAN) VEĆ IM MORAMO DODATI JOŠ PO JEDAN INDEKS KOJI ĆE IH MEĐUSOBNO RAZLIKOVATI, A KOJI OZNAČAVA PRAVAC KOORDINATNE OSE. TAKO IMAMO PAROVE TANGENCIJALNIH NAPONA: $\tau_{xy}; \tau_{xz}; \tau_{yx}, \tau_{yz}; \tau_{zx}, \tau_{zy}$.



S OBZIROM DA UNUTRAŠNJE SILE (NAPONI) MOGU IMATI DVA SMJERA VAŽI SLEDEĆI DOGOVOR (KONVENCIJA) ZA ZNAK NAPONA: ZA STRANE KVADRA ČIJA SE NORMALA POKLAPA SA POZITIVNIM SMJEROM JEDNE OD KOORDINATNIH OSA POZITIVNI SU ONI NAPONI ČIJI SE SMJEROVI POKLAPAJU SA POZITIVNIM SMJEROVIMA KOORDINATNIH OSA, A NEGATIVNI SU ONI ČIJI SU SMJEROVI SUPROTNI OD POZITIVNIH SMJEROVA KOORDINATNIH OSA. ZA STRANE KVADRA ČIJE SU NORMALE SUPROTNE OD POZITIVNIH SMJEROVA KOORDINATNIH OSA POZITIVNI SU ONI NAPONI ČIJI SU SMJEROVI SUPROTNI OD POZITIVNIH SMJEROVA KOORDINATNIH OSA, A NEGATIVNI SU ONI KOJI IMAJU SMJEROVE KOJI SE POKLAPAJU SA POZITIVNIM SMJEROVIMA KOORDINATNIH OSA. POZITIVNI NAPONI SU PRIKAZANI NA SLICI.

DAKLE, STANJE NAPONA - UNUTRAŠNJIH SILA NA STRANAMA PROIZVOLJNO UOČENOG DJELIĆA JE ODREĐENO SKUPOM OD SLEDEĆIH DEVET PODATAKA:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}$$

TAJ SKUP OD DEVET PODATAKA SE ZOVE TENZOR NAPONA. IMAJUĆI U VIDU DA DJELIĆ TIJELA MORA BITI U RAVNOTEŽI POD DEJSTVOM UNUTRAŠNJIH SILA NIJE TEŠKO DOKAZATI STAV O KONJUGOVANOSTI (PARNOSTI) TANGENCIJALNIH NAPONA KOJI GLASI DA SU TANGENCIJALNI NAPONI SA ISTIM INDEKSIMA NA RAZLIČITIM MJESTIMA (STRANAMA) ISTI TJ. $\tau_{xy}=\tau_{yx}$; $\tau_{xz}=\tau_{zx}$; $\tau_{yz}=\tau_{zy}$.

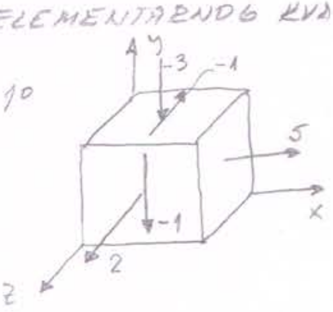
POŠTO JE DJELIĆ BESKONAČNO MALIH DIMENZIJA, RADI SE O TAČKI U REALNIM USLOVIMA TO SE MOŽE REĆI DA JE **NAPONSKO STANJE U TAČKI NEKOG OPTEREĆENOG TIJELA ODREĐENO SA ŠEST PODATAKA**: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$.

$\boxed{\text{PRIMJER}}$ STANJE UNUTRAŠNJIH SILA (NAPONA) U DJELIĆU (TAČKI) OPTEREĆENOG TIJELA ODREĐENO JE SLEDEĆIM TENZORIMA NAPONA.

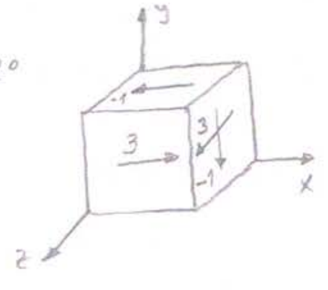
$$1^\circ \begin{Bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{Bmatrix} \quad 2^\circ \begin{Bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad 3^\circ \begin{Bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

PRIKAZATI UNUTRAŠNJE SILE NA STRANAMA DJELIĆA TIJELA U OBLIKU ELEMENTARNOG KVADRA

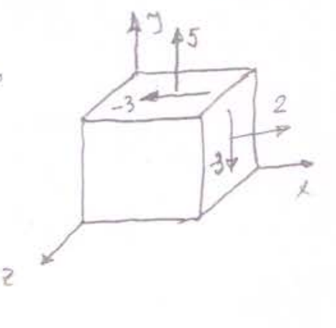
1°



2°



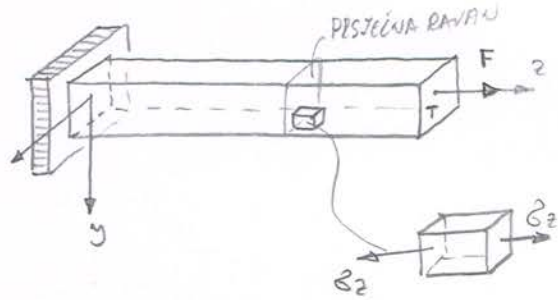
3°



3. ELEMENTARNE TEORIJE NAPREZANJA GREDNIH NOSAČA

1. AKSIJALNO NAPREZANJE

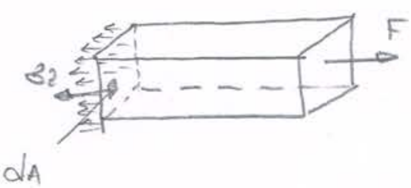
AKSIJALNO NAPREZANJE JE TAKVA VRSTA NAPREZANJA GREDNOG NOSAČA KADA OPTEREĆENJE DJELUJE U PRAVCU UZDUŽNE TEŽIŠNE OSE GREDNOG NOSAČA.



KOD PROIZVOLJNO UOČENOG DJELIĆA UNUTAR GREDE OD KOMPONENATA TENZORA NAPONA POJAVLJUJE SE SAMO NORMALNI NAPON σ_z - U PRAVCU UZDUŽNE z-OSE.
SVE OSTALE KOMPONENTE TENZORA NAPONA SU JEDNAKE NULI

NAPONI σ_x i σ_y SU JEDNAKI NULI JER NEMA BOČNIH PRITISAKA NA POSMATRANI DJELIĆ A TANGENCIJALNI NAPONI SU JEDNAKI NULI JER NEMA PROMJENE PRAVIH UGLOVA IZMEĐU STRANA KVADRA, DO ČEGA DOVODI POSTOJANJE TANGENCIJALNIH NAPONA.

