3.2 MJERE DISPERZIJE NEGRUPISANIH PODATAKA

- Interval varijacije (razmak varijacije)
- Varijansa i standardna devijacija
- Parametri osnovnog skupa i statistike uzorka

Interval varijacije

Određivanje intervala varijacije za negrupisane podatke

Interval varijacije = Najveća vrijednost – Najmanja vrijednost

Primjer 3-11

U tabeli 3.4 su date ukupne površine u kvadratnim miljama četiri države centralnog juga u SAD.

Odrediti interval varijacije ove serije podataka.

Tabela 3.4

Država	Ukupna površina (u kvadratnim miljama)
Arkanzas	53,182
Lujzijana	49,651
Oklahoma	69,903
Teksas	267,277

Primjer 3-11: Rješenje

Interval varijacije = Najveća vrijednost – Najmanja vrijednost

= 267,277 – 49,651

= **217,626 kvadratnih milja**

Dakle, ukupne površine ove četiri države su raspršene u razmaku od 217,626 kvadratnih milja.

Interval varijacije

Nedostaci

- Interval varijacije, kao i aritmetička sredina, ima nedostatak što na njega utiču ekstremne vrijednosti. Prema tome, interval varijacije nije dobra mjera disperzije za seriju podataka koja sadrži ekstremne vrijednosti.
- Za njegovo izračunavanje koriste se samo dvije vrijednosti: najveća i najmanja. Sve ostale vrijednosti serije podataka se zanemaruju. Stoga, interval varijacija nije zadovoljavajuća mjera disperzije.

Varijansa i standardna devijacija

- Standardna devijacija je najčešće korišćena mjera disperzije.
- Vrijednost standardne devijacije pokazuje koliko blizu su vrijednosti serije podataka grupisane oko aritmetičke sredine.
- Uopšteno, manja vrijednost standardne devijacije serije podataka ukazuje da su vrijednosti te serije raspršene veoma malo oko aritmetičke sredine.

Varijansa i standardna devijacija

- Nasuprot tome, veća vrijednost standardne devijacije serije podataka ukazuje da su vrijednosti te serije raspršene u relativno velikom razmaku oko aritmetičke sredine.

- Standardna devijacija se dobija uzimanjem pozitivnog kvadratnog korijena varijanse.

Varijansa i standardna devijacija

- Varijansa osnovnog skupa se označava sa σ^2 (čitamo kao sigma na kvadrat), a varijansa uzorka se označava sa s^2.

- U skladu sa tim, standardna devijacija osnovnog skupa se označava sa σ, a standardna devijacija uzorka se označava sa s.

Varijansa i standardna devijacija

Osnovne formule za varijansu i standardnu devijaciju negrupisanih podataka

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x-\mu)^2}{N} \quad \text{i} \quad s^2 = \frac{\sum \left(x-\bar{x}\right)^2}{n-1}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x-\mu)^2}{N}} \quad \text{i} \quad s = \sqrt{\frac{\sum \left(x-\bar{x}\right)^2}{n-1}}$$

gdje je σ^2 varijansa osnovnog skupa, s^2 je varijansa uzorka, σ je standardna devijacija osnovnog skupa, i s je standardna devijacija uzorka.

Tabela 3.5

x	$x - \bar{x}$
82	$82 - 84 = -2$
95	$95 - 84 = +11$
67	$67 - 84 = -17$
92	$92 - 84 = +8$
	$\Sigma(x - \bar{x}) = 0$

Varijansa i standardna devijacija

Radne formule za varijansu i standardnu devijaciju negrupisanih podataka

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2 - \frac{\left(\sum x\right)^2}{N}}{N} \quad \text{i} \quad s^2 = \frac{\sum x^2 - \frac{\left(\sum x\right)^2}{n}}{n-1}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2 - \frac{\left(\sum x\right)^2}{N}}{N}} \quad \text{i} \quad s = \sqrt{\frac{\sum x^2 - \frac{\left(\sum x\right)^2}{n}}{n-1}}$$

gdje je σ^2 varijansa osnovnog skupa, s^2 je varijansa uzorka, σ je standardna devijacija osnovnog skupa, i s je standardna devijacija uzorka.

