POGLAVLJE 4

VJEROVATNOĆA

4.1 EKSPERIMENT, ISHODI I PROSTOR UZORKA

Definicija

Eksperiment je proces, čiji rezultat izvođenja je jedna i samo jedna od mnogih opservacija. Te opservacije se nazivaju ***ishodi*** eksperimenta. Skup svih ishoda jednog eksperimenta se naziva ***prostor uzorka***.

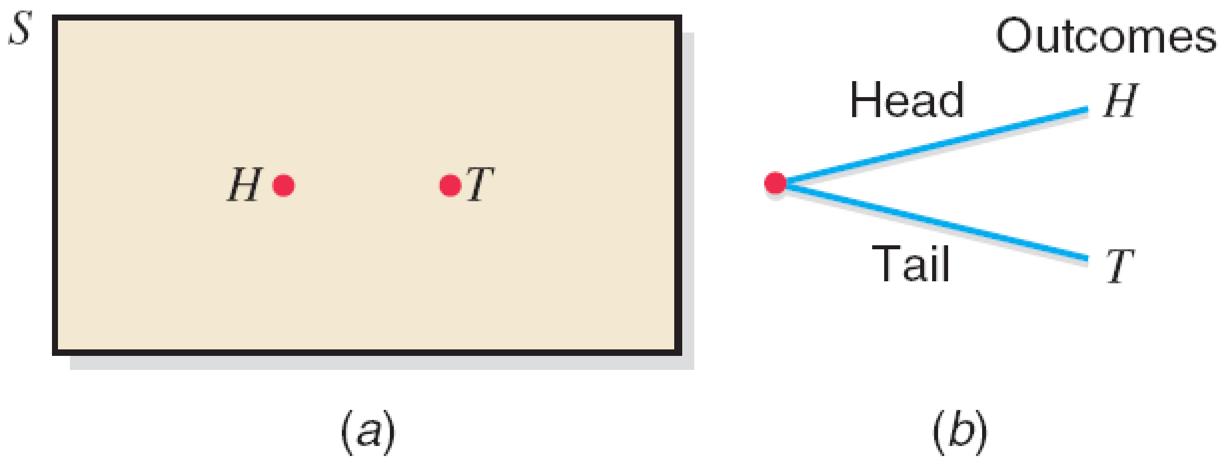
Tabela 4.1 Primjeri eksperimenata, ishoda i prostora uzorka

Eksperiment	Ishodi	Prostor uzorka
Bacanje novčića jednom	Pismo, glava	S = {pismo, glava}
Bacanje kocke jednom	1, 2, 3, 4, 5, 6	S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Bacanje novčića dva puta	*GG, GP, PG, PP*	S = { *GG, GP, PG, PP*}
Igranje lutrije	dobiti, izgubiti	S = { dobiti, izgubiti}
Polaganje testa	proći, pasti	S = { proći, pasti}
Biranje studenta	muško, žensko	S = { muško, žensko}

Primjer 4-1

Nacrtati Venov dijagram i stablo ishoda za eksperiment bacanja novčića jedanput.

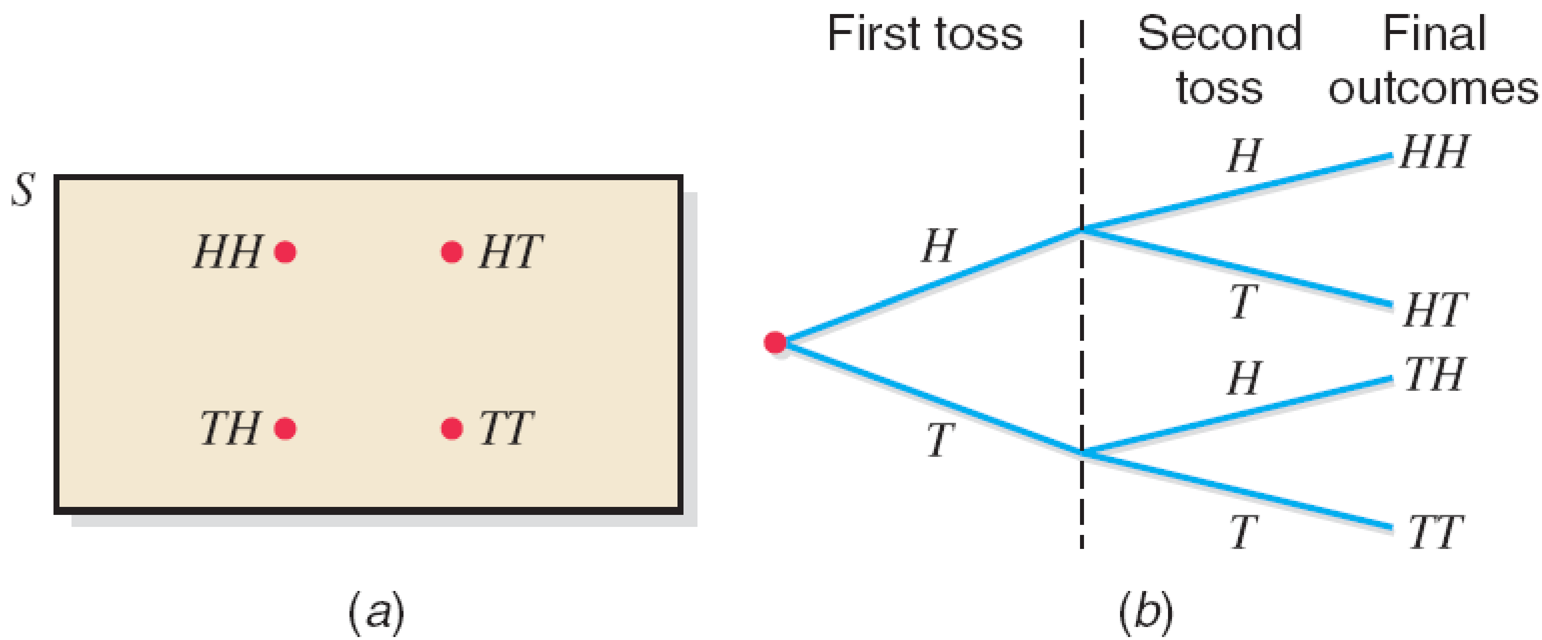
Slika 4.1 (a) Venov dijagram i (b) stablo ishoda za jedno bacanje novčića.