VEZA IZMEĐU NORMALNOG NAPONA I SPOLJAŠNJEG OPTEREĆENJA



U POPREČNOM PRESJEKU U KOME SE NALAZI STRANA POSMATRANOG DJELIĆA (KVADRA) PO POVRŠINI dA DJELUJE σ_z.
POŠTO SE DJELIĆ NALAZI U MIROVANJU VAŽI:

$$\int_A \sigma_z \, dA = F,$$

A POŠTO JE σ_z ISTI U SVAKOJ TAČKI POPREČNOG PRESJEKA (ZA HOMOGENI MATERIJAL) TJ. POŠTO JE $\sigma_z = const$ VAŽI:

$$\sigma_z \cdot \int_A dA = F \; ; \quad \sigma_z \cdot A = F \; , \quad \sigma_z = \frac{F}{A}$$

POD DEJSTVOM SILE F ŠTAP SE IZDUŽI ZA Δl PA JE

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta l}{l}$$ - RELATIVNO IZDUŽENJE TJ. LINIJSKA DEFORMACIJA

EKSPERIMENTALNO JE UTVRĐENA VEZA IZMEĐU NAPONA I DEFORMACIJA KOD AKSIJALNOG NAPREZANJA:

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z$$

; E - MODUO ELASTIČNOSTI - KOEFICIJENT PROPORCIONALNOSTI KOJI ZAVISI OD VRSTE MATERIJALA (ZA ČELIK JE $E = 2 \cdot 10^4 \, kN/cm^2$)

DOBIJA SE

$$\Delta l = \varepsilon_z \cdot l = \frac{\sigma_z}{E} \cdot l \Rightarrow \Delta l = \frac{Fl}{EA}$$

Δl - IZDUŽENJE ŠTAPA DUŽINE l

F - SILA KOJA AKSIJALNO OPTEREĆUJE GREDU, KOJA SE NE MIJENJA PO DUŽINI l

E - MODUO ELASTIČNOSTI, KOJI JE ISTI PO DUŽINI GREDE l

A - POVRŠINA POPREČNOG PRESJEKA GREDE, KOJA SE NE MIJENJA PO DUŽINI l

DIMENZIONISANJE GREDNOG NOSAČA

DA NE BI DOŠLO DO LOMA GREDE-ŠTAPA POD DEJSTVOM AKSIJALNE SILE NEOPHODNO JE DA MAKSIMALNI NAPON U ŠTAPU $\sigma_{z\,max}$ BUDE MANJI OD ZA TAJ MATERIJAL GREDE PROPISANOG DOZVOLJENOG NAPONA σ_{doz} TJ MORA DA VAŽI:

$$\sigma_{z\,max} \leq \sigma_{doz}$$

DORVOLJENI NAPON JE VELIČINA KOJA SE ZNA ZA POZNATU VRSTU MATERIJALA OD KOJEG JE GREDA NAPRAVLJENA.

AKO SE ŠTAP DUŽINE l ZAGRIJE ZA TEMPERATURU $\Delta t [^\circ C]$ ON ĆE SE IZ RAZLOGA POVEĆANE TEMPERATURE IZDUŽITI ZA $\Delta l_t = \alpha \cdot l \cdot \Delta t$, GDJE JE α - KOEFICIJENT TEMPERATURNOG ŠIRENJA - TJ. PROMJENE DUŽINE I ON JE POZNATA VELIČINA ZA ODREĐENI MATERIJAL.

UKUPNO IZDUŽENJE ŠTAPA SE SASTOJI OD IZDUŽENJA ŠTAPA USLED OPTEREĆENJA (AKSIJALNE SILE) I IZDUŽENJA ŠTAPA USLED TEMPERATURE, TJ

$$\Delta l_{uk} = \frac{Fl}{EA} + \alpha \cdot l \, \Delta t$$

$\boxed{\text{PRIMJER}}$ ZA ŠTAPOVE ① I ② MEĐUSOBNO I SA POSTOLJEM SPOJENE KAO NA SLICI:

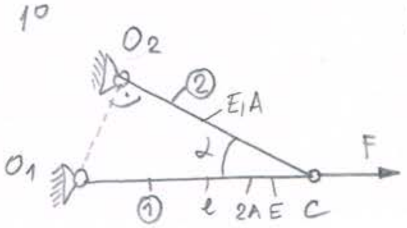
a) ODREDITI SILE U ŠTAPOVIMA

b) UTVRDITI U KOM ŠTAPU SE POJAVLJUJE MAKSIMALNI NAPON

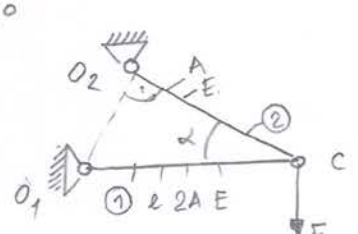
c) ODREDITI POMJERANJE TAČKE C, NAPADNE TAČKE SILE F, U HORIZONTALNOM I VERTIKALNOM PRAVCU U ODNOSU NA POČETNI POLOŽAJ DO KOGA DOLAZI ZBOG IZDUŽENJA I SKRAĆENJA ŠTAPOVA I NACRTATI NOVI POLOŽAJ TAČKE C, POSLE DEFORMISANJA.

