

# POGLAVLJE 6

---

## **NEPREKIDNE SLUČAJNE PROMJENLJIVE I NORMALNA RASPODJELA**

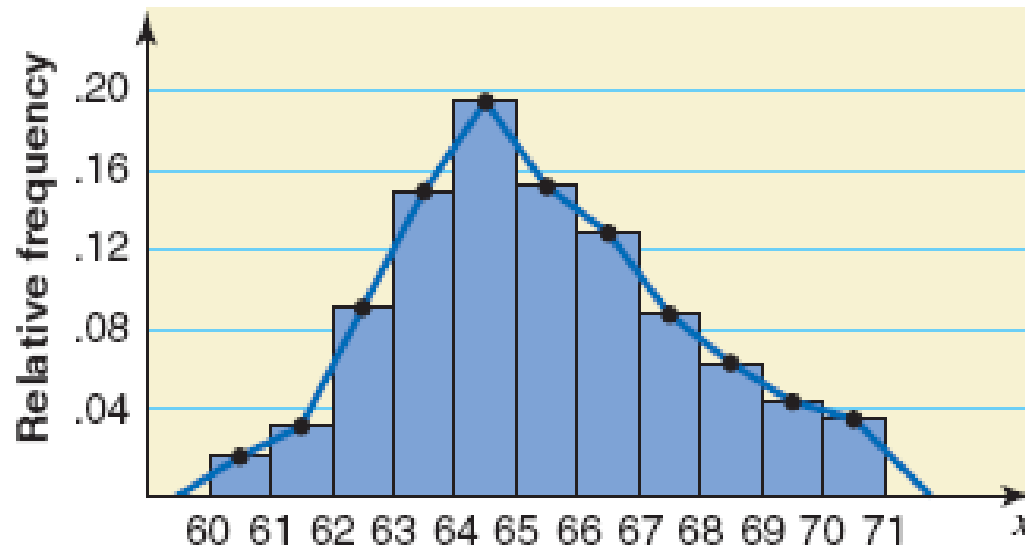
## 6.1 NEPREKIDNA RASPODJELA VJEROVATNOĆA

---

Visina studentkinja (u inčima) $x$	$f$	Relativna frekvencija
60 do 61	90	0.018
61 do 62	170	0.034
62 do 63	460	0.092
63 do 64	750	0.150
64 do 65	970	0.194
65 do 66	760	0.152
66 do 67	640	0.128
67 do 68	440	0.088
68 do 69	320	0.064
69 do 70	220	0.044
70 do 71	180	0.036
	$N=5000$	Zbir = 1

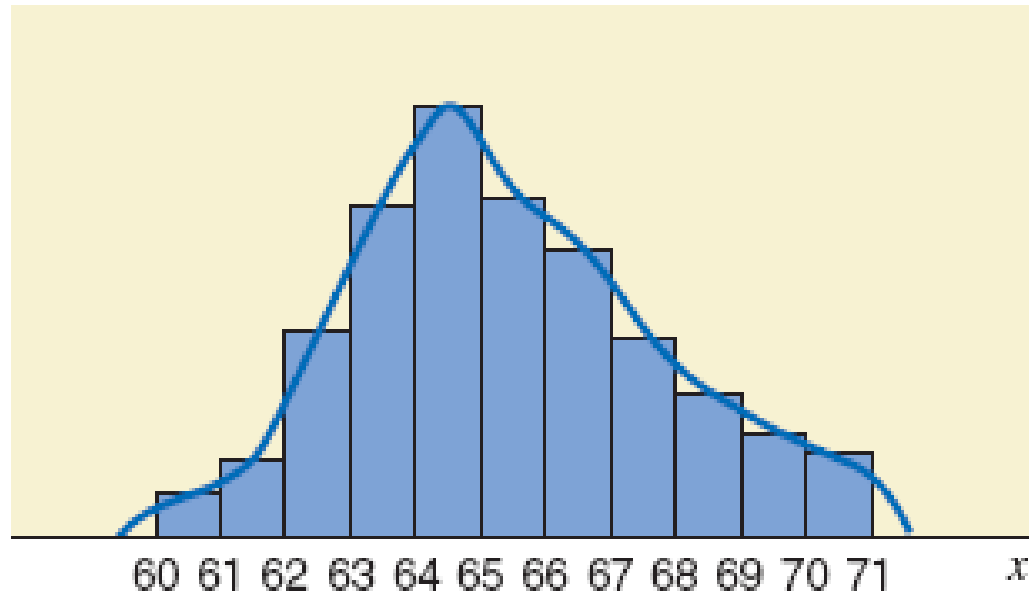
## Slika 6.1 Histogram i poligon za Tabelu 6.1.

---



# Slika 6.2 Glatki poligon raspodjele vjerovatnoća za visine.

---



# NEPREKIDNA RASPODJELA VJEROVATNOĆA

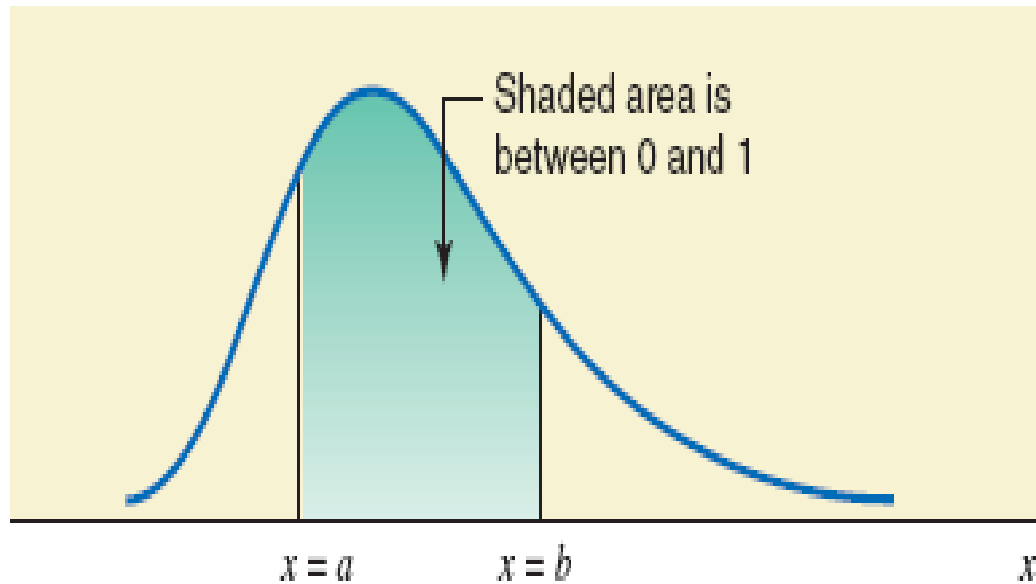
---

## Dvije karakteristike

1. Vjerovatnoća da  $x$  uzme vrijednost iz bilo kog intervala se nalazi u intervalu od 0 do 1
2. Ukupna vjerovatnoća svih (međusobno disjunktih) intervala u okviru kojih  $x$  može da uzme vrijednost je 1.0

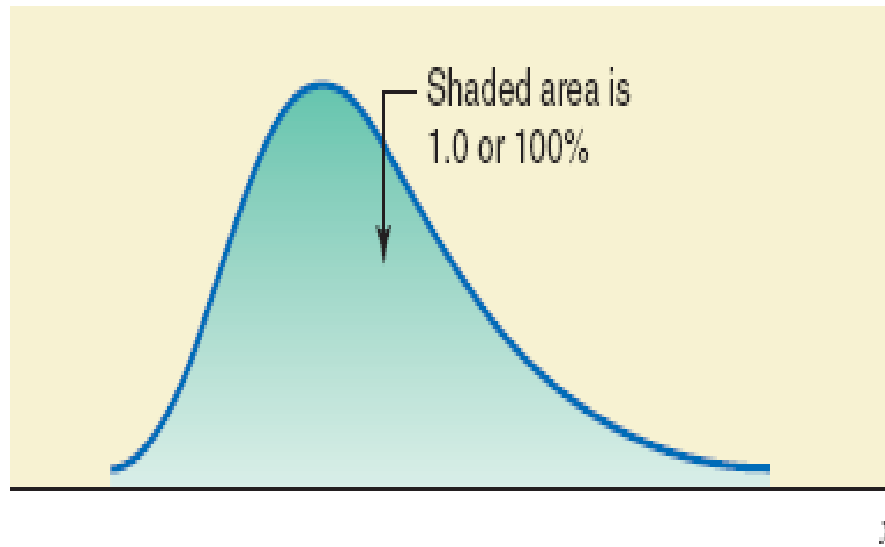
## Slika 6.3 Površina ispod krive između dvije tačke.