Primjer 3-12

Do 2009. godine, putnicima aviokompanija se nije naplaćivao prijavljeni prtljag. Međutim, negdje oko 2009. godine, mnoge američke aviokompanije počele su da naplaćuju naknadu za torbe. Prema Zavodu za statistiku transporta, američke aviokompanije su u 2010. godini prikupile više od 3 milijarde dolara prihoda od naknada za prtljag. Sledeća tabela navodi prihode od ovih naknada za šest američkih aviokompanija za 2010. godinu.

Odrediti varijansu i standardnu devijaciju za ove podatke.

Primjer 3-12

Aviokompanija	Prihodi od naknada za prtljag (u milionima dolara)
United	313
Continental	342
American	581
Delta	952
US Airways	514
Air Tran	152

Primjer 3-12: Rješenje

Označimo sa x prihod od naknade prtljaga (u milionima dolara) jedne aviokompanije. Vrijednosti Σx i Σx^2 su izračunate u Tabeli 3.6.

x	x^2
313	97,969
342	116,964
581	337,561
952	906,304
514	264,196
152	23,104
$\Sigma x = 2854$	$\Sigma x^2 = 1,746,098$

Primjer 3-12: Rješenje

Korak 1. Izračunati Σx

Zbir vrijednosti prve kolone u Tabeli 3.6 daje 2,854.

Korak 2. Naći Σx^2

Rezultati ovog koraka su prikazani u drugoj koloni Tabele 3.6, što daje sumu 1,746,098.

Primjer 3-12: Rješenje

Korak 3. Odrediti varijansu

$$s^2 = \frac{\sum x^2 - \frac{\left(\sum x\right)^2}{n}}{n-1} = \frac{1{,}746{,}098 - \frac{(2{,}854)^2}{6}}{6-1}$$

$$= \frac{1{,}746{,}098 - 1{,}357{,}552.667}{5}$$

$$= 77{,}709.06666$$

Primjer 3-12: Rješenje

Korak 4. Izračunati standardnu devijaciju

Standardna devijacija se računa uzimanjem (pozitivnog) kvadratnog korijena varijanse:

$$s = \sqrt{\frac{\sum x^2 - \frac{\left(\sum x\right)^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{77,709.06666}$$

$$= 278.7634601 = \$278.76 million$$

Dakle, standardna devijacija prihoda od naknada za prtljag ovih šest aviokompanija u 2010. godini je **$278.76 miliona**.

Dvije napomene

1. Vrijednosti varijanse i standardne devijacije nisu nikada negativne.

2. Jedinice mjere varijanse uvijek predstavljaju kvadrirane jedinice mjere originalnih podataka.

Primjer 3-13

Date su bruto zarade (u hiljadama dolara) za svih šest zaposlenih u jednoj manjoj firmi u 2011. godini.

88.50 108.40 65.50 52.50 79.80 54.60

Izračunati varijansu i standardnu devijaciju za ove podatke.

Primjer 3-13: Rješenje

Neka x predstavlja bruto zarade jednog zaposlenog ove firme u 2011. godini. Vrijednosti $\sum x$ i $\sum x^2$ su izračunate u Tabeli 3.7.

x	x^2
88.50	7832.25
108.40	11,750.56
65.50	4290.25
52.50	2756.25
79.80	6368.04
54.60	2981.16
$\Sigma x = 449.30$	$\Sigma x^2 = 35{,}978.51$

Primjer 3-13: Rješenje

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2 - \frac{\left(\sum x\right)^2}{N}}{N} = \frac{35,978.51 - \frac{(449.30)^2}{6}}{6} = 388.90$$

$$\sigma = \sqrt{388.90} = \$19.721 \text{ hiljada} = \$19,721$$

Dakle, standardna devijacija bruto zarada svih šest zaposlenih ove firme u 2011. godini je **$19,721**.

Upozorenje

Primijetimo da $\sum x^2$ nije isto što i $(\sum x)^2$. Vrijednost $\sum x^2$ se dobija sabiranjem kvadriranih vrijednosti x. Vrijednost $(\sum x)^2$ se dobija tako što se kvadrira vrijednost $\sum x$.

Parametri osnovnog skupa i statistike uzorka

- Numerička mjera kao što je aritmetička sredina, medijana, modus, interval varijacije, varijansa, ili standardna devijacija izračunata za podatke osnovnog skupa naziva se parametar skupa, ili jednostavno **parametar**.

- Deskriptivna mjera koja se računa za podatke uzorka naziva se statistika uzorka, ili jednostavno **statistika**.