Primjer 4-2

Nacrtati Venov dijagram i stablo ishoda za eksperiment bacanja novčića dva puta.

Slika 4.2 (a) Venov dijagram i (b) stablo ishoda za dva bacanja novčića.



Elementarni i složeni događaji

Definicija

Događaj je skup jednog ili više ishoda eksperimenta.

Elementarni i složeni događaji

Definicija

Događaj koji sadrži jedan i samo jedan od (krajnjih) ishoda nekog eksperimenta se naziva ***elementarni događaj*** i obično obilježava sa E_i.

Primjer 4-3

Razmotrimo primjer o biranju dva zaposlena iz jedne firme i bilježenju svaki put da li je izabrani zaposleni muško ili žensko. Svaki od četiri krajnja ishoda (*MM, MW, WM* i *WW*) za ovaj eksperiment je elementarni događaj. Ta četiri događaja mogu da se obilježe sa E_1, E_2, E_3, i E_4, redom. Dakle,

$$\boldsymbol{E_1} = (MM), \quad \boldsymbol{E_2} = (MW), \quad \boldsymbol{E_3} = (WM), \quad \text{i} \quad \boldsymbol{E_4} = (WW)$$

Elementarni i složeni događaji

Definicija

Složeni događaj je skup više od jednog ishoda nekog eksperimenta.

Primjer 4-4

Razmotrimo ponovo primjer 4-3 o biranju dva zaposlena iz jedne firme i bilježenju svaki put da li je izabrani zaposleni muško ili žensko. Neka je *A* događaj da je izabran najviše jedan muškarac. Događaj *A* će se realizovati ako je izabran jedan ili nijedan muškarac. Dakle, događaj *A* je

$$A = \{MW, WM, WW\}$$

Pošto događaj *A* sadrži više od jednog ishoda, on je složeni događaj. Venov dijagram na slici 4.3 daje grafički prikaz složenog događaja *A*.

Slika 4.3 Venov dijagram za događaj *A*.

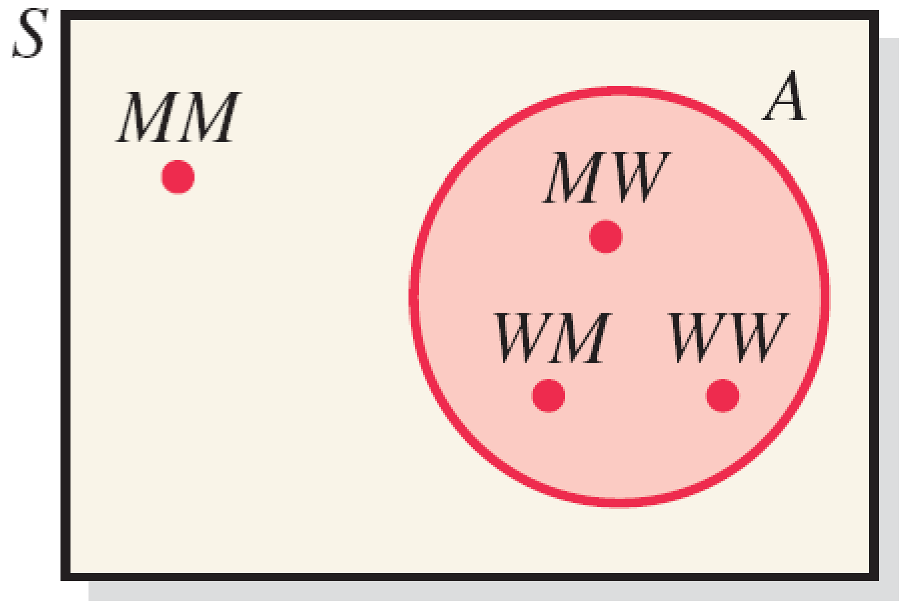


Figure 4.4 Venn diagram for event *A*.