---



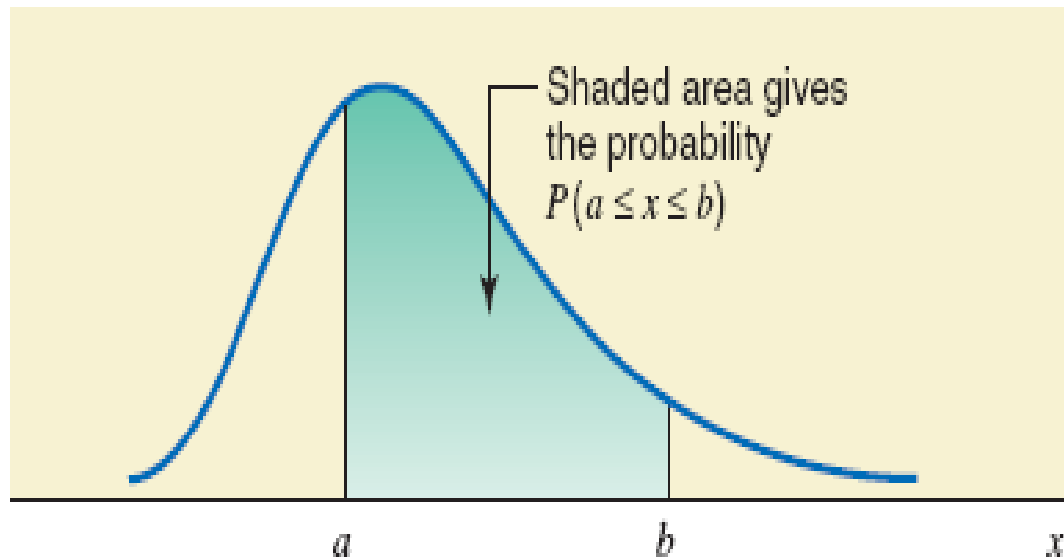
# Slika 6.4 Ukupna površina ispod krive raspodjele vjerovatnoća.

---



## Slika 6.5 Površina ispod krive kao vjerovatnoća.

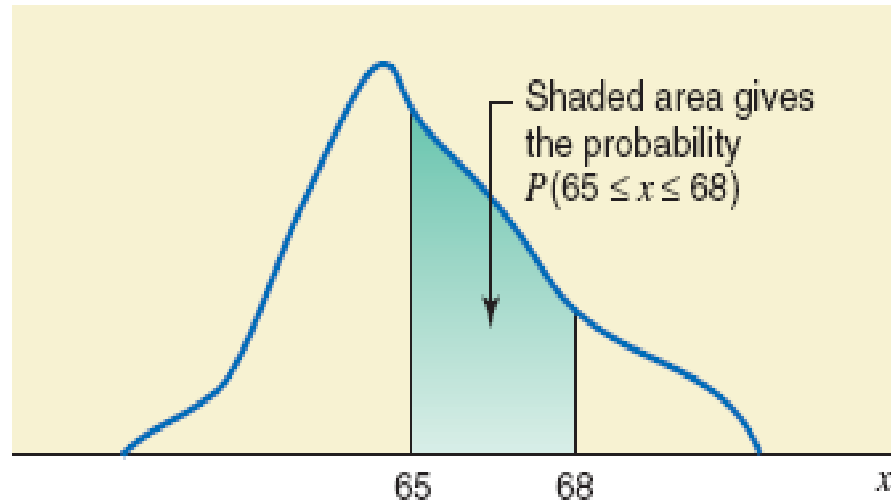
---





Slika 6.6 Vjerovatnoća da se  $x$  nađe u intervalu od 65 do 68.

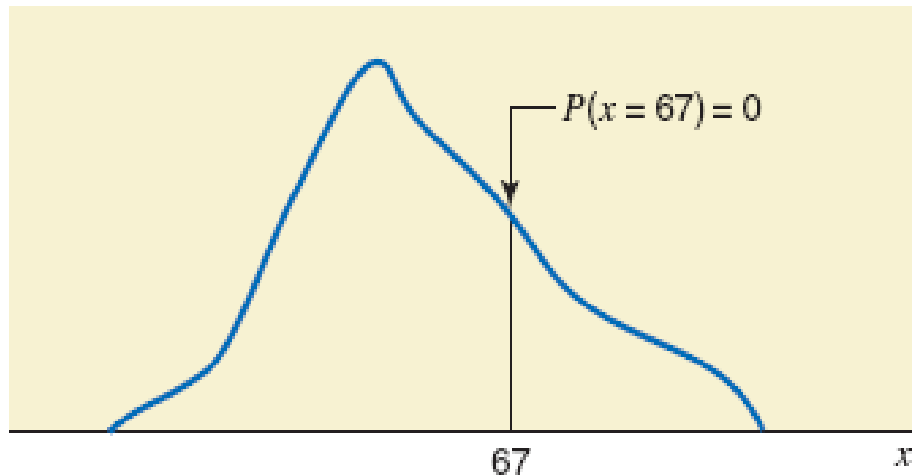
---



**Figure 6.6** Probability that  $x$  lies in the interval 65 to 68.

Slika 6.7 Vjerovatnoća da  $x$  uzme jednu vrijednost je nula.

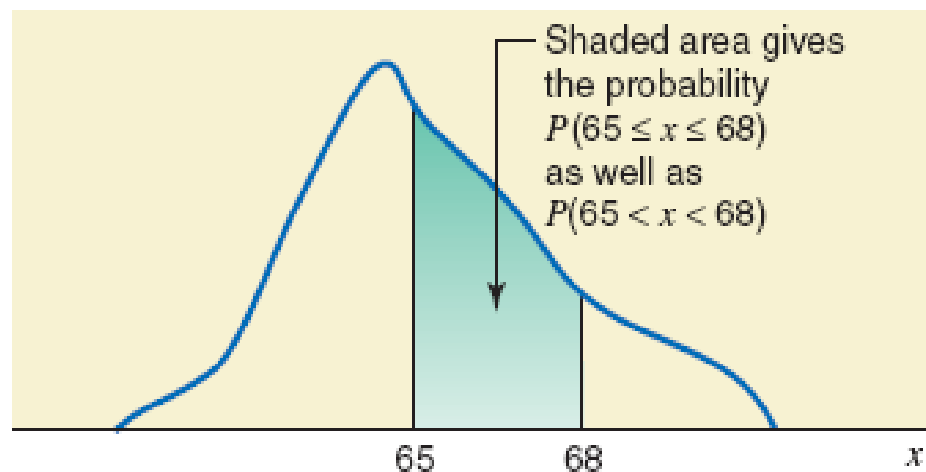
---



**Figure 6.7** The probability of a single value of  $x$  is zero.

Slika 6.8 Vjerovatnoća za “od 65 do 68” i “između 65 i 68”.