3.3 ARITMETIČKA SREDINA, VARIJANSA I STANDARDNA DEVIJACIJA ZA GRUPISANE PODATKE

- Aritmetička sredina grupisanih podataka
- Varijansa i standardna devijacija grupisanih podataka

Aritmetička sredina grupisanih podataka

Izračunavanje aritmetičke sredine grupisanih podataka

Aritmetička sredina skupa: $\mu = \frac{\sum mf}{N}$

Aritm. sredina uzorka: $\bar{x} = \frac{\sum mf}{n}$

gdje je m sredina a f frekvencija intervala.

Primjer 3-14

U tabeli 3.8 prikazana je raspodjela frekvencija vremena svakodnevno provedenog u putovanju od kuće do radnog mjesta *svih* 25 zaposlenih u jednom preduzeću (u minutima) .

Izračunati aritmetičku sredinu vremena provedenog u putovanju od kuće do radnog mjesta.

Primjer 3-14

Dnevno vrijeme putovanja na posao (u minutima)	Broj zaposlenih
0 do manje od 10	4
10 do manje od 20	9
20 do manje od 30	6
30 do manje od 40	4
40 do manje od 50	2

Primjer 3-14: Rješenje

Dnevno vrijeme putovanja na posao (u minutima)	f	m	mf
0 do manje od 10	4	5	20
10 do manje od 20	9	15	135
20 do manje od 30	6	25	150
30 do manje od 40	4	35	140
40 do manje od 50	2	45	90
	$N=25$		$\sum mf=535$

Primjer 3-14: Rješenje

$$\mu = \frac{\sum mf}{N} = \frac{535}{25} = \mathbf{21.40\ minutes}$$

Dakle, zaposleni ovog preduzeća u prosjeku provedu **21.40 minuta** dnevno putujući od kuće do radnog mjesta.

Primjer 3-15

Tabela 3.9 sadrži raspodjelu frekvencija broja porudžbina koje su pristizale svakog dana, tokom proteklih 50 dana, u kancelariju jednog preduzeća koje se bavi porudžbinama poštom.

Izračunati prosjek.

Primjer 3-15

Broj porudžbina	Broj dana
10-12	4
13-15	12
16-18	20
19-21	4

Primjer 3-15: Rješenje

Broj porudžbina	f	m	mf
10-12	4	11	44
13-15	12	14	168
16-18	20	17	340
19-21	4	20	280
	n=50		$\sum mf$=832

Primjer 3-15: Rješenje

$$\bar{x} = \frac{\sum mf}{n} = \frac{832}{50} = \mathbf{16.64\ orders}$$

Znači, ovo preduzeće je u periodu od 50 dana u prosjeku primalo **16.64 porudžbina** dnevno.

Varijansa i standardna devijacija grupisanih podataka

Osnovne formule za varijansu i standardnu devijaciju grupisanih podataka

$$\sigma^2 = \frac{\sum f(m-\mu)^2}{N} \quad \text{i} \quad s^2 = \frac{\sum f(m-\bar{x})^2}{n-1}$$

gdje je σ^2 varijansa osnovnog skupa, s^2 je varijansa uzorka, a m sredina intervala. U oba slučaja, standardna devijacija se dobija uzimanjem pozitivnog kvadratnog korijena iz varijanse.

Varijansa i standardna devijacija grupisanih podataka

Radne formule za varijansu i standardnu devijaciju grupisanih podataka

$$\sigma^2 = \frac{\sum m^2 f - \frac{(\sum mf)^2}{N}}{N} \quad i \quad s^2 = \frac{\sum m^2 f - \frac{(\sum mf)^2}{n}}{n-1}$$

gdje je σ^2 varijansa osnovnog skupa, s^2 je varijansa uzorka, a m sredina intervala.

Varijansa i standardna devijacija grupisanih podataka

Radne formule za varijansu i standardnu devijaciju grupisanih podataka

Standardna devijacija se dobija uzimanjem pozitivnog kvadratnog korijena varijanse.

Standardna devijacija skupa: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Standardna devijacija uzorka: $s = \sqrt{s^2}$

Primjer 3-16

Sledeći podaci, koji su preuzeti iz Tabele 3.8 primjera 3-14, predstavljaju raspodjelu svakodnevnog vremena provedenog u putovanju od kuće do posla (u minutima) za svih 25 zaposlenih jednog preduzeća.

Izračunati varijansu i standardnu devijaciju.