POZNATO JE: F, l, E, A, α

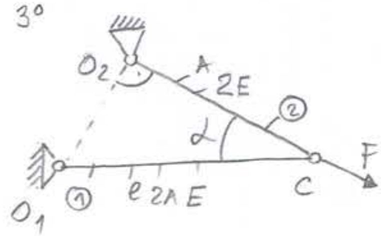
1°



2°



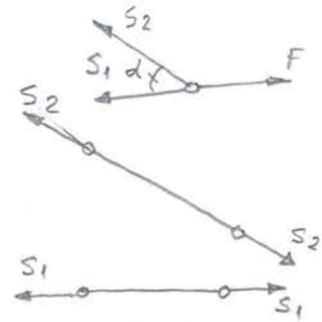
3°



1° SILE U ŠTAPOVIMA ① i ② ODREĐUJEMO IZ USLOVA RAVNOTEŽE ZA SISTEM OD

a) TRI SUČELJNE SILE S_1, S_2 i F KOJE DJELUJU NA ČVOR C KOJI JE U RAVNOTEŽI (STANJU MIROVANJA), PA JE

$$\left.\begin{array}{ll} \Sigma F_H = 0 & F - S_1 - S_2 \cos\alpha = 0 \\ \Sigma F_V = 0 & S_2 \sin\alpha = 0 \Rightarrow \underline{S_2 = 0} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{S_1 = F}$$



NA ŠTAPOVE ① i ② DEJSTVUJU SILE S_1 i S_2 SUPROTNIH SMJEROVA OD SMJEROVA SILA OD SMJEROVA SILA KOJE DJELUJU NA ČVOR C. DAKLE, POD DEJSTVOM SILE S_1 ŠTAP ① JE IZDUŽUJE A ŠTAP ② SE SKRAĆUJE JER JER JE OPTEREĆEN NA PRITISAK.

b) NORMALNI NAPONI U ŠTAPOVIMA ① i ② SU

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{2A} = \frac{F}{2A} \quad ; \quad \sigma_2 = \frac{S_2}{A} = 0$$

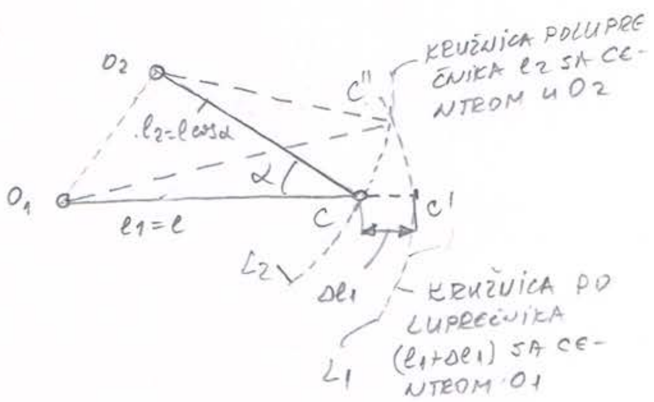
DAKLE ŠTAP ② NIJE OPTEREĆEN, DOK JE NAPON U ŠTAPU ①: $\sigma_1 = \frac{F}{2A}$, GDJE JE 2A POPREČNI PRESJEK ŠTAPU ②. DAKLE, $\sigma_{max} = \sigma_1$

c) ŠTAP ① SE IZDUŽUJE ZA Δl_1:

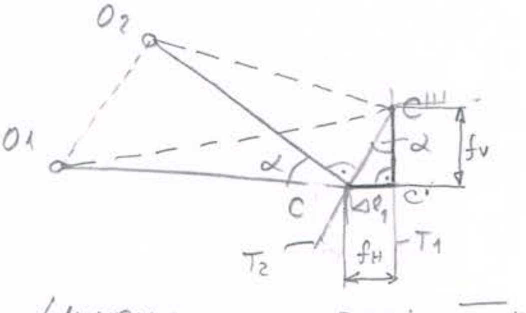
$$\Delta l_1 = \frac{S_1 \cdot l}{E \cdot 2A} = \frac{F \cdot l}{2EA}$$

ŠTAP ② ĆE OSTATI NEDEFORMISAN JER JE $\Delta l_2 = 0$ $\left(\Delta l_2 = \frac{S_2 \cdot l\cos\alpha}{EA} = 0\right)$

IMAJUĆI U OBZIR DA SE ŠTAP ① IZDUŽUJE, A DA SE ŠTAPU ② NIJE PROMIJENILA DUŽINA POLOŽAJ ŠTAPOVA POSLE DEFORMISANJA PRIKAZAN JE ISPREKIDANIM LINIJAMA.



ZA MALA IZDUŽENJA (SKRAĆENJA) I ZA MALE UGLOVE OBRTANJA ŠTAPOVA TJ. ZA MALE DUŽINE LUKOVA $\overline{CC''}$, $\overline{C'C''}$ LUKOVI SE MOGU APROKSIMIRATI TANGENTAMA KROZ TAČKU C SA ZANEMARLJIVIM GREŠKAMA, PA SE NAKON APROKSIMACIJA POLOŽAJ TAČKE C U DEFORMISANOM POLOŽAJU (TAČKA C''') DOBIJA NA PRESJEKU TANGENTI T_1 I T_2 KROZ C I C'. TAČKA C''' ZANEMARLJIVO ODSTUPA OD POLOŽAJA TAČKE C''.



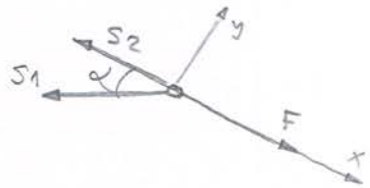
IZ $\Delta CC'C''' \Rightarrow f_{CH} = \overline{CC'} = \Delta l_1 = \frac{S_1 \cdot l}{EA} = \frac{F \cdot l}{EA}$

$$f_{CV} = \overline{C'C'''} = \frac{\overline{CC'}}{tg\alpha} = \frac{Fl}{EA\, tg\alpha}$$

UKUPNO POMJERANJE $\overline{CC'''} = \sqrt{f_{CH}^2 + f_{CV}^2} = \frac{Fl}{EA}\sqrt{1 + \frac{1}{tg^2\alpha}}$

2° IZ RAVNOTEŽE ČVORA C DOBIJA SE:

a)



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow S_1 \cdot \sin\alpha = 0 \qquad S_1 = 0$

$\Sigma F_x = 0 \qquad F - S_2 = 0 \qquad S_2 = F$

ŠTAP ② JE OPTEREĆEN NA ISTEZANJE A ŠTAP ① JE NEOPTEREĆEN JER JE $S_1 = 0$

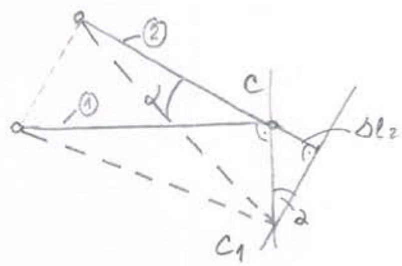
b) $\sigma_2 = \frac{S_2}{A} = \frac{F}{A}$; $\sigma_1 = \frac{S_1}{2A} = 0$

MAKSIMALNI NAPON JE U ŠTAPU ② $\sigma_{max} = \sigma_2$.

c) IZDUŽENJA, SKRAĆENJA ŠTAPOVA SU:

$\Delta l_1 = \frac{S_1 \cdot l}{E2A} = 0$

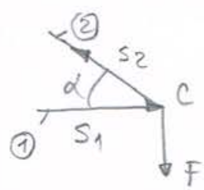
$\Delta l_2 = \frac{S_2 \cdot l}{EA} = \frac{F \cdot l}{EA}$



$f_{CH} = 0$

$f_{CV} = \overline{CC_1} = \frac{\Delta l_2}{\sin\alpha} = \frac{Fl}{EA \sin\alpha}$

3° a) SILE U ŠTAPOVIMA:



$\Sigma F_H = 0 \qquad S_1 - S_2 \cos\alpha = 0$

$\Sigma F_V = 0 \qquad S_2 \sin\alpha - F = 0 \Rightarrow S_2 = \frac{F}{\sin\alpha}$

$S_1 = S_2 \cos\alpha = F \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{F}{tg\alpha}$

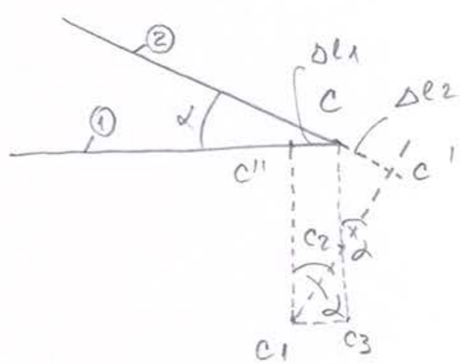
ŠTAP ① SE SKRAĆUJE A ŠTAP ② SE IZDUŽUJE

b) $\sigma_2 = \frac{S_2}{A} = \frac{F}{A \sin\alpha}$; $\sigma_1 = \frac{S_1}{2A} = \frac{F \cdot \cos\alpha}{2 \sin\alpha \cdot A} = \frac{F}{A \sin\alpha} \frac{\cos\alpha}{2} < \frac{F}{A \sin\alpha} = \sigma_2$

$\sigma_{max} = \sigma_2 = \frac{F}{\sin\alpha} \frac{\cos\alpha}{2A}$

JER JE $\cos\alpha \leq 1$

c)



$f_H = \overline{CC''} = \Delta l_1 = \frac{S_1 \cdot l}{E2A} = \frac{F \cos\alpha \, l}{2EA \sin\alpha}$

$f_V = \overline{CC'''} = \overline{CC_2} + \overline{C_2C_3}$

$f_V = \frac{\Delta l_2}{\sin\alpha} + \frac{\Delta l_1}{tg\alpha} =$

$f_V = \frac{F \, l \cos\alpha}{\sin\alpha \, 2EA \sin\alpha} + \frac{F \cos\alpha \, l}{2EA \sin\alpha \cdot tg\alpha}$

$f_V = \frac{F l \cos\alpha}{2 \cdot EA \sin^2\alpha} (1 + \cos\alpha)$

$f = \sqrt{f_H^2 + f_V^2} = \sqrt{\left(\frac{F \cos\alpha}{2EA \sin\alpha}\right)^2 + \left(\frac{F l \cos\alpha}{2EA \sin^2}(1 + \cos\alpha)\right)^2}$

$\boxed{\text{ZADATAK}}$

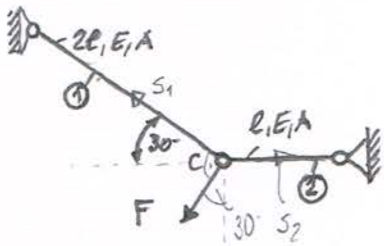
ZA SISTEM ŠTAPOVA PRIKAZAN NA SLICI NAĆI:

a) SILE U ŠTAPOVIMA I IZDUŽENJA/SKRAĆENJA ŠTAPOVA

b) ODREDITI NOVI POLOŽAJ TAČKE C, TJ. HORIZONTALNO I VERTIKALNO POMJERANJE

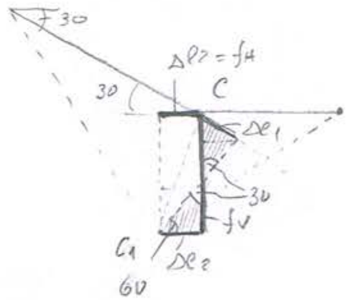
POZNATO JE: F, l, E, A

1°



$\Sigma F_V=0 \quad S_1\cdot\frac{1}{2} - F\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0 \quad \underline{S_1=F\sqrt{3}}$

$\Sigma F_H=0 \quad S_2 - F\cdot\frac{1}{2} - S_1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0 \quad S_2=\frac{F}{2}+F\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{2F=S_2}$



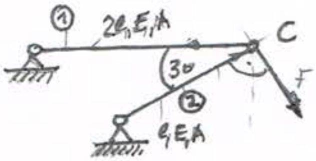
$\Delta l_1=\frac{S_1 2l}{EA}=\frac{2Fl\sqrt{3}}{EA}$

$\Delta l_2=\frac{S_2\cdot l}{EA}=\frac{2Fl}{EA}$

$f_{CH}=\Delta l_2$

$f_{CV}=\frac{\Delta l_1}{\sin 30}+\frac{\Delta l_2}{tg 30}$

2°

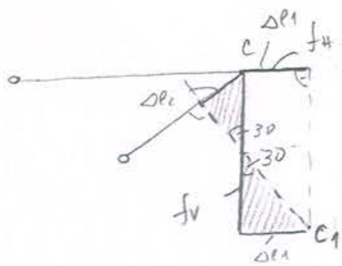


$\Sigma F_V=0 \quad S_2\cdot\frac{1}{2} - F\frac{\sqrt{3}}{2}=0 \quad \underline{S_2=F\sqrt{3}}$

$\Sigma F_H=0 \quad -S_1+S_2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{F}{2}=0 \quad S_1=S_2\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{F}{2}=\underline{2F=S_1}$

$\Delta l_1=\frac{2F\cdot 2l}{EA}=\frac{4Fl}{EA}$

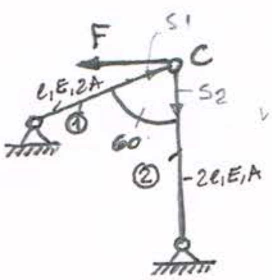
$\Delta l_2=\frac{F\sqrt{3}\cdot l}{EA}$