4.2 IZRAČUNAVANJE VJEROVATNOĆE

Definicija

Vjerovatnoća je numerička mjera mogućnosti realizacije određenog događaja.

Dvije osobine vjerovatnoće

- Vjerovatnoća nekog događaja se uvijek nalazi u intervalu od 0 do 1.

Prva osobina vjerovatnoće

$$0 \leq P(E_i) \leq 1$$
$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- Suma vjerovatnoća svih elementarnih događaja (ili krajnjih ishoda) nekog eksperimenta, koja se obilježava sa **$\Sigma P(E_i)$**, uvijek je jednaka 1.

Druga osobina vjerovatnoće Za neki eksperiment je:

$$\sum P(E_i) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \cdots = 1$$

Tri konceptualna pristupa vjerovatnoći

Klasična vjerovatnoća

Definicija

Dva ili više ishoda (ili događaja) koji imaju istu vjerovatnoću realizacije se zovu ***jednako vjerovatni ishodi*** (ili događaji).

Klasična vjerovatnoća

Pravilo klasične vjerovatnoće za određivanje vjerovatnoće

$$\mathrm{P}(E_i) = \frac{1}{Ukupan\ broj\ ishoda\ eksperimenta}$$

$$\mathrm{P}(A) = \frac{Broj\ povoljnih\ ishoda\ za\ A}{Ukupan\ broj\ ishoda\ eksperimenta}$$

Primjer 4-5

Odrediti vjerovatnoću pojave glave i vjerovatnoću pojave pisma prilikom jednog bacanja novčića.

Primjer 4-5: Rješenje

$$P(glava) = \frac{1}{ukupan\ broj\ ishoda} = \frac{1}{2} = 0.50$$

Slično tome,

$$\text{P(pismo)} = \frac{1}{2} = 0.50$$

Tri konceptualna pristupa vjerovatnoći

Koncept vjerovatnoće kao relativne frekvencije

Korišćenje relativne frekvencije kao aproksimacije vjerovatnoće

Ako se neki eksperiment ponavlja n puta, pri čemu se neki događaj *A* realizuje f puta, onda, po konceptu vjerovatnoće kao relativne frekvencije je:

$$P(A) = \frac{f}{n}$$

Primjer 4-6

Deset od 500 slučajno odabranih automobila proizvedenih u određenoj fabrici je bilo defektno. Pod pretpostavkom da se defektni automobili proizvode slučajno, kolika je vjerovatnoća da će sledeći automobil proizveden u ovoj fabrici biti defektan?

Primjer 4-6: Rješenje

Neka n predstavlja ukupan broj automobila u uzorku, a f je broj defektnih automobila među ovih n. Tada važi,

$$n = 500 \quad \text{i} \quad f = 10$$

Koristeći koncept vjerovatnoće kao relativne frekvencije, dobijamo:

$$P(\text{sledeći automobil je defektan}) = \frac{f}{n} = \frac{10}{500} = 0.02$$

Tabela 4.2 Raspodjele frekvencija i relativnih frekvencija za uzorak automobila

Automobil	f	Relativna frekvencija
Ispravan	490	490/500=0.98
Defektan	10	10/500=0.02
	n = 500	Ukupno = 1.00

Zakon velikih brojeva

Definicija

Zakon velikih brojeva

Ako se neki eksperiment ponavlja veliki broj puta, vjerovatnoća događaja dobijena na osnovu relativne frekvencije teži stvarnoj ili teorijskoj vjerovatnoći.

Primjer 4-7

Allison želi da odredi vjerovatnoću da slučajno izabrana porodica iz države Njujork posjeduje kuću. Kako ona može da odredi ovu vjerovatnoću?

Primjer 4-7: Rješenje

Za slučajno odabranu porodicu iz države Njujork postoje dva ishoda: „ova porodica posjeduje kuću" i „ova porodica ne posjeduje kuću". Ova dva događaja nisu jednako vjerovatna. Dakle, pravilo klasične vjerovatnoće ne može da se primijeni. Međutim, ovaj eksperiment možemo da ponavljamo više puta. Prema tome, koristićemo koncept vjerovatnoće kao relativne frekvencije.

Tri konceptualna pristupa vjerovatnoći

Subjektivna vjerovatnoća

Definicija

Subjektivna vjerovatnoća je vjerovatnoća dodijeljena nekom događaju na osnovu subjektivne procjene, iskustva, informacija i vjerovanja.

4.3 MARGINALNA VJEROVATNOĆA, USLOVNA VJEROVATNOĆA, I SRODNI KONCEPTI VJEROVATNOĆE

Pretpostavimo da su svih 100 zaposlenih u jednom preduzeću upitani da li su za isplatu većih plata izvršnim direktorima u američkim preduzećima ili su protiv toga. Tabela 4.3 prikazuje dvije klasifikacije odgovora ovih 100 zaposlenih.