Primjer 3-16

Dnevno vrijeme putovanja na posao (u minutima)	Broj zaposlenih
0 do manje od 10	4
10 do manje od 20	9
20 do manje od 30	6
30 do manje od 40	4
40 do manje od 50	2

Primjer 3-16: Rješenje

Dnevno vrijeme putovanja na posao (u minutima)	f	m	mf	m^2f
0 do manje od 10	4	5	20	100
10 do manje od 20	9	15	135	2025
20 do manje od 30	6	25	150	3750
30 do manje od 40	4	35	140	4900
40 do manje od 50	2	45	90	4050
	N=25		$\sum mf$=535	$\sum m^2f$=14,825

Primjer 3-16: Rješenje

$$\sigma^2 = \frac{\sum m^2 f - \frac{(\sum mf)^2}{N}}{N} = \frac{14{,}825 - \frac{(535)^2}{25}}{25} = \frac{3376}{25} = 135.04$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{135.04} = 11.62 \text{ minutes}$$

Prema tome, standardna devijacija vremena provedenog putujući na posao ovih zaposlenih je **11.62 minuta**.

Primjer 3-17

Sledeći podaci, preuzeti iz Tabele 3.9 primjera 3-15, predstavljaju raspodjelu frekvencija broja porudžbina koje su pristizale svakoga dana, tokom proteklih 50 dana u kancelariju jednog preduzeća koje se bavi porudžbinama poštom.

Izračunati varijansu i standardnu devijaciju.

Primjer 3-17

Broj porudžbina	f
10-12	4
13-15	12
16-18	20
19-21	4

Primjer 3-17: Rješenje

Broj porudžbina	f	m	mf	m^2f
10-12	4	11	44	484
13-15	12	14	168	2352
16-18	20	17	340	5780
19-21	4	20	280	5600
	n=50		$\sum mf$=832	$\sum m^2f$=14,216

Primjer 3-17: Rješenje

$$s^2 = \frac{\sum m^2 f - \frac{(\sum mf)^2}{n}}{n-1} = \frac{14{,}216 - \frac{(832)^2}{50}}{50-1} = 7.5820$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{7.5820} = 2.75 \text{ orders}$$

Dakle, standardna devijacija broja porudžbina koje su pristizale u kancelariju ovog preduzeća tokom poslednjih 50 dana je **2.75**.

3.4 KORIŠĆENJE STANDARDNE DEVIJACIJE

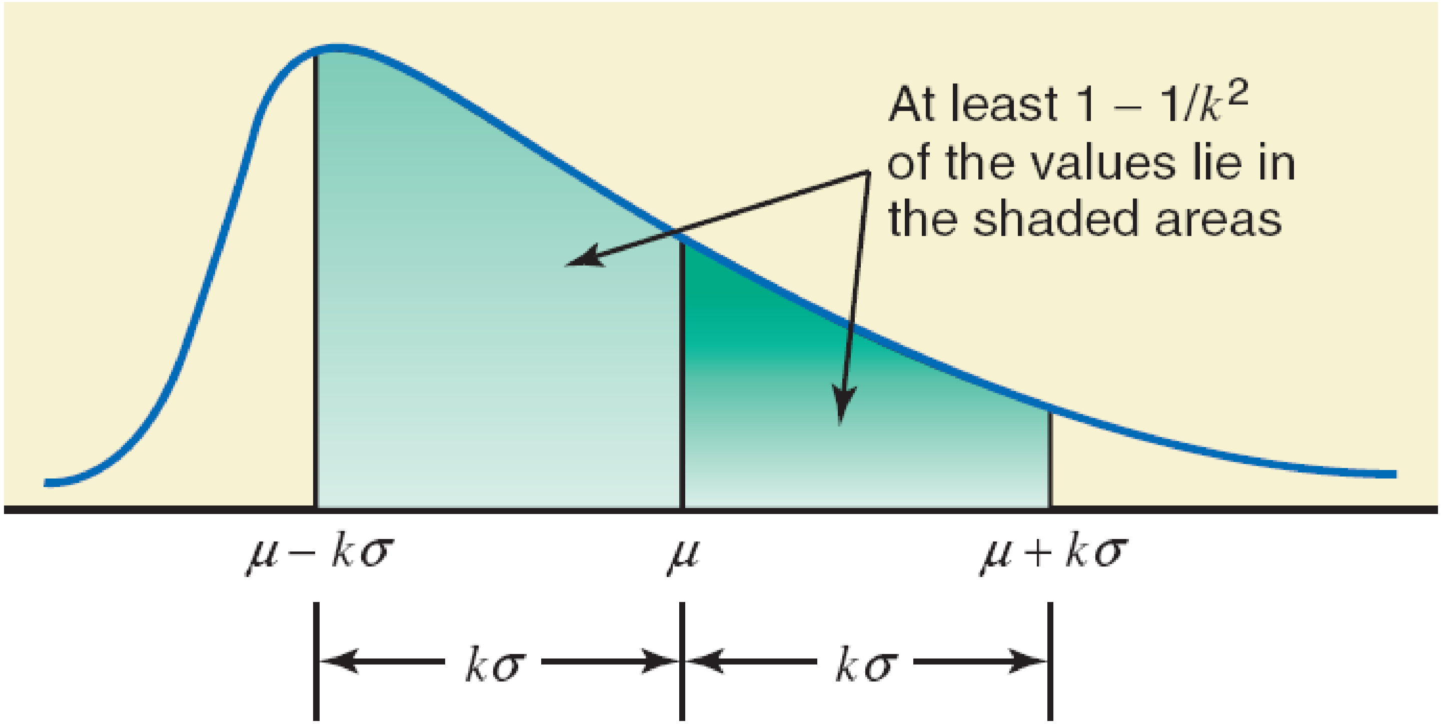
- Čebišovljeva teorema
- Empirijsko pravilo