---



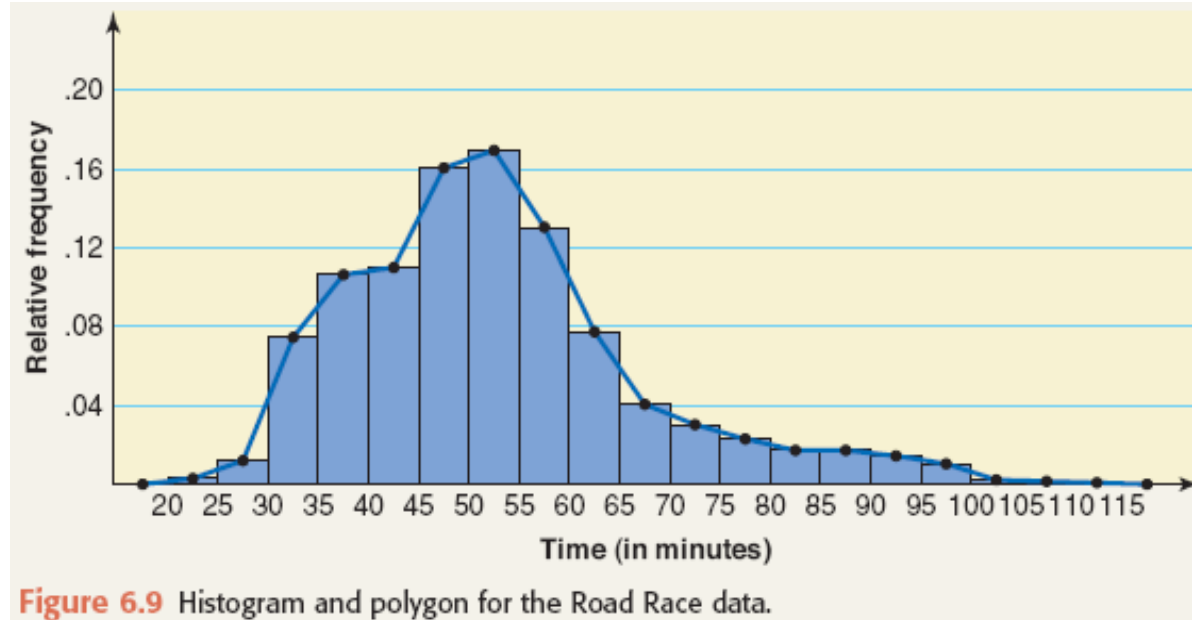
**Figure 6.8** Probability “from 65 to 68” and “between 65 and 68.”

# Studija slučaja 6-1 Raspodjela vremena potrebnog da se istrči ulična trka

Class	Frequency	Relative Frequency
20 to less than 25	30	.0029
25 to less than 30	208	.0199
30 to less than 35	771	.0739
35 to less than 40	1099	.1054
40 to less than 45	1137	.1090
45 to less than 50	1660	.1591
50 to less than 55	1751	.1679
55 to less than 60	1346	.1290
60 to less than 65	800	.0767
65 to less than 70	419	.0402
70 to less than 75	313	.0300
75 to less than 80	238	.0228
80 to less than 85	178	.0171
85 to less than 90	178	.0171
90 to less than 95	149	.0143
95 to less than 100	107	.0103
100 to less than 105	23	.0022
105 to less than 110	16	.0015
110 to less than 115	8	.0008
	$\Sigma f = 10,431$	Sum = 1.0001

# Studija slučaja 6-1 Raspodjela vremena potrebnog da se istrči ulična trka

---

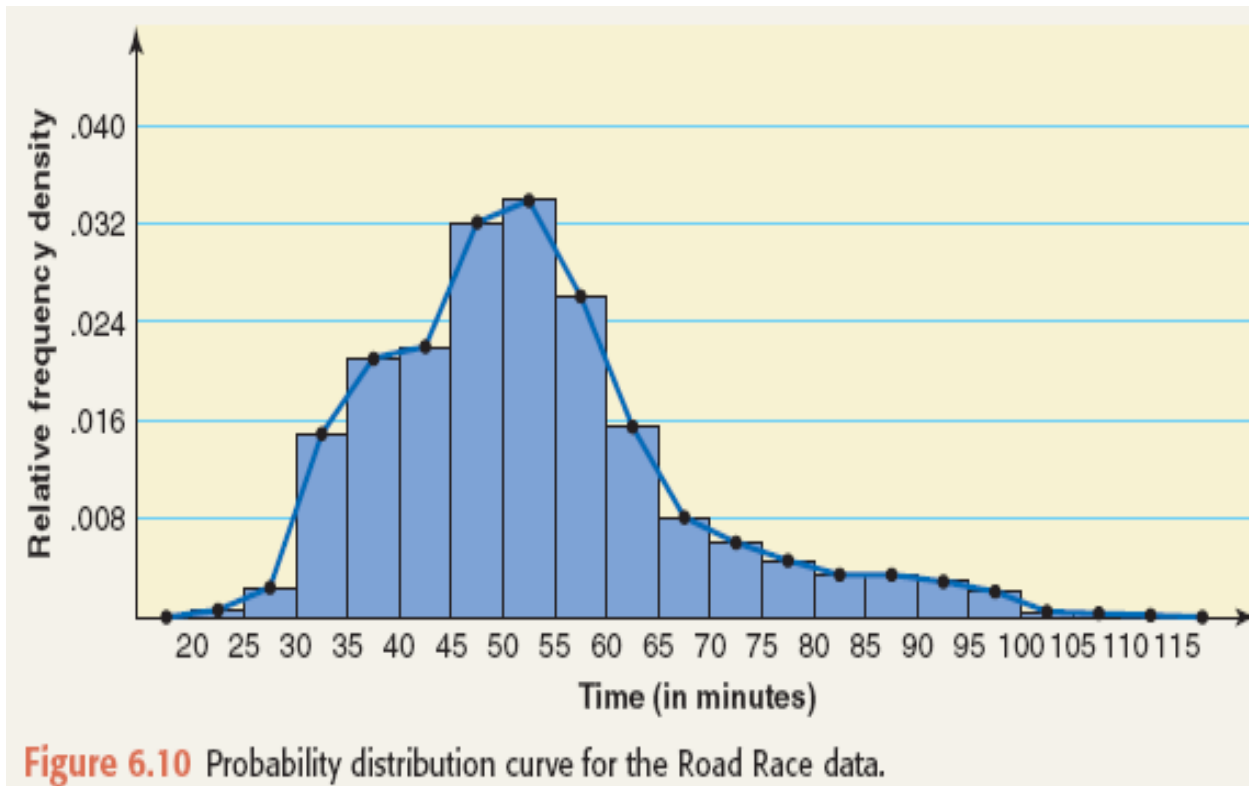


# Studija slučaja 6-1 Raspodjela vremena potrebnog da se istrči ulična trka

---

Class	Relative Frequency Density
20 to less than 25	.00058
25 to less than 30	.00398
30 to less than 35	.01478
35 to less than 40	.02108
40 to less than 45	.02180
45 to less than 50	.03182
50 to less than 55	.03358
55 to less than 60	.02580
60 to less than 65	.01534
65 to less than 70	.00804
70 to less than 75	.00600
75 to less than 80	.00456
80 to less than 85	.00342
85 to less than 90	.00342
90 to less than 95	.00286
95 to less than 100	.00206
100 to less than 105	.00044
105 to less than 110	.00030
110 to less than 115	.00016