$f_H=\Delta l_1$

$f_V=2\cdot\Delta l_2+\frac{\Delta l_1}{tg 30}$

3°

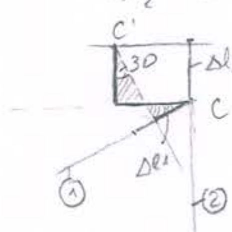


$\Sigma F_H=0 \quad S_1\frac{\sqrt{3}}{2}-F=0 \quad S_1=\frac{2F}{\sqrt{3}}=\frac{2F\sqrt{3}}{3}$

$\Sigma F_V=0 \quad S_1\frac{1}{2}-S_2=0 \quad S_2=\frac{S_1}{2}=\frac{2F\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2} \quad S_2=\frac{F\sqrt{3}}{3}$

$\Delta l_1=\frac{2F\sqrt{3}}{3}\frac{l}{E\cdot 2A} \quad \Delta l_1=\frac{Fl\sqrt{3}}{3EA}$

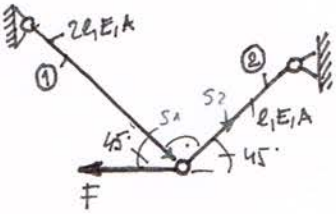
$\Delta l_2=\frac{F\sqrt{3}}{3}\frac{2l}{EA} \quad \Delta l_2=\frac{2Fl\sqrt{3}}{3EA}$



$f_V=\Delta l_2$

$f_H=\Delta l_2\cdot tg 30+\frac{\Delta l_1}{\cos 30}$

4°

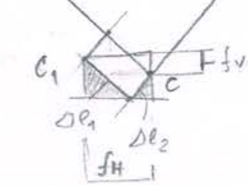


$\Sigma F_V=0 \quad -S_1\frac{\sqrt{2}}{2}+S_2\frac{\sqrt{2}}{2}=0 \Rightarrow S_1=S_2$

$\Sigma F_H=0 \quad -F+S_1\frac{\sqrt{2}}{2}+S_2\frac{\sqrt{2}}{2}=0 \quad S_1=S_2=\frac{F}{\sqrt{2}}=\frac{F\sqrt{2}}{2}$

$\Delta l_1=\frac{F\sqrt{2}}{2}\frac{2l}{EA}=\frac{Fl\sqrt{2}}{EA}$

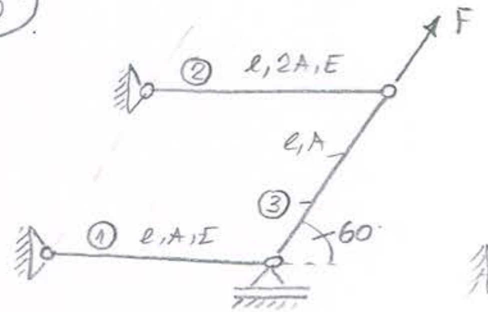
$\Delta l_2=\frac{F\sqrt{2}}{2}\frac{l}{EA}$

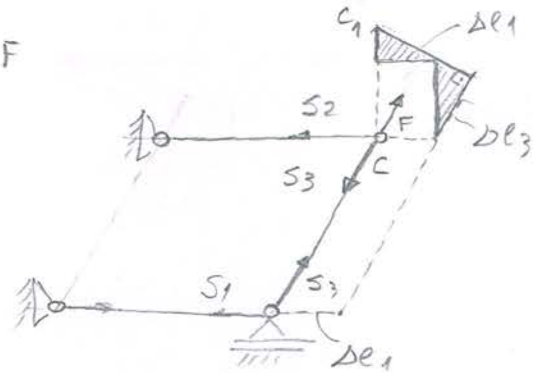


$f_H=\frac{\Delta l_1}{\sqrt{2}}+\frac{\Delta l_2}{\sqrt{2}}$

$f_V=\frac{\Delta l_1}{\sqrt{2}}-\frac{\Delta l_2}{\sqrt{2}}$

5°



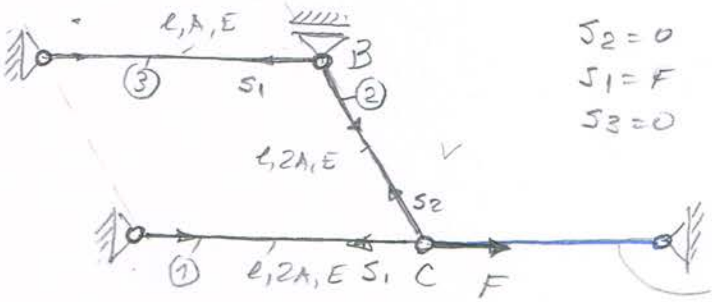


$S_2 = 0$
$S_3 = F$
$S_1 = S_3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{F}{2}$

$\Delta l_2 = 0$
$\Delta l_3 = \frac{Fl}{EA}$ (izduženje)
$\Delta l_1 = \frac{F}{2} \frac{l}{EA}$ (izduženje)

$f_H = 0$
$f_V = \frac{\Delta l_3}{\cos 30} + \Delta l_1 tg30$
$f_V = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{Fl}{EA} + \frac{F}{2} \frac{l}{EA} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{7\sqrt{3}}{6} \frac{Fl}{EA}$

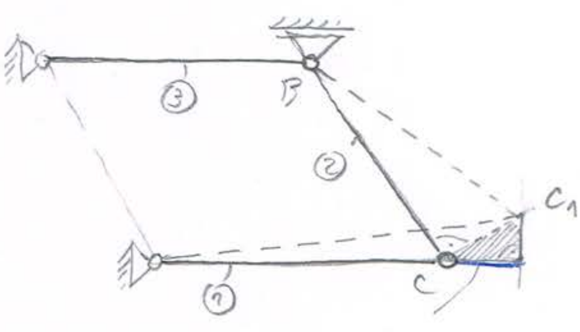
6°



$S_2 = 0$
$S_1 = F$
$S_3 = 0$

① - izduženje $\Delta l_1 = \frac{S_1 l}{E2A}$
$\Delta l_1 = \frac{Fl}{2EA}$
②, ③ - ne deformišu se!