Tabela 4.3 Dvije klasifikacije odgovora zaposlenih

	Za	Protiv
Muško	15	45
Žensko	4	36

Tabela 4.4 Dvije klasifikacije odgovora zaposlenih sa ukupnim zbirovima

	Za	Protiv	Ukupno
Muško	15	45	60
Žensko	4	36	40
Ukupno	19	81	100

MARGINALNA VJEROVATNOĆA, USLOVNA VJEROVATNOĆA I SRODNI KONCEPTI VJEROVATNOĆE

Definicija

Marginalna vjerovatnoća je vjerovatnoća jednog događaja bez posmatranja bilo kog drugog događaja. Marginalna vjerovatnoća se još naziva i ***prosta vjerovatnoća***.

Tabela 4.5 Marginalne vjerovatnoće

	Za (A)	Protiv (B)	Ukupno
Muško (M)	15	45	60
Žensko (Ž)	4	36	40
Ukupno	19	81	100

P(A)=19/100 =0.19

P(B)=81/100 =0.81

P(M)=60/100=0.60

P(F)=40/100=0.40

MARGINALNA VJEROVATNOĆA, USLOVNA VJEROVATNOĆA I SRODNI KONCEPTI VJEROVATNOĆE

Čitati kao „pod uslovom“

$P(\text{za} \mid \text{muško})$

Događaj čija vjerovatnoća treba da se utvrdi

Ovaj događaj se već realizovao

MARGINALNA VJEROVATNOĆA, USLOVNA VJEROVATNOĆA I SRODNI KONCEPTI VJEROVATNOĆE

Definicija

Uslovna vjerovatnoća je vjerovatnoća da će se neki događaj realizovati pod uslovom da se drugi događaj već realizovao. Ako su *A* i *B* dva događaja, onda se uslovna vjerovatnoća *A* pod uslovom *B* zapisuje kao

$$\boldsymbol{P(A \mid B)}$$

i čita se kao “vjerovatnoća *A* pod uslovom da se *B* već realizovao.”

Primjer 4-8

Izračunati uslovnu vjerovatnoću P (za | muško) za podatke o 100 zaposlenih date u Tabeli 4.4.

Primjer 4-8: Rješenje

	Za	Protiv	Ukupno
Muško (M)	15	45	60

Muškarci koji su za

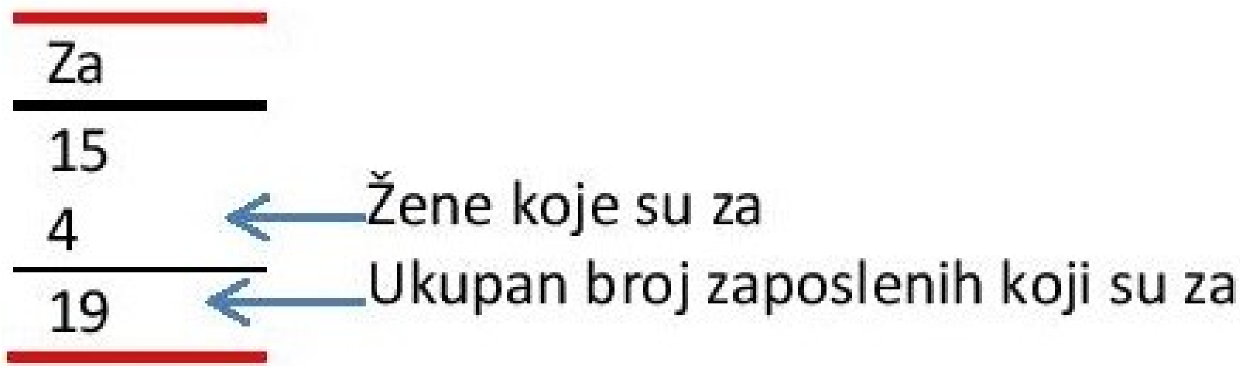
Ukupan broj muškaraca

$$P(za \mid muško) = \frac{broj\ muškaraca\ koji\ su\ za}{ukupan\ broj\ muškaraca} = \frac{15}{60} = 0.25$$

Primjer 4-9

Za podatke iz Tabele 4.4, izračunati uslovnu vjerovatnoću da je slučajno odabrani zaposleni osoba ženskog pola, pod uslovom da je taj zaposleni za isplatu većih plata izvršnim direktorima.

Primjer 4-9: Rješenje



$$P(\text{žensko} \mid \text{za}) = \frac{broj\ žena\ koje\ su\ za}{ukupan\ broj\ zaposlenih\ koji\ su\ za} = \frac{4}{19} = 0.2105$$

MARGINALNA VJEROVATNOĆA, USLOVNA VJEROVATNOĆA I SRODNI KONCEPTI VJEROVATNOĆE

Definicija

Događaji koji se ne mogu istovremeno realizovati zovu se ***međusobno isključivi događaji***.