# Studija slučaja 6-1 Raspodjela vremena potrebnog da se istrči ulična trka



## 6.2 NORMALNA RASPODJELA

---

Normalna raspodjela vjerovatnoća

**Normalna raspodjela vjerovatnoća,**

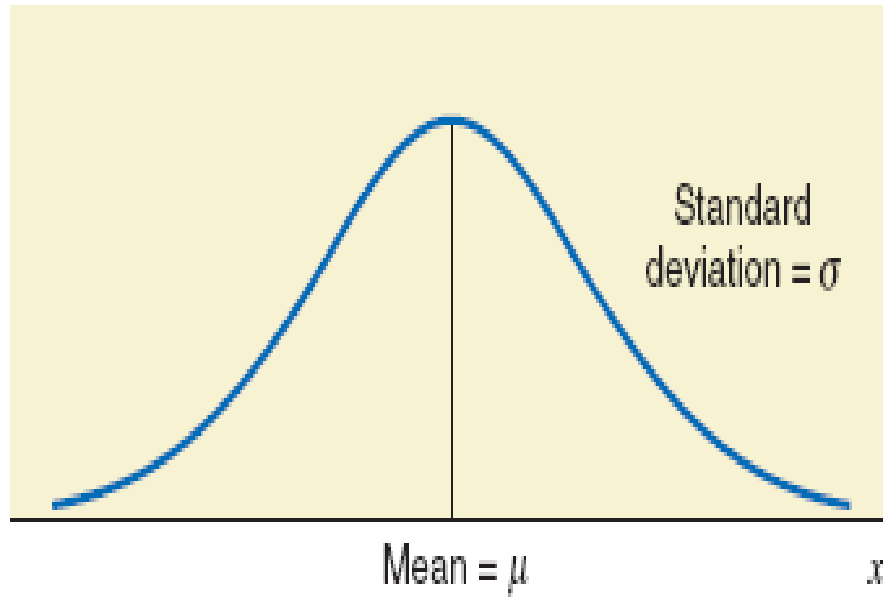
kada se grafički prikaže, daje krivu u obliku zvona takvu da:

1. Ukupna površina ispod krive je 1.0.
2. Kriva je simetrična u odnosu na aritmetičku sredinu.
3. Dva kraja krive se protežu u beskonačnost.



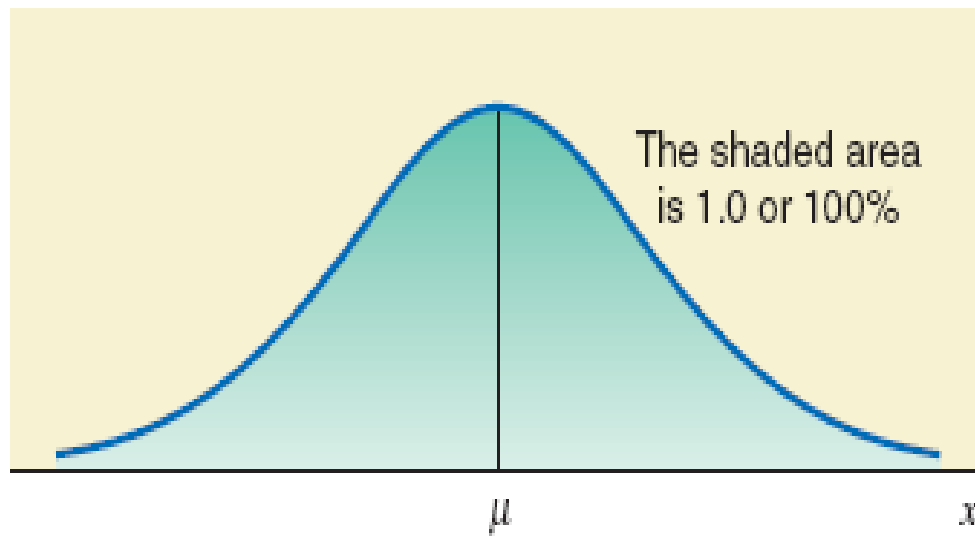
Slika 6.11 Normalna raspodjela sa aritmetičkom sredinom  $\mu$  i standardnom devijacijom  $\sigma$ .

---



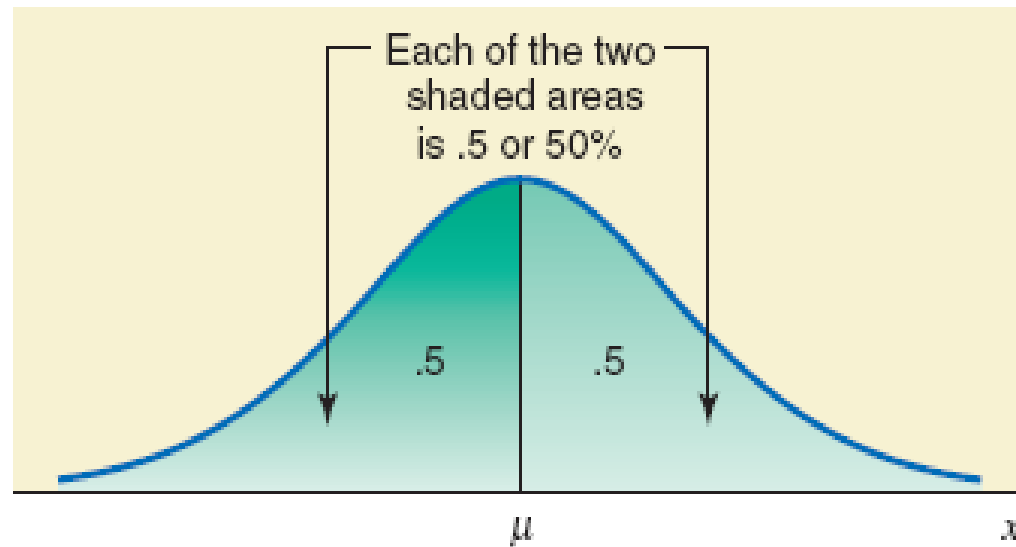
## Slika 6.12 Ukupna površina ispod normalne krive.

---



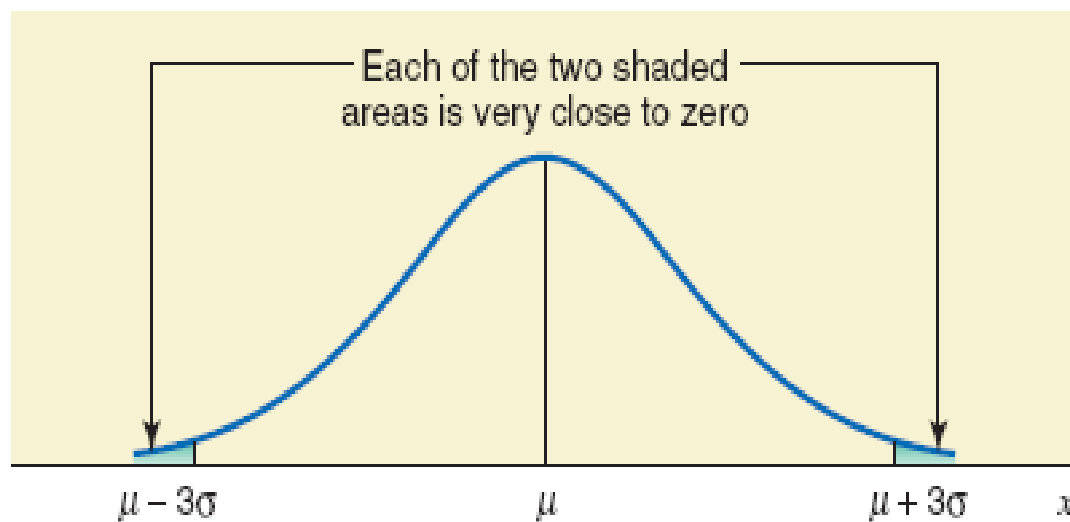
Slika 6.13 Normalna kriva je simetrična u odnosu na aritmetičku sredinu.