Čebišovljeva teorema

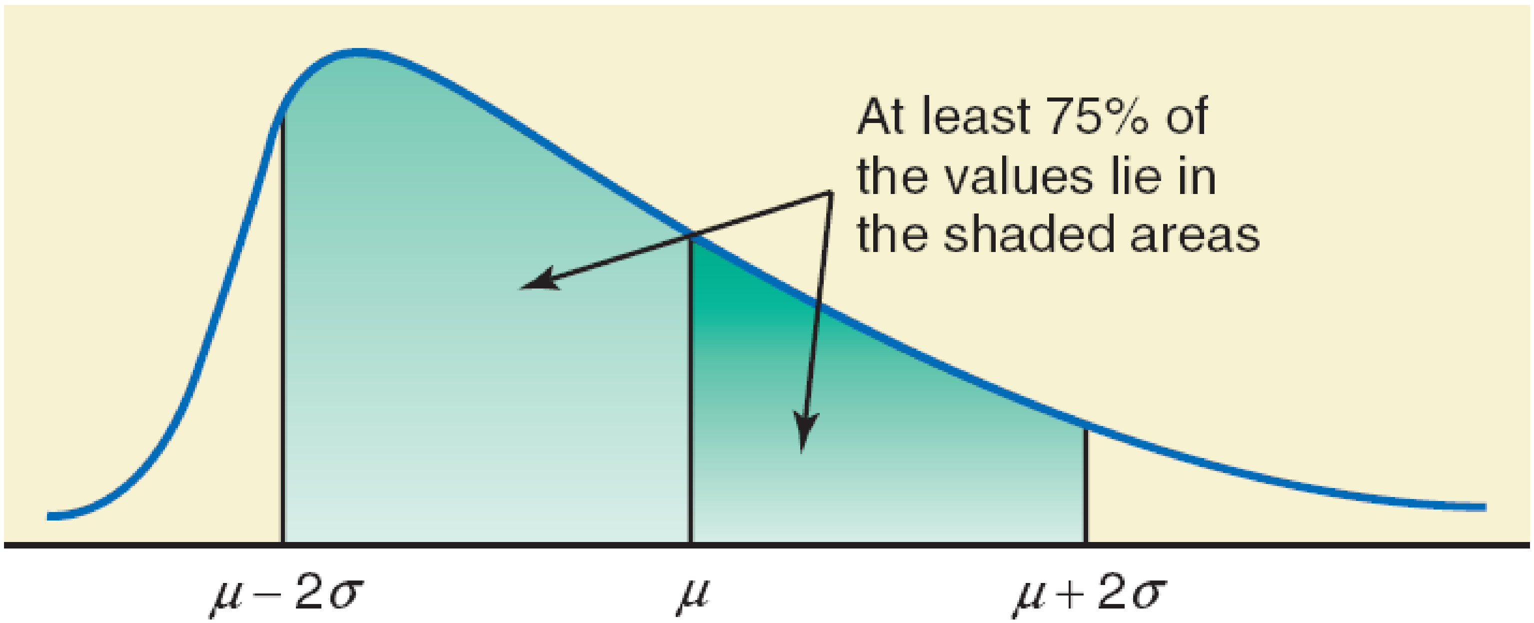
Definicija

Za bilo koji broj k veći od 1, najmanje $(1 - 1/k^2)$ vrijednosti podataka se nalazi u opsegu k standardnih devijacija od aritmetičke sredine.