Primjer 4-10

Razmotrimo sledeće događaje prilikom bacanja jedne kocke:

A= pojava parnog broja= {2, 4, 6}

B= pojava neparnog broja= {1, 3, 5}

C= pojava broja manjeg od 5= {1, 2, 3, 4}

Da li su događaji A i B međusobno isključivi? Da li su događaji A i C međusobno isključivi?

Primjer 4-10: Rješenje

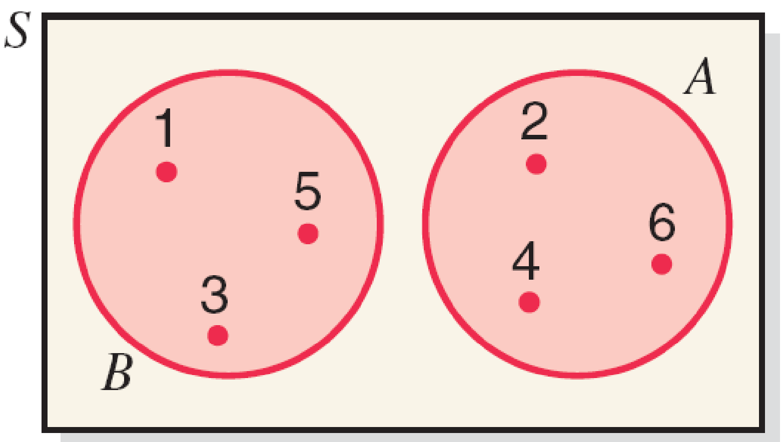


Figure 4.8 Mutually exclusive events A and B.

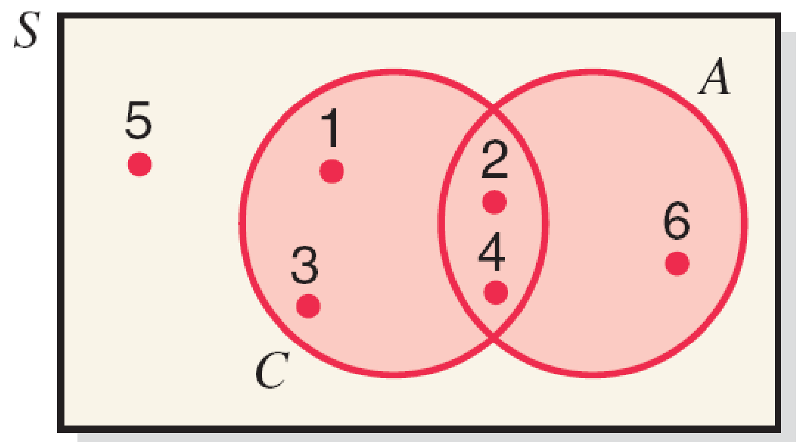


Figure 4.9 Mutually nonexclusive events A and C.

MARGINALNA VJEROVATNOĆA, USLOVNA VJEROVATNOĆA I SRODNI KONCEPTI VJEROVATNOĆE

Definicija

Za dva događaja se kaže da su ***nezavisni*** ako realizacija jednog ne utiče na vjerovatnoću realizacije drugog događaja. Drugim riječima, A i B su ***nezavisni događaji*** ako je

ili $P(A \mid B) = P(A)$ ili $P(B \mid A) = P(B)$

Primjer 4-11

Pogledajte informacije o 100 zaposlenih date u Tabeli 4.4 u odjeljku 4.4. Da li su događaji “žensko (*Ž*)” i “za (*A*)” nezavisni?

Primjer 4-11: Rješenje

Događaji $Ž$ i A će biti nezavisni ako je

$$P\,(Ž) = P\,(Ž \mid A)$$

U suprotnom će biti zavisni.

Koristeći informacije date u Tabeli 4.4, izračunavamo sledeće dvije vjerovatnoće:

$$P\,(Ž) = 40/100 = 0.40 \quad \text{i}$$

$$P\,(Ž \mid A) = 4/19 = 0.2105$$

Pošto ove dvije vjerovatnoće nisu jednake, ova dva događaja su zavisna.

MARGINALNA VJEROVATNOĆA, USLOVNA VJEROVATNOĆA I SRODNI KONCEPTI VJEROVATNOĆE

Definicija

Komplement događaja A, koji se obilježava sa $\bar{A}$ i čita kao "*A* bar" ili "*A* komplement," je događaj koji sadrži sve ishode jednog eksperimenta koji nisu u *A*.

Slika 4.4 Venov dijagram dva komplementarna događaja.