---



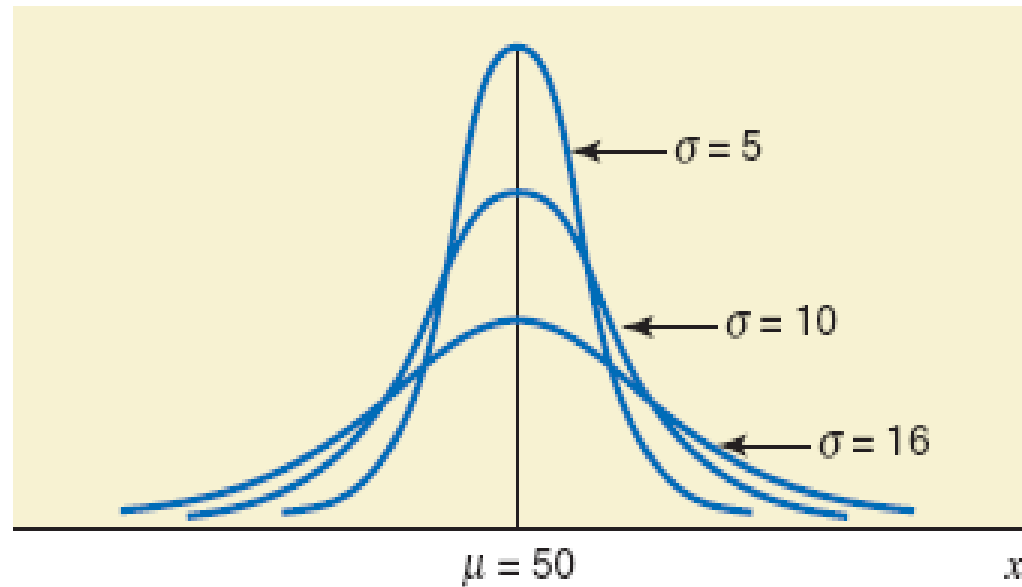
# Slika 6.14 Površine ispod normalne krive izvan $\mu \pm 3\sigma$ .

---



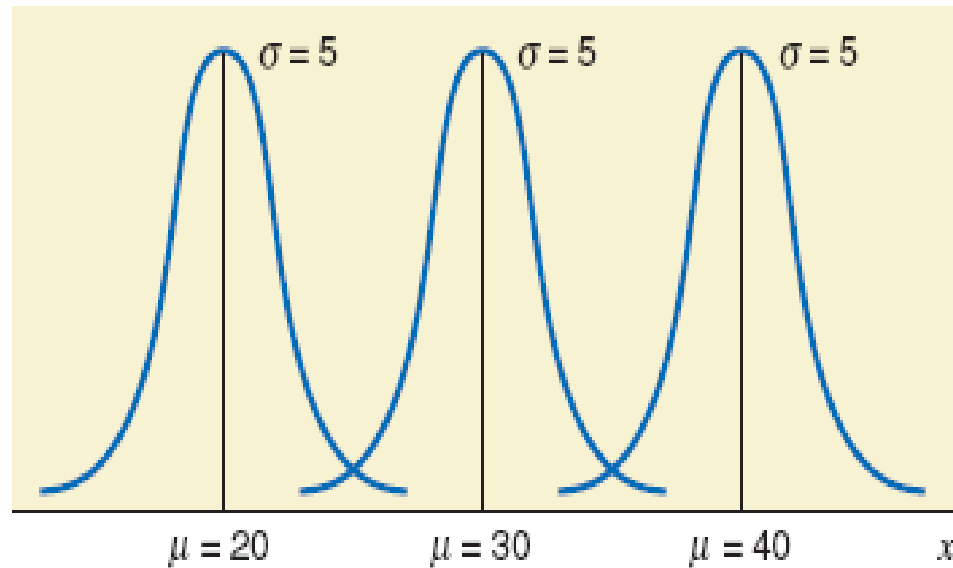
Slika 6.15 Tri krive normalne raspodjele sa istom aritmetičkom sredinom ali različitim standardnim devijacijama.

---



Slika 6.16 Tri krive normalne raspodjele sa različitim aritmetičkim sredinama ali sa istom standardnom devijacijom.

---



## 6.3 STANDARDIZOVANA NORMALNA RASPODJELA

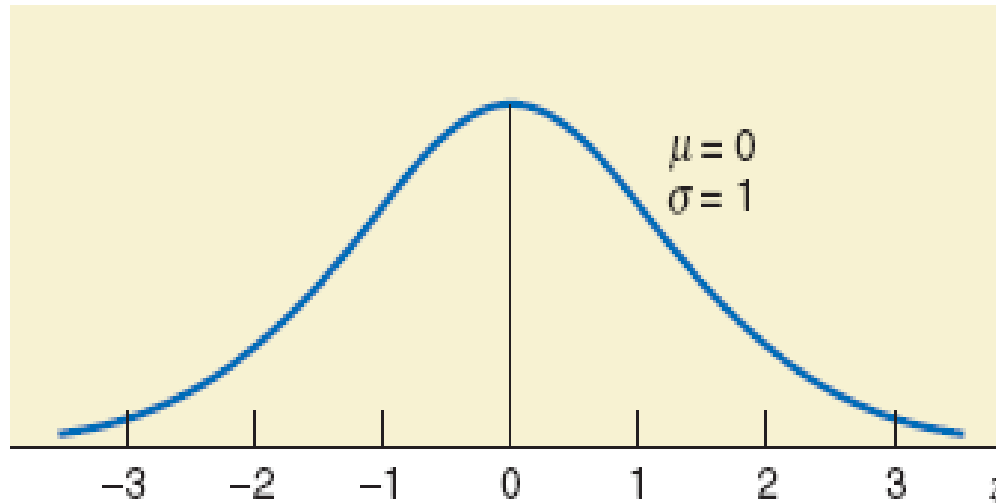
---

### Definicija

Normalna raspodjela sa  $\mu = 0$  i  $\sigma = 1$  se naziva ***standardizovana normalna raspodjela***.

# Slika 6.17 Kriva standardizovane normalne raspodjele.

---





# STANDARDIZOVANA NORMALNA RASPODJELA

---

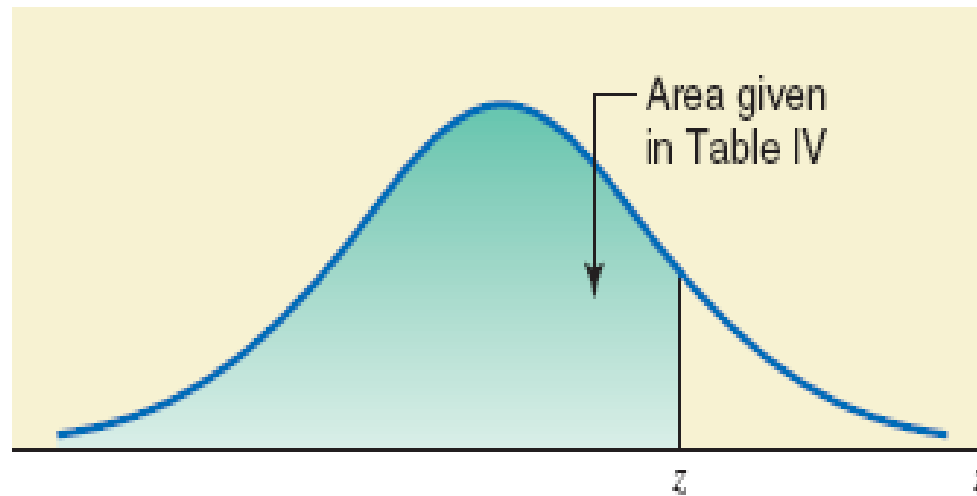
$z$  vrijednosti ili  $z$  rezultati

Definicija

Vrijednosti na horizontalnoj osi kod standardizovane normalne krive se označavaju sa  $z$  i nazivaju se  $z$  **vrijednostima ili  $z$  rezultatima**. Određena vrijednost  $z$  predstavlja rastojanje između aritmetičke sredine i tačke koja je prikazana sa  $z$  iskazano u standardnim devijacijama.