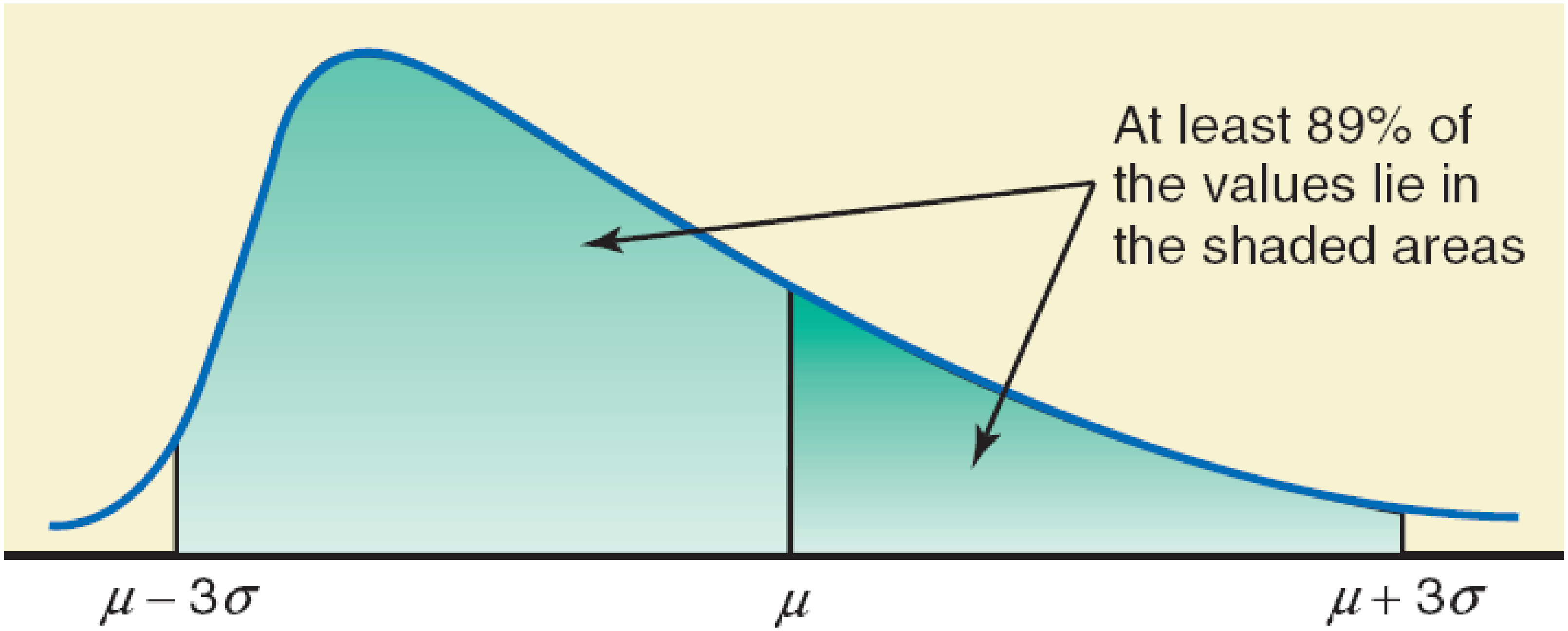
Slika 3.5 Čebišovljeva teorema.



Slika 3.6 Procenat vrijednosti u opsegu dvije standardne devijacije od prosjeka prema Čebišovljevoj teoremi.



Slika 3.7 Procenat vrijednosti u opsegu tri standardne devijacije od prosjeka prema Čebišovljevoj teoremi.



Primjer 3-18

Prosječni sistolni krvni pritisak 4000 žena čije je zdravstveno stanje praćeno zbog visokog krvnog pritiska, je iznosio 187 sa standardnom devijacijom od 22. Koristeći Čebišovljevu teoremu, odrediti najmanji procenat žena u ovoj grupi koje imaju sistolni krvni pritisak između 143 i 231.