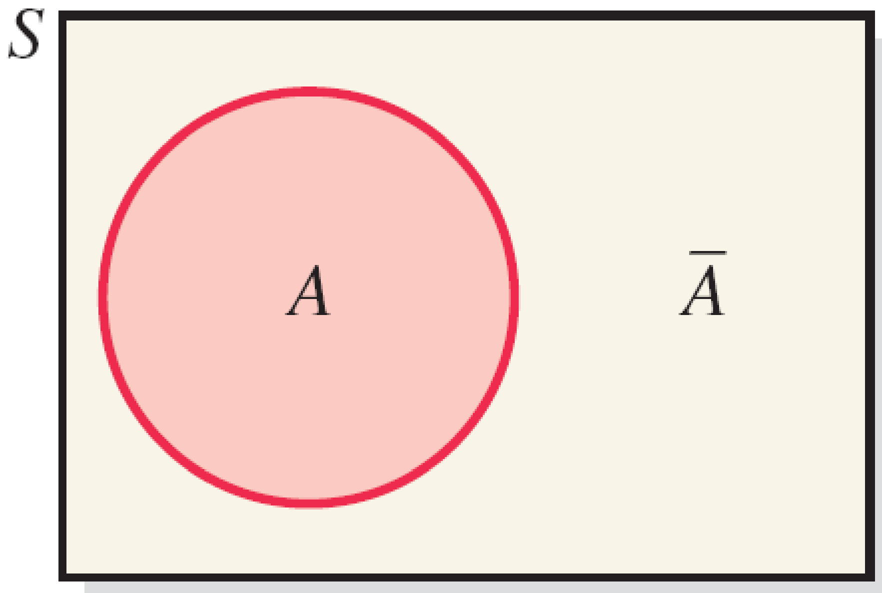


Figure 4.11 Venn diagram of two complementary events.

4.4 PRESJEK DOGAĐAJA I PRAVILO MNOŽENJA VJEROVATNOĆA

Presjek događaja

Definicija

Neka su A i B dva događaja definisana u prostoru uzorka. ***Presjek*** A i B predstavlja skup svih ishoda koji su zajednički i za A i za B i označava se kao

$$A \text{ i } B$$

Slika 4.5 Presjek događaja *A* i *B*.

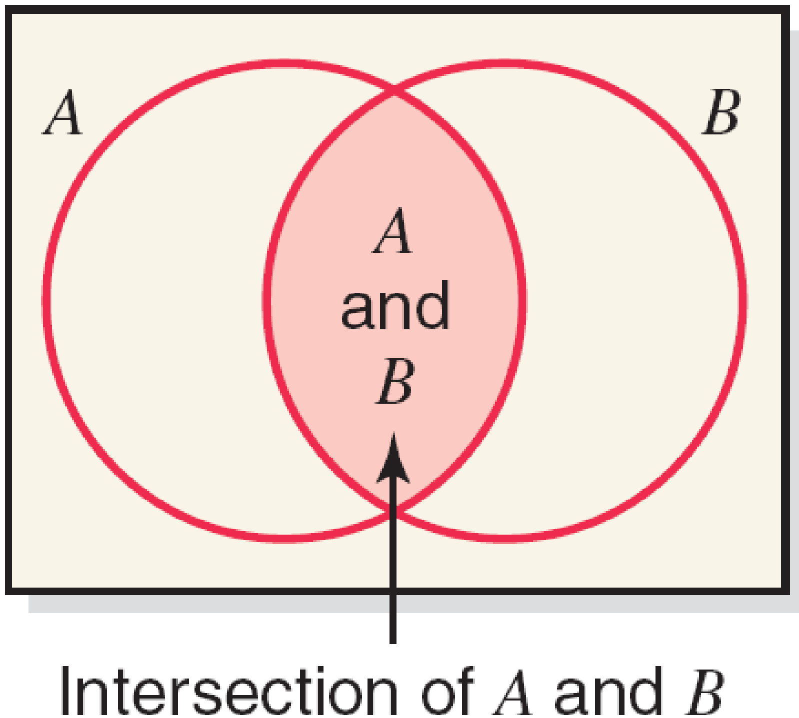


Figure 4.14 Intersection of events *A* and *B*.

PRESJEK DOGAĐAJA I PRAVILO MNOŽENJA VJEROVATNOĆA

Pravilo množenja vjerovatnoća

Definicija

Vjerovatnoća presjeka dva događaja se zove ***zajednička vjerovatnoća***. Ona se zapisuje kao

$$P(A \text{ i } B)$$

PRESJEK DOGAĐAJA I PRAVILO MNOŽENJA VJEROVATNOĆA

Pravilo množenja vjerovatnoća za određivanje zajedničke vjerovatnoće

Vjerovatnoća presjeka dva događaja A i B je

$$P(A \text{ i } B) = P(A)\,P(B\,|A) = P(B)\,P(A\,|B)$$

Primjer 4-12

U Tabeli 4.6 je data klasifikacija svih zaposlenih u jednom preduzeću po polu i po fakultetskoj diplomi.

	Sa fakultetskom diplomom (*G*)	Bez fakultetske diplome (*N*)	Ukupno
Muško (*M*)	7	20	27
Žensko (*Ž*)	4	9	13
Ukupno	11	29	40

Ako je jedan od ovih zaposlenih izabran slučajnim putem za članstvo u radničkom savjetu, kolika je vjerovatnoća da je taj zaposleni ženskog pola i da ima fakultetsku diplomu?