# Slika 6.18 Površina ispod standardizovane normalne krive.

---



## Primjer 6-1

---

Odrediti površinu ispod standardizovane normalne krive ulijevo od  $z = 1.95$ .

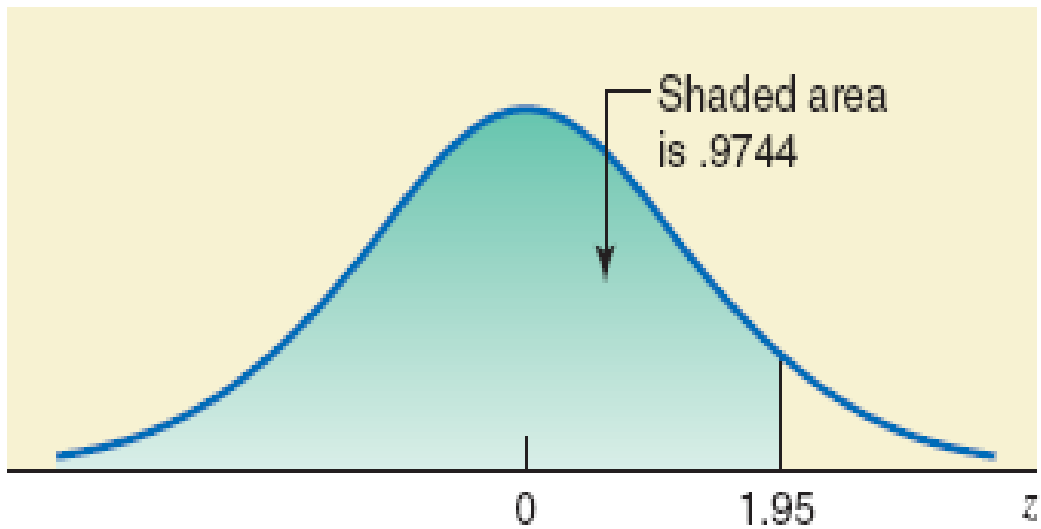
Tabela 6.2 Površina ispod standardizovane normalne krive ulijevo od  $z = 1.95$

$z$	.00	.01	...	.05	...	.09
-3.4	.0003	.0003	...	.0003	...	.0002
-3.3	.0005	.0005	...	.0004	...	.0003
-3.2	.0007	.0007	...	.0006	...	.0005
.	.	.	...	.	...	.
.	.	.	...	.	...	.
.	.	.	...	.	...	.
1.9	.9713	.9719	...	.9744	...	.9767
.	.	.	...	.	...	.
.	.	.	...	.	...	.
.	.	.	...	.	...	.
3.4	.9997	.9997	...	.9997	...	.9998

Required area

# Slika 6.19 Površina ulijevo od $z = 1.95$ .

---



## Primjer 6-2

---

Odrediti površinu ispod standardizovane normalne krive od  $z = -2.17$  do  $z = 0$ .

## Primjer 6-2: Rješenje

---

- Da bismo odredili površinu od  $z = -2.17$  do  $z = 0$ , prvo određujemo površinu ulijevo od  $z = 0$  i površinu ulijevo od  $z = -2.17$  u Tablici IV. Kao što je prikazano u Tabeli 6.3, ove dvije površine su 0.5 i 0.0150, respektivno. Zatim oduzimamo 0.0150 od 0.5 da bismo odredili traženu površinu.
- Površina od  $-2.17$  do  $0 = P(-2.17 \leq z \leq 0)$   
 $= 0.5000 - 0.0150 = \mathbf{0.4850}$

# Tabela 6.3 Površina ispod standardizovane normalne krive

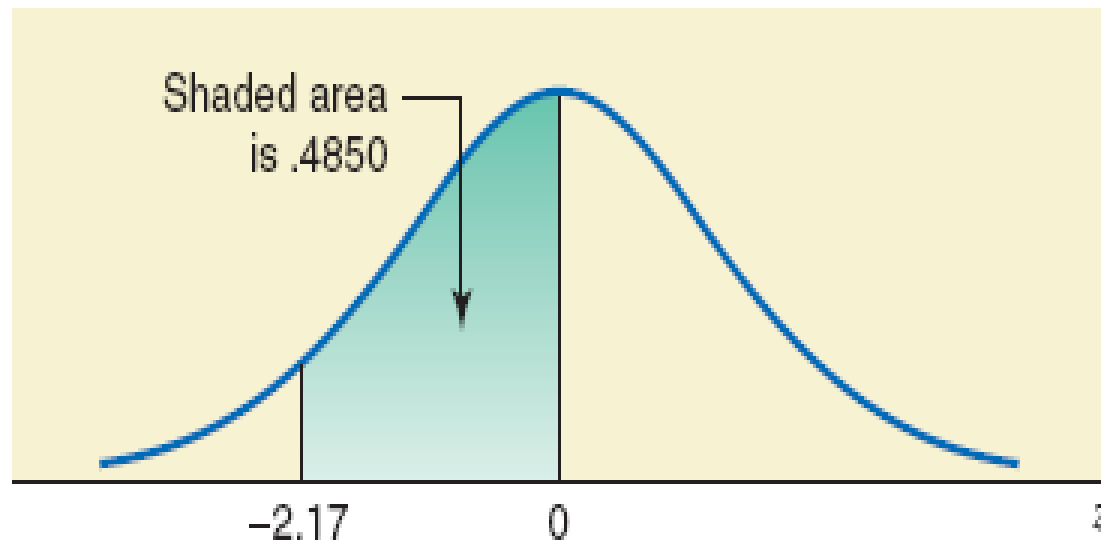
z	00	.01	...	.07	...	.09
-3.4	.0003	.0003	...	.0003	...	.0002
-3.3	.0005	.0005	...	.0004	...	.0003
-3.2	.0007	.0007	...	.0005	...	.0005
.	.	.	...	.	...	.
.	.	.	...	.	...	.
-2.1	.0179	.0174	...	.0150	...	.0143
.	.	.	...	.	...	.
.	.	.	...	.	...	.
0.0	.5000	.5040	...	.5279	...	.5359
.	.	.	...	.	...	.
.	.	.	...	.	...	.
3.4	.9997	.9997	...	.9997	...	.9998

← Area to the left of  $z = 0$ 
← Area to the left of  $z = -2.17$



Slika 6.20 Površina od  $z = -2.17$  do  $z = 0$ .

---



## Primjer 6-3

---

Odrediti sledeće površine ispod standardizovane normalne krive.