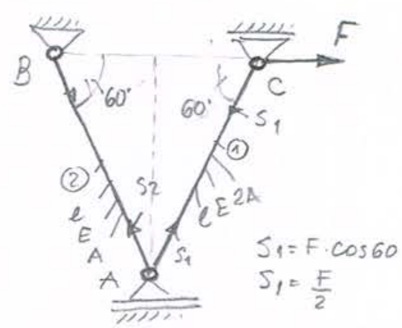
skraćenje ① 2A $\Delta l_1 = \frac{S_1 l}{2EA}$



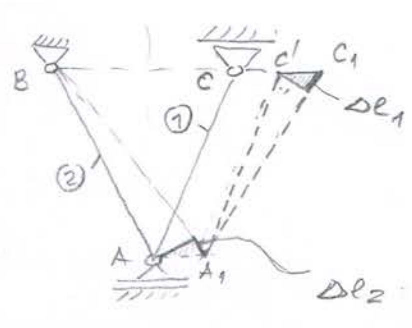
B se ne pomjera!
BC rotira!

$f_H = \Delta l_1$
$f_V = \Delta l_1 \cdot tg30 = \frac{F \cdot l}{2EA} \frac{\sqrt{3}}{3}$

7°



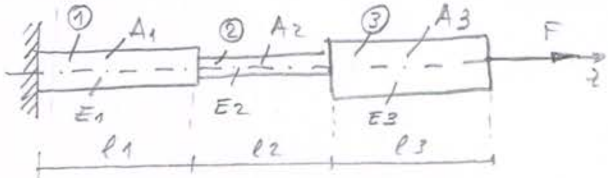
$S_1 = F \cdot \cos 60$
$S_1 = \frac{F}{2}$



$f_{cv} = 0$
$f_{cH} = \overline{CC_1} = \overline{CC'} + \overline{C'C_1}$
$f_{cH} = \frac{\Delta l_2}{\sin 30} + \frac{\Delta l_1}{\sin 30}$
$f_{cH} = 2\Delta l_2 + 2\Delta l_1$
$\overline{AA_1} = 2\Delta l_2$
$\overline{CC'} = \overline{AA_1}$

$S_2 = S_1 = \frac{F}{2}$ štap ① se isteže i štap ② se isteže $\overline{C'C} = \Delta l_1$

Pod štapom - **gredom promjenjivog presjeka** podrazumijeva se gredni nosač kod koga se površina poprečnog presjeka mijenja po dužini grednog nosača. Ako je na dužini grednog nosača površina poprečnog presjeka A_1, na dužini l_2 A_2, na dužini l_3, A_3, ... za pojedine djelove grednog nosača (slika) važi:



$$\sigma_z^{(1)} = \frac{F}{A_1}\ ;\quad \sigma_z^{(2)} = \frac{F}{A_2}\ ;\quad \sigma_z^{(3)} = \frac{F}{A_3}$$

$$\Delta l_{uk} = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3$$

$$\Delta l_{uk} = \frac{F l_1}{E_1 A_1} + \frac{F l_2}{E_2 A_2} + \frac{F l_3}{E_3 A_3}$$

Ukoliko na gredni nosač djeluje više sila onda se naponi u pojedinim djelovima štapa i ukupno izduženje štapa određuju tako što se izračunavaju za svaku silu posebno pa se, zatim, dobijene vrijednosti saberu:

$$\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(1)F_1} + \sigma_z^{(2)F_2} + \sigma_z^{(3)F_3} + \dots$$

$$\sigma_z^{(2)} = \sigma_z^{(1)F_1} + \sigma_z^{(2)F_2} + \sigma_z^{(3)F_3} + \dots$$

$$\Delta l_{uk} = \Delta l_{uk}^{(1)F_1} + \Delta l_{uk}^{(2)F_2} + \Delta l_{uk}^{(3)F_3} + \dots$$

Ako se gredni nosač zagrije za temperaturu Δt (°C) doći će do izduženja grednog nosača za Δl_t:

$\Delta l_t = \alpha \cdot \Delta t$; α - koeficijent toplotnog širenja

PRIMJER

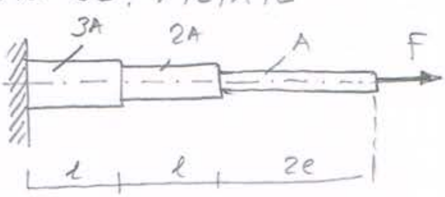
Za gredni nosač stepenastog poprečnog presjeka, koji je opterećen kao na slici odrediti:

a) napone u pojedinim djelovima nosača i maksimalni napon;

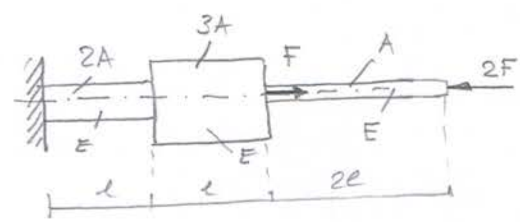
b) ukupno izduženje nosača

Dato je: F, l, A, E

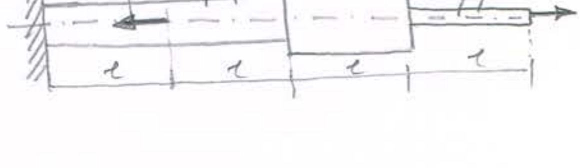
1°



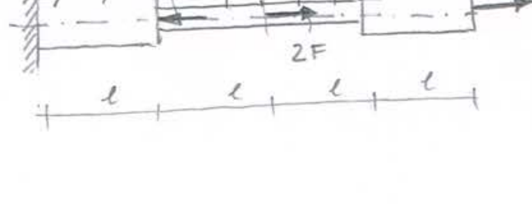
2°



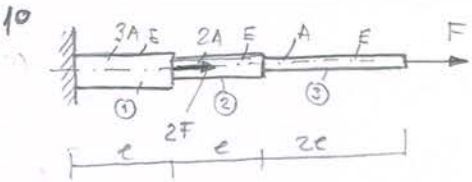
3°



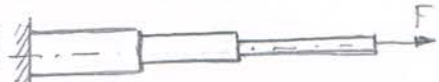
4°



1°



1)

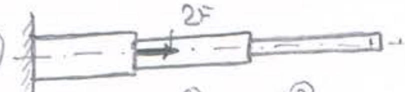


$\sigma_z^{(1)} = \frac{F}{3A}$; $\sigma_z^{(2)} = \frac{F}{2A}$; $\sigma_z^{(3)} = \frac{F}{A}$

$\Delta l^{(1)} = \frac{Fl}{E3A}$; $\Delta l^{(2)} = \frac{F\cdot l}{E2A}$; $\Delta l^{(3)} = \frac{F\cdot 2l}{EA}$

$\Delta l^{(1)}_{uk} = \frac{Fl}{E3A} + \frac{F\cdot l}{E2A} + \frac{2Fl}{EA} = \frac{17Fl}{6EA}$