Primjer 3-18: Rješenje

Neka su μ i σ aritmetička sredina i standardna devijacija, tim redom, sistolnog krvnog pritiska ovih žena.

$$\mu = 187 \quad \text{i} \quad \sigma = 22$$

$$\left| \leftarrow 143 - 187 = -44 \rightarrow \right| \leftarrow 231 - 187 = 44 \rightarrow \Big|$$

$$143 \qquad\qquad \mu = 187 \qquad\qquad 231$$

Primjer 3-18: Rješenje

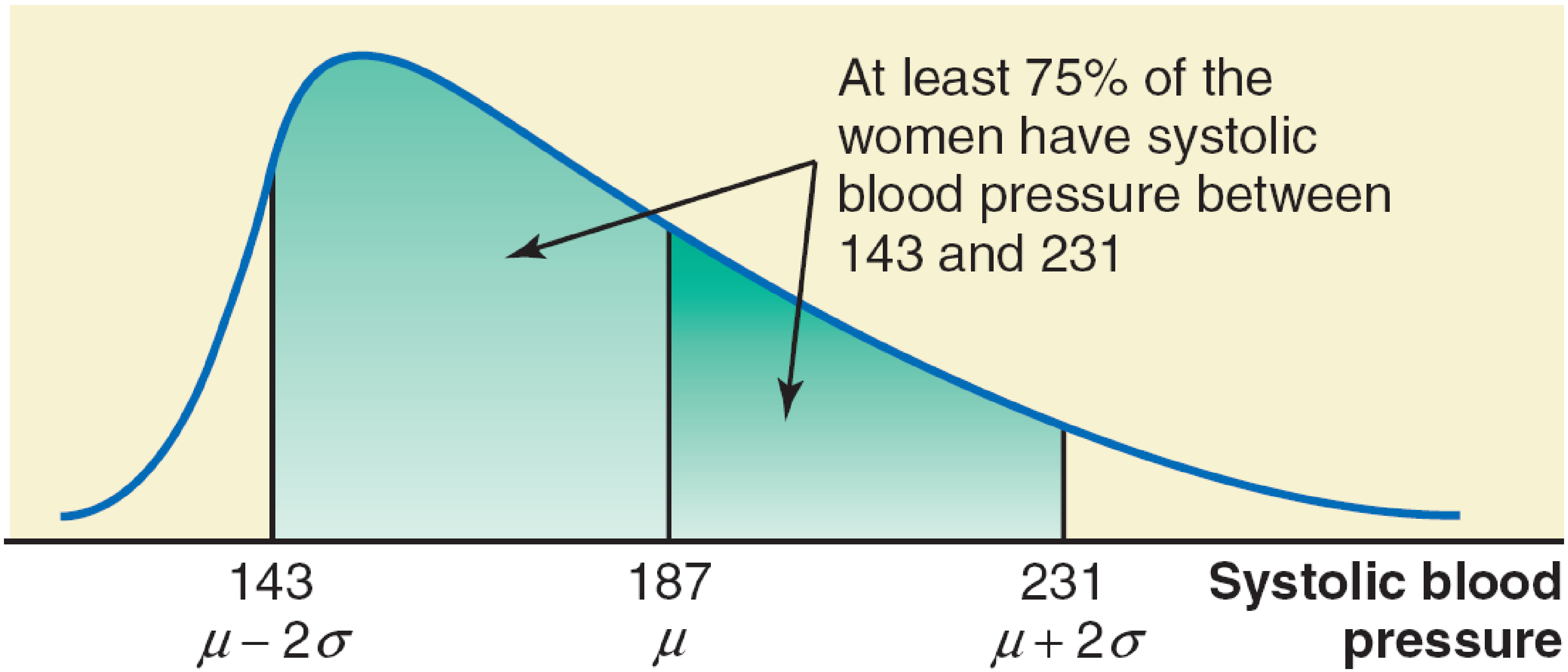
Vrijednost k se dobija dijeljenjem udaljenosti aritmetičke sredine i svake tačke sa standardnom devijacijom. Prema tome

$$k = 44/22 = 2$$

$$1-\frac{1}{k^2}=1-\frac{1}{(2)^2}=1-\frac{1}{4}=1-.25=.75 \text{ or } 75\%$$

Znači, na osnovu Čebišovljeve teoreme, najmanje 75% žena ima sistolni krvni pritisak između 143 i 231. Ovaj procenat je ilustrovan na slici 3.8.