- a) Površina udesno od  $z = 2.32$
- b) Površina ulijevo od  $z = -1.54$

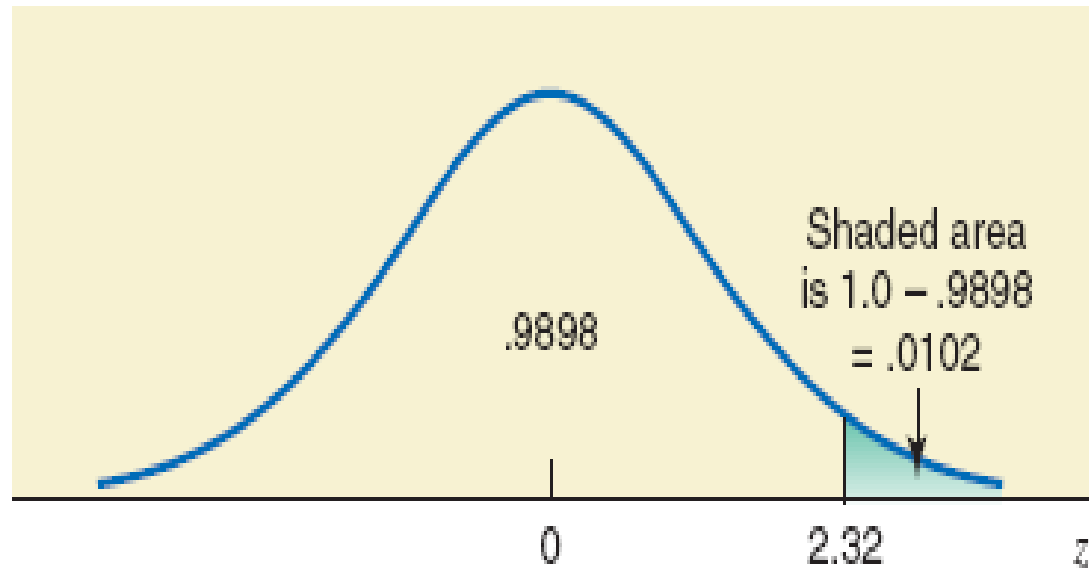
## Primjer 6-3: Rješenje

---

- a) Da bismo odredili površinu udesno od  $z=2.32$ , prvo nalazimo površinu ulijevo od  $z=2.32$ . Onda oduzimamo ovu površinu od 1.0, što je ukupna površina ispod krive. Tražena površina je  $1.0 - 0.9898 = 0.0102$ .

## Slika 6.21 Površina udesno od $z = 2.32$ .

---



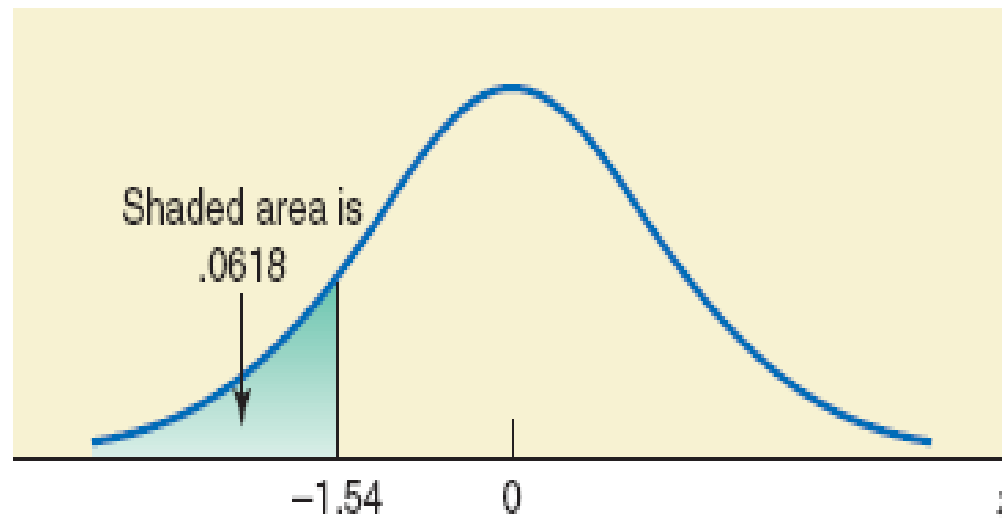
## Primjer 6-3: Rješenje

---

- b) Da bismo odredili površinu ispod standardizovane normalne krive ulijevo od  $z = -1.54$ , U Tablici IV nalazimo površinu koja odgovara za  $-1.5$  iz  $z$  kolone i za  $0.04$  iz prvog reda iz zaglavlja tablice. Ova površina je  $0.0618$ . Površina ulijevo od  $-1.54$
- $$= P(z < -1.54) = 0.0618$$

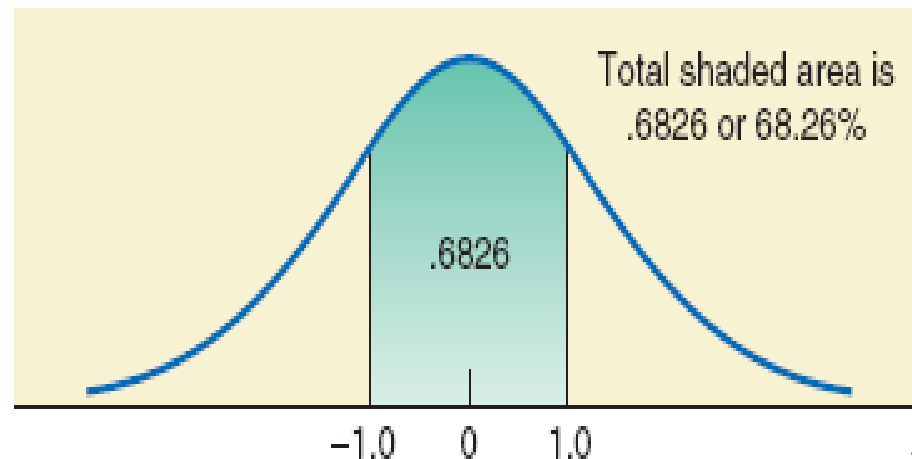
## Slika 6.22 Površina ulijevo od $z = -1.54$ .

---



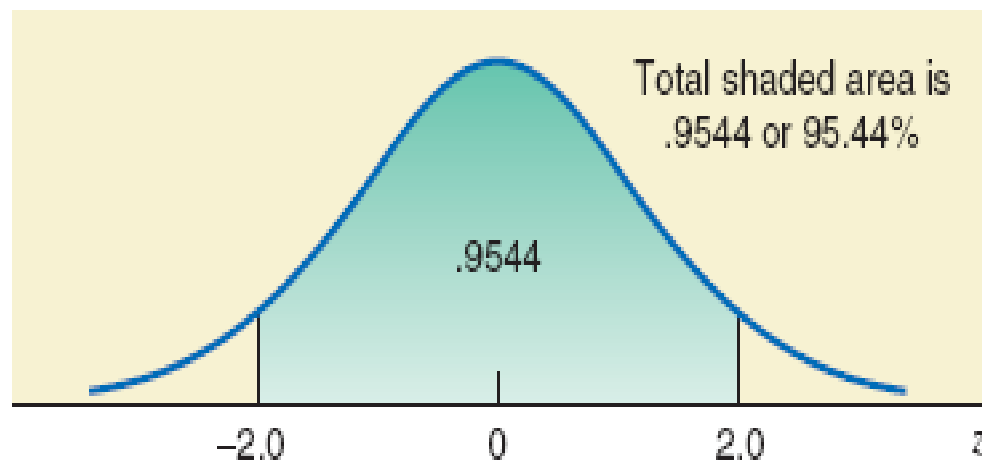
# Slika 6.26 Površina u opsegu jedne standardne devijacije od aritmetičke sredine.