Primjer 4-12: Rješenje

Treba da izračunamo vjerovatnoću presjeka događaja *Ž i G.*

$P(Ž \text{ i } G) = P(Ž)\, P(G\,|Ž)$
$P(Ž) = 13/40$
$P(G\,|Ž) = 4/13$
$P(Ž \text{ i } G) = P(Ž)\, P(G\,|Ž)$
$= (13/40)(4/13) = 0.100$

Slika 4.6 Presjek događaja *Ž* i *G*.

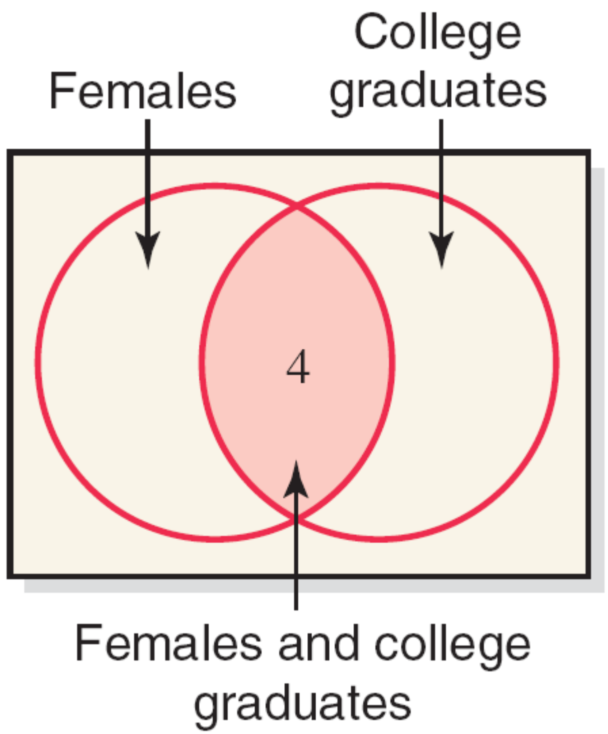


Figure 4.15 Intersection of events *F* and *G*.

PRESJEK DOGAĐAJA I PRAVILO MNOŽENJA VJEROVATNOĆA

Izračunavanje uslovne vjerovatnoće

Ako su *A* i *B* dva događaja, onda je,

$$P(B|A) = \frac{P(A\ i\ B)}{P(A)}\ i\ P(A|B) = \frac{P(A\ i\ B)}{P(B)}$$

Pod uslovom da je $P(A) \neq 0$ i $P(B) \neq 0$.

Primjer 4-13

Vjerovatnoća da je slučajno odabrani student jednog koledža sa završne godine je 0.20, a zajednička vjerovatnoća da je to student informatike i da je sa završne godine je 0.03. Odrediti uslovnu vjerovatnoću da je slučajno izabran student informatike pod uslovom da je sa završne godine.

Primjer 4-13: Rješenje

Definišimo sledeća dva događaja:

- A = izabrani student je sa završne godine
- B = izabrani student je student informatike

Na osnovu datih informacija,

$$P(A) = 0.20 \text{ i } P(A \text{ i } B) = 0.03$$

Otuda je,

$$P(B \mid A) = P(A \text{ i } B) / P(A) = 0.03 / 0.20 = 0.15$$

PRAVILO MNOŽENJA VJEROVATNOĆA ZA NEZAVISNE DOGAĐAJE

Pravilo množenja vjerovatnoća za izračunavanje vjerovatnoće nezavisnih događaja

Vjerovatnoća presjeka dva nezavisna događaja A i B je

$$P(A \text{ i } B) = P(A)\, P(B)$$

Primjer 4-14

U jednoj poslovnoj zgradi postoje dva detektora za požar. Vjerovatnoća da se bilo koji od njih neće uključiti za vrijeme požara je 0.02. Odrediti vjerovatnoću da se nijedan od ova dva detektora neće uključiti za vrijeme požara.

Primjer 4-14: Rješenje

Definišemo sledeća dva događaja:

A = prvi detektor se nije uključio za vrijeme požara
B = drugi detektor se nije uključio za vrijeme požara

Tako, zajednička vjerovatnoća A i B je

$$P(A \text{ i } B) = P(A)\, P(B) = (0.02)(0.02) = 0.0004$$

PRAVILO MNOŽENJA VJEROVATNOĆA ZA NEZAVISNE DOGAĐAJE

Zajednička vjerovatnoća međusobno isključivih događaja

Zajednička vjerovatnoća dva međusobno isključiva događaja je uvijek nula. Ako su *A* i *B* dva međusobno isključiva događaja, onda je

$$P(A \text{ i } B) = 0$$

4.5 UNIJA DOGAĐAJA I PRAVILO SABIRANJA VJEROVATNOĆA

Definicija

Neka su A i B dva događaja definisana u prostoru uzorka. ***Unija događaja*** A i B je skup svih ishoda koji pripadaju ili A ili B ili se nalaze u oba i u A i u B i označava se kao

$$A \text{ ili } B$$

Primjer 4-15

Centar za starije građane ima 300 članova. Od toga je 140 muškaraca, 210 redovno uzima barem jedan lijek, a 95 su muškarci *i* redovno uzimaju barem jedan lijek. Opišite uniju događaja „muško” i „redovno uzima barem jedan lijek.”