Slika 3.8 Procenat žena čiji se sistolni krvni pritisak kreće između 143 i 231.

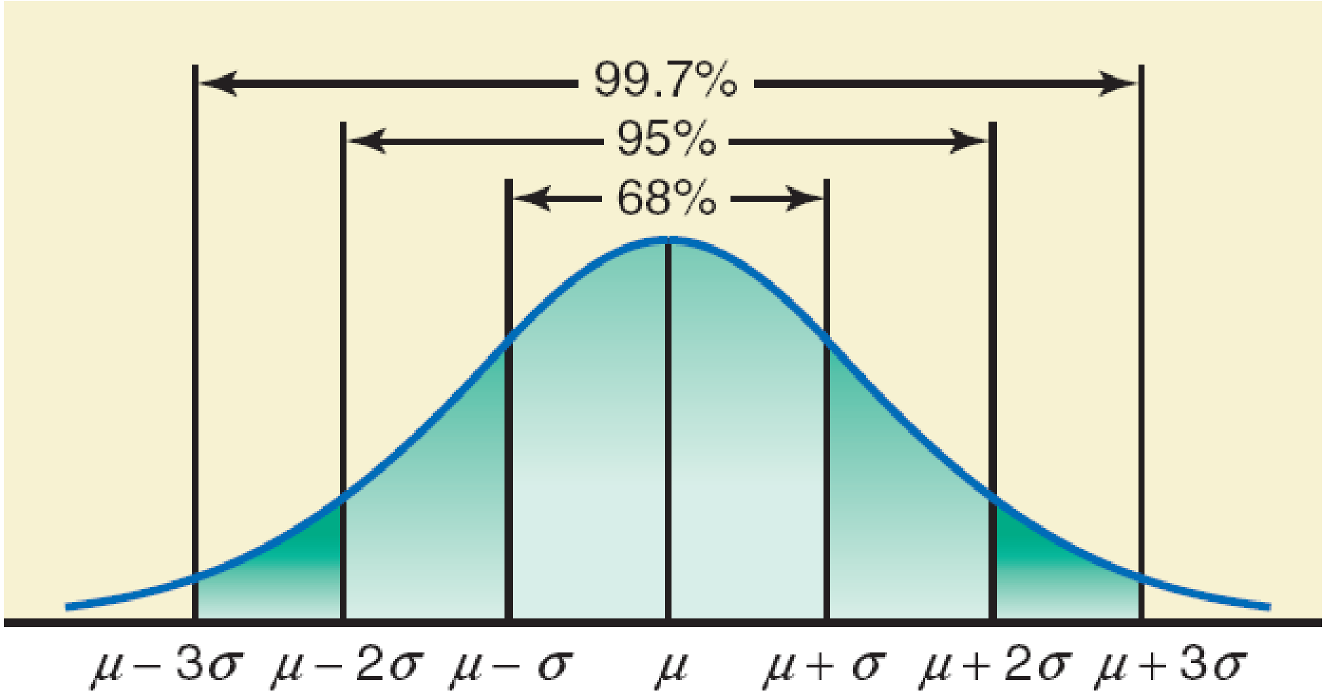


Empirijsko pravilo

Za raspodjelu u obliku zvona, približno

1. 68% vrijednosti se nalazi u opsegu jedne standardne devijacije od aritmetičke sredine
2. 95% vrijednosti se nalazi u opsegu dvije standardne devijacije od aritmetičke sredine
3. 99.7% vrijednosti se nalazi u opsegu tri standardne devijacije od aritmetičke sredine

Slika 3.9 Ilustracija empirijskog pravila.



Primjer 3-19

Raspodjela godina starosti u uzorku od 5000 osoba ima oblik zvona sa aritmetičkom sredinom od 40 godina i standardnom devijacijom od 12 godina. Odrediti približno procenat ljudi čije godine se kreću u rasponu od 16 do 64.

Primjer 3-19: Rješenje

Na osnovu datih informacija, za ovu krivu,

$\bar{x} = 40$ i $s = 12$ godina

Svaka od dvije tačke, 16 i 64, je za 24 jedinice udaljena od aritmetičke sredine.

Pošto površina u opsegu dvije standardne devijacije od aritmetičke sredine je približno 95% zvonaste krive, približno 95% ljudi u uzorku su stari od 16 do 64 godina.

Slika 3.10 Procenat ljudi starih između 16 i 64 godina.