2)



$\sigma_z^{(1)} = \frac{2F}{3A}$; $\sigma_z^{(2)} = 0$ $\sigma_z^{(3)} = 0$

$\Delta l^{(1)} = \frac{2F\cdot l}{E3A}$; $\Delta l^{(2)} = 0$ $\Delta l^{(3)} = 0$

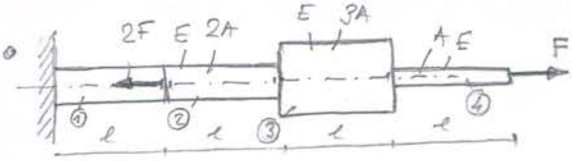
$\Delta l_{uk} = \frac{2Fl}{3EA}$

a) $\left.\begin{aligned} \sigma_z^{(1)} &= \frac{F}{3A} + \frac{2F}{3A} = \frac{F}{A} \\ \sigma_z^{(2)} &= \frac{F}{2A} + 0 = \frac{F}{2A} \\ \sigma_z^{(3)} &= \frac{F}{A} + 0 = \frac{F}{A} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sigma_{max} = \frac{F}{A}$

b) $\Delta l_{uk} = \Delta l_{uk}^{(1)} + \Delta l_{uk}^{(2)}$

$\Delta l_{uk} = \frac{17Fl}{6EA} + \frac{2Fl}{3EA} = \frac{21}{6}\frac{Fl}{EA}$

2°



a) $\sigma_z^{(1)} = \frac{F}{2A} - \frac{2F}{2A} = \frac{-F}{2A}$; $\sigma_z^{(2)} = \frac{F}{2A}$; $\sigma_z^{(3)} = \frac{F}{3A}$; $\sigma_z^{(4)} = \frac{F}{A}$

$\sigma_{z\,max} = \frac{F}{A}$ NA DIJELU (4)

b) $\Delta l_{uk} = \Delta l_{uk}^{F} + \Delta l_{uk}^{-2F}$

$\Delta l_{uk}^{F} = \frac{F\cdot 2l}{E\cdot 2A} + \frac{F\cdot l}{E3A} + \frac{F\cdot l}{EA} = \frac{Fl}{EA}\left(2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}\frac{Fl}{EA}$

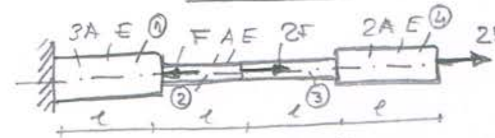
$\Delta l_{uk}^{2F} = -\frac{2F\cdot l}{E2A} = -\frac{Fl}{EA}$

$\Delta l_{uk} = \frac{5}{3}\frac{Fl}{EA} - \frac{Fl}{EA} = \frac{Fl}{EA}\left(\frac{5}{3} - 1\right) = \frac{2Fl}{3EA}$

3° **R:** $\sigma_z^{(1)} = -\frac{F}{A}$; $\sigma_z^{(2)} = -\frac{F}{3A}$; $\sigma_z^{(3)} = -\frac{2F}{A}$; $\sigma_{z\,max} = -\frac{2F}{A}$

$\Delta l_{uk}^{2F} = -\frac{17Fl}{3A}$; $\Delta l_{uk}^{F} = \frac{5Fl}{6EA}$; $\Delta l_{uk} = -\frac{29}{6}\frac{Fl}{EA}$

4°



a) $\sigma_z^{(1)} = \frac{F}{3A}(2+2-F) = \frac{F}{A}$; $\sigma_z^{(2)} = \frac{F}{A}(2+2) = \frac{4F}{A}$

$\sigma_z^{(3)} = \frac{2F}{A}$; $\sigma_z^{(4)} = \frac{2F}{2A} = \frac{F}{A}$ $\sigma_{z\,max} = \sigma_z^{(2)} = \frac{4F}{A}$

b) $\Delta l_{uk} = \Delta l_{uk}^{2F} + \Delta l_{uk}^{2F} + \Delta l_{uk}^{F}$

$\Delta l_{uk} = \frac{2F\cdot l}{E3A} + \frac{2F\cdot 2l}{E\cdot A} + \frac{2F\cdot l}{E2A} + \frac{2Fl}{E3A} + \frac{2F\cdot l}{EA} - \frac{Fl}{E\cdot 3A}$

$\Delta l_{uk} = \frac{Fl}{EA}\left(\frac{2}{3} + 4 + 1 + \frac{2}{3} + 2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{8Fl}{EA}$

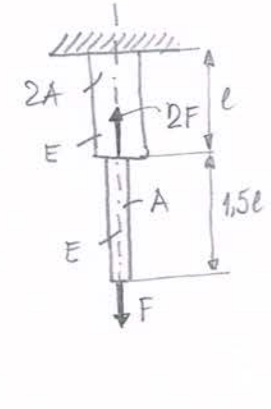
ZADATAK

ZA GREDNI NOSAČ STEPENASTOG POPREČNOG PRESJEKA, KOJI JE OPTEREĆEN KAO NA SLICI, ODREDITI:

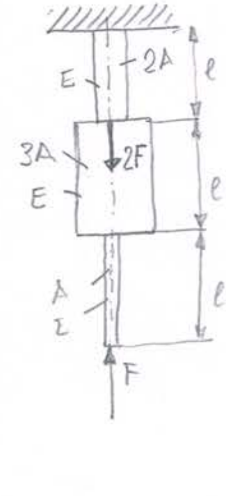
a) NAPONE U POJEDINIM DJELOVIMA NOSAČA I MAKSIMALNI NAPON

b) UKUPNO IZDUŽENJE NOSAČA

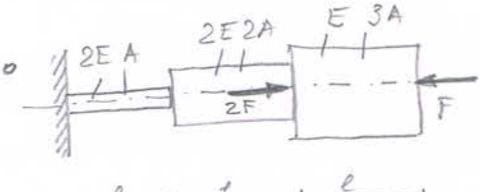
1°



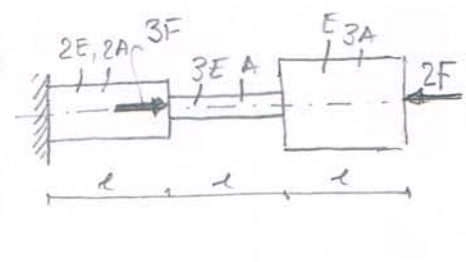
2°



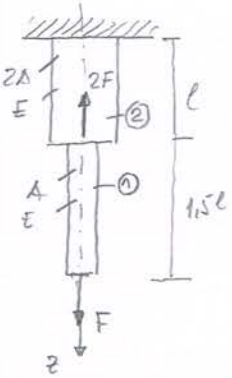
3°



4°



1°



a) $\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{F} + \sigma_z^{2F} = \frac{F}{A} + 0 = \frac{F}{A}$