Primjer 4-15: Rješenje

- Definišimo sledeće događaje:
  M = stariji građanin je muško
  $Ž$ = stariji građanin je žensko
  A = stariji građanin uzima barem jedan lijek
  B = stariji građanin ne uzima nikakav lijek

- Unija događaja „muško” i „uzima barem jedan lijek” uključuje one starije građane koji su ili muškog pola ili uzimaju barem jedan lijek ili su i jedno i drugo. Broj takvih starijih građana je

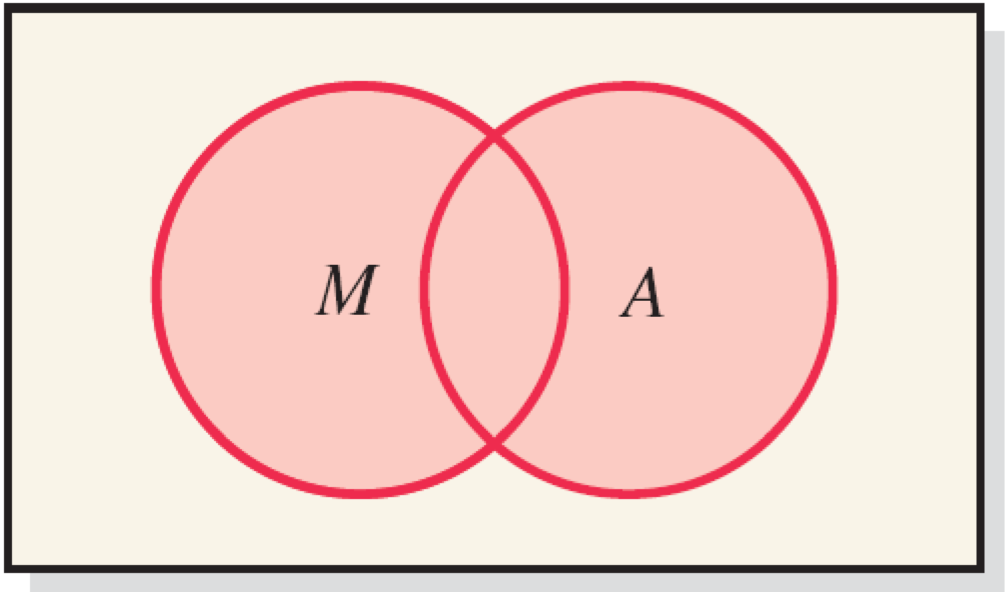
$$140 + 210 - 95 = 255$$

Tabela 4.7

	A	B	Ukupno
M	95	45	140
Ž	115	45	160
Ukupno	210	90	300

Računato dva puta

Slika 4.7 Unija događaja *M* i *A*.



Area shaded in red gives the union of events *M* and *A*, and includes 255 senior citizens

UNIJA DOGAĐAJA I PRAVILO SABIRANJA VJEROVATNOĆA

Pravilo sabiranja vjerovatnoća

Pravilo sabiranja vjerovatnoća za određivanje vjerovatnoće unije događaja

Vjerovatnoća unije dva događaja A i B je

$$P(A \text{ ili } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ i } B)$$

Primjer 4-16

Rektor univerziteta je predložio da svi studenti moraju obavezno da odaberu neki predmet iz etike da bi diplomirali. Tri stotine predstavnika fakulteta i studenata sa ovog univerziteta je pitano za mišljenje o ovom pitanju. Tabela 4.8 daje dvije klasifikacije odgovora tih predstavnika fakulteta i studenata.

Odrediti vjerovatnoću da je jedna slučajno odabrana osoba od ovih 300 predstavnik fakulteta ili da je za ovaj predlog.

Tabela 4.8 Dvije klasifikacije odgovora

	Za	Protiv	Neutralno	Ukupno
Fakultet	45	15	10	70
Student	90	110	30	230
Ukupno	135	125	40	300

Primjer 4-16: Rješenje

Definišimo sledeće događaje:

A = izabrana osoba je predstavnik fakulteta

B = izabrana osoba je za taj predlog

Iz informacija u Tabeli 4.9,

$P(A) = 70/300 = 0.2333$

$P(B) = 135/300 = 0.4500$

$P(\text{A i B}) = P(A)\, P(B \mid A) = (70/300)(45/70) = 0.1500$

Koristeći pravilo sabiranja vjerovatnoća, dobija se

$$P(A \text{ ili } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ i } B)$$

$$= 0.2333 + 0.4500 - 0.1500 = \mathbf{0.5333}$$

Pravilo sabiranja vjerovatnoća za međusobno isključive događaje

Pravilo sabiranja vjerovatnoća za određivanje vjerovatnoće unije međusobno isključivih događaja

Vjerovatnoća unije dva međusobno isključiva događaja A i B je

$$P(A \text{ ili } B) = P(A) + P(B)$$