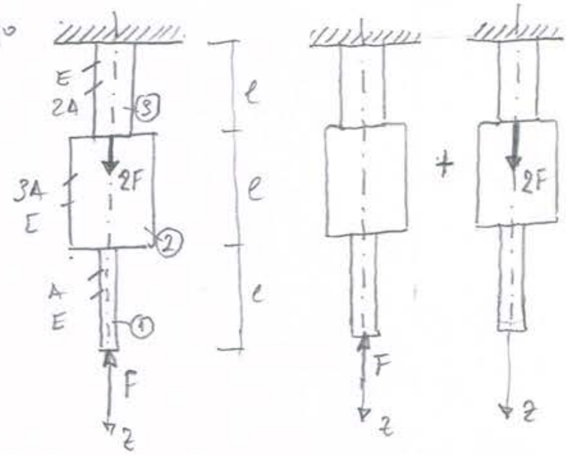
$\sigma_z^{(2)} = \sigma_z^{F} + \sigma_z^{2F} = \frac{F}{2A} - \frac{2F}{2A} = -\frac{F}{A}$

$\Bigg\}\ \sigma_{max} = \sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)} = \frac{F}{A}$

b) $\Delta l_{uk} = \Delta l_{uk}^{(1)} + \Delta l_{uk}^{(2)} = \Delta l_{uk}^{(1),F} + \Delta l_{uk}^{(1),2F} + \Delta l_{uk}^{(2),F} + \Delta l_{uk}^{(2),2F}$

$\Delta l_{uk} = \frac{F\cdot 3l}{2\cdot E\cdot A} + 0 + \frac{Fl}{E2A} - \frac{2F\cdot l}{E2A} = \frac{F\cdot l}{EA}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 1\right) = \frac{Fl}{EA}$

2°



a) $\sigma_z^{(1),F} = \frac{-F}{A}$; $\sigma_z^{(2),F} = -\frac{2F}{3A}$; $\sigma_z^{(3),F} = \frac{-F}{2A}$

$\sigma_z^{(1),2F} = 0$; $\sigma_z^{(2),2F} = 0$; $\sigma_z^{(3),2F} = \frac{2F}{2A} = \frac{F}{A}$

$\sigma_z^{(1)} = -\frac{F}{A} + 0 = -\frac{F}{A}$; $\sigma_z^{(2)} = -\frac{2F}{3A} + 0 = -\frac{2F}{3A}$

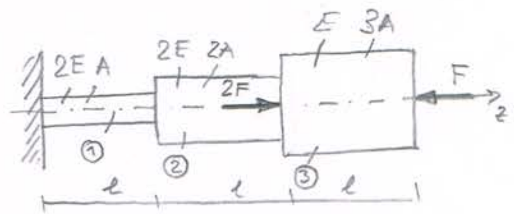
$\sigma_z^{(3)} = -\frac{F}{2A} + \frac{2F}{3A} = \frac{F}{6A}$ $\qquad \sigma_{z\,max} = \sigma_z^{(1)} = \frac{F}{A}$

b) $\Delta l^{(1),F} = \frac{-F\cdot l}{EA}$ $\qquad \Delta l^{(2),F} = \frac{-F\cdot l}{E\cdot 3A}$ $\qquad \Delta l^{(3),F} = \frac{-F\cdot l}{E2A}$

$\Delta l^{(1),2F} = 0$ $\qquad \Delta l^{(2),2F} = 0$ $\qquad \Delta l^{(3),2F} = \frac{2F\cdot l}{E\cdot 2A}$

$\Delta l_{uk} = -\frac{Fl}{EA} - \frac{Fl}{3EA} - \frac{Fl}{2EA} + 0 + 0 + \frac{2Fl}{2EA} = \frac{Fl}{EA}\left(-1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1\right) = -\frac{5}{6}\frac{Fl}{EA}$

3°



a) $\sigma_z^{(1)} = \frac{-F}{A} + \frac{2F}{2A} = 0$

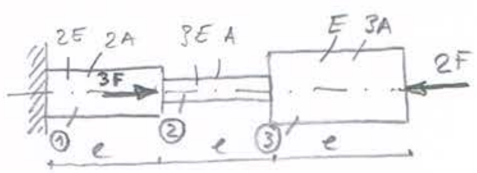
$\sigma_z^{(2)} = \frac{-F}{2A} + \frac{2F}{2A} = \frac{F}{2A}$ $\qquad \sigma_{max} = \sigma_z^{(2)} = \frac{F}{2A}$

$\sigma_z^{(3)} = \frac{-F}{3A}$

b) $\Delta l^{(1)} = \frac{-F\cdot l}{2E\cdot A} + \frac{2F\cdot l}{2EA} = \frac{Fl}{2EA}$; $\Delta l^{(2)} = \frac{-Fl}{2E\cdot 2A} + \frac{2F\cdot l}{2E\cdot 2A} = \frac{Fl}{4EA}$

$\Delta l^{(3)} = \frac{-F\cdot l}{E3A} \Rightarrow \Delta l_{uk} = \Delta l^{(1)} + \Delta l^{(2)} + \Delta l^{(3)} = \frac{Fl}{EA}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{7Fl}{12EA}$

4°



a) $\sigma^{(1)} = \frac{-2F}{2A} + \frac{3F}{2A} = \frac{F}{2A}$

$\sigma^{(2)} = \frac{-2F}{A}$ $\qquad \Rightarrow \sigma_{max} = \sigma^{(2)} = -\frac{2F}{A}$

$\sigma^{(3)} = \frac{2F}{3A}$

b) $\Delta l^{(1)} = \frac{-2Fl}{2E\cdot 2A} + \frac{3Fl}{2E\cdot 2A} = \frac{Fl}{4EA}$

$\Delta l^{(2)} = \frac{-2Fl}{3EA}$

$\Delta l^{(3)} = \frac{2Fl}{E\cdot 3A}$

$\Rightarrow \Delta l_{uk} = \Delta l^{(1)} + \Delta l^{(2)} + \Delta l^{(3)}$

$\Delta l_{uk} = \frac{Fl}{EA}\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) = \frac{Fl}{4EA}$