---



# Slika 6.27 Površina u opsegu dvije standardne devijacije od aritmetičke sredine.

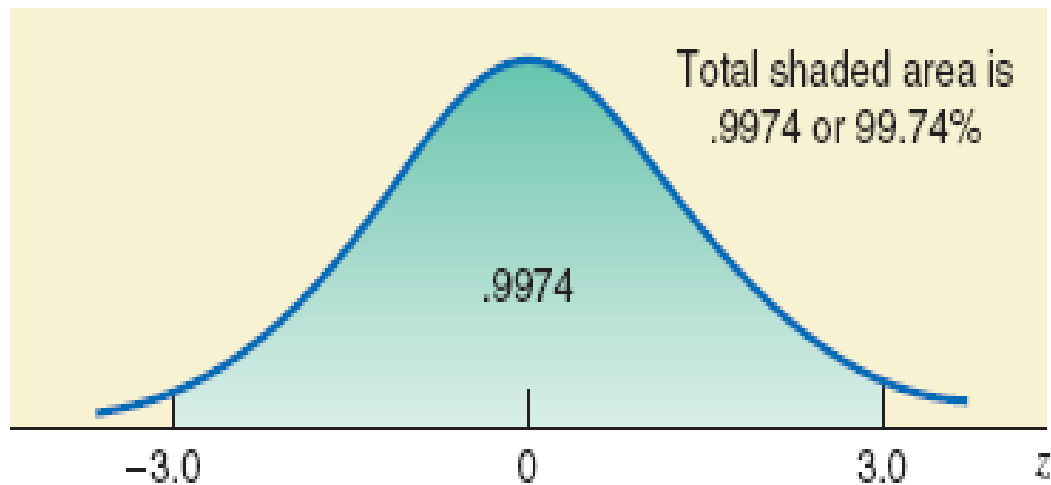
---





Slika 6.28 Površina u opsegu tri standardne devijacije od aritmetičke sredine.

---



## 6.4 STANDARDIZACIJA NORMALNE RASPODJELE

---

### Transformisanje vrijednosti $x$ u vrijednost $z$

Kod normalne slučajne promjenljive  $x$ , određena (realizovana) vrijednost  $x$  može da se transformiše u odgovarajuću vrijednost  $z$  korišćenjem formule

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

gdje su  $\mu$  i  $\sigma$  aritmetička sredina i standardna devijacija normalne raspodjele za  $x$ , respektivno.

## Primjer 6-6

---

Neka je  $x$  neprekidna slučajna promjenljiva koja ima normalnu raspodjelu sa aritmetičkom sredinom 50 i standardnom devijacijom 10. Transformisati sledeće vrijednosti  $x$  u vrijednosti  $z$  i odrediti vjerovatnoću ulijevo od ovih tačaka.

a)  $x = 55$

b)  $x = 35$

## Primjer 6-6: Rješenje

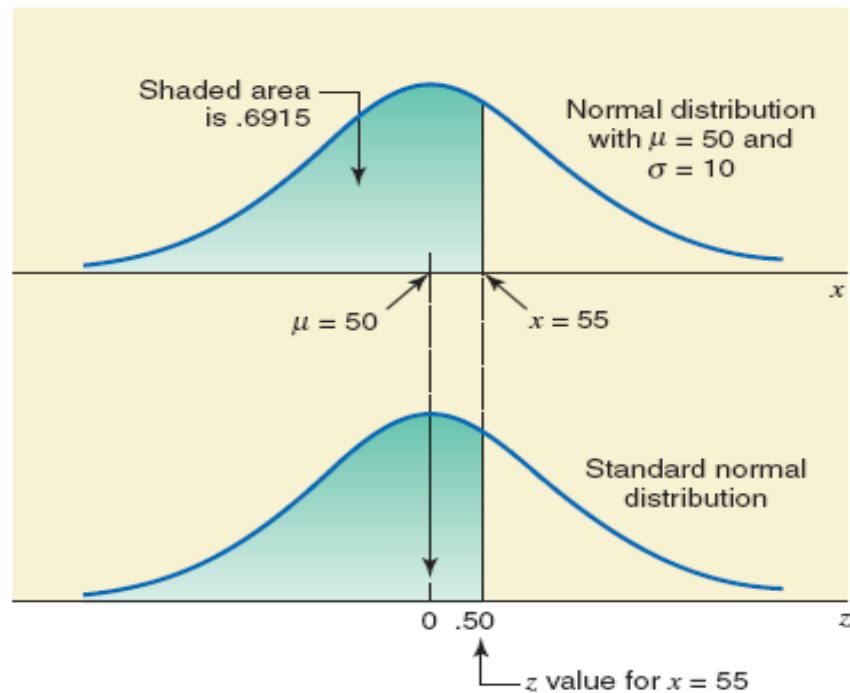
---

a)  $x = 55$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{55 - 50}{10} = .50$$

$$P(x < 55) = P(z < 0.50) = 0.6915$$

Slika 6.31 z vrijednost za  $x = 55$ .



## Primjer 6-6: Rješenje

---

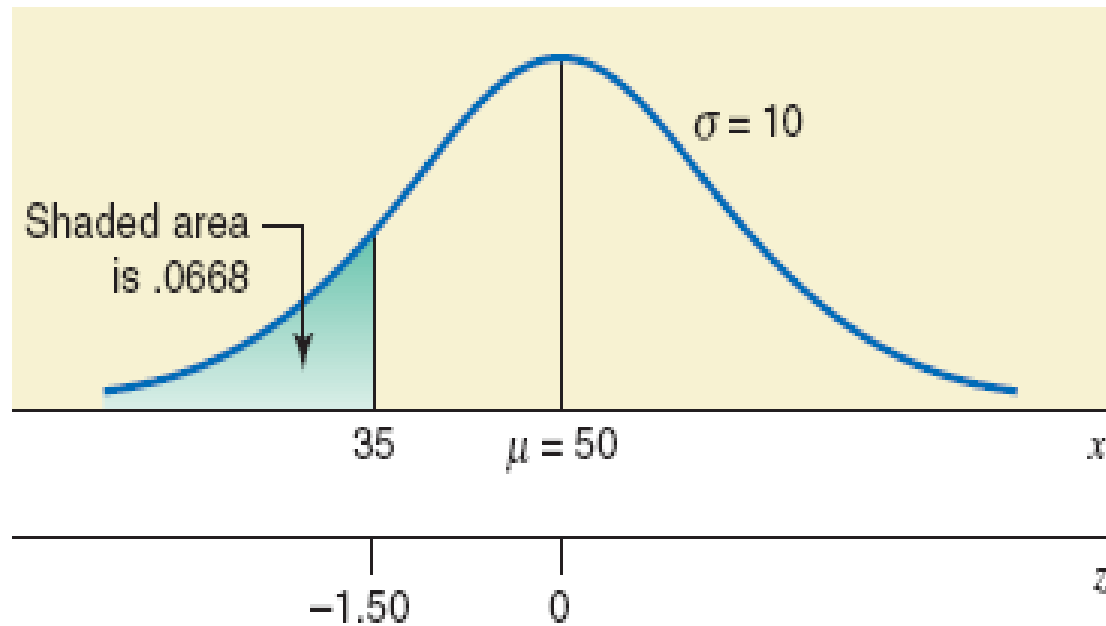
b)  $x = 35$

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{x} - \mu}{\sigma} = \frac{\mathbf{35} - \mathbf{50}}{\mathbf{10}} = \mathbf{-1.50}$$

$$P(x < 35) = P(z < -1.50) = 0.0668$$

Slika 6.32 z vrijednost za  $x = 35$ .

---



## Primjer 6-7

---

Neka je  $x$  neprekidna slučajna promjenljiva koja je normalno raspodijeljena sa aritmetičkom sredinom 25 i standardnom devijacijom 4.

Odrediti površinu

- a) između  $x = 25$  i  $x = 32$
- b) između  $x = 18$  i  $x = 34$



## Primjer 6-7: Rješenje

---

a)

□ Vrijednost  $z$  za  $x = 25$  je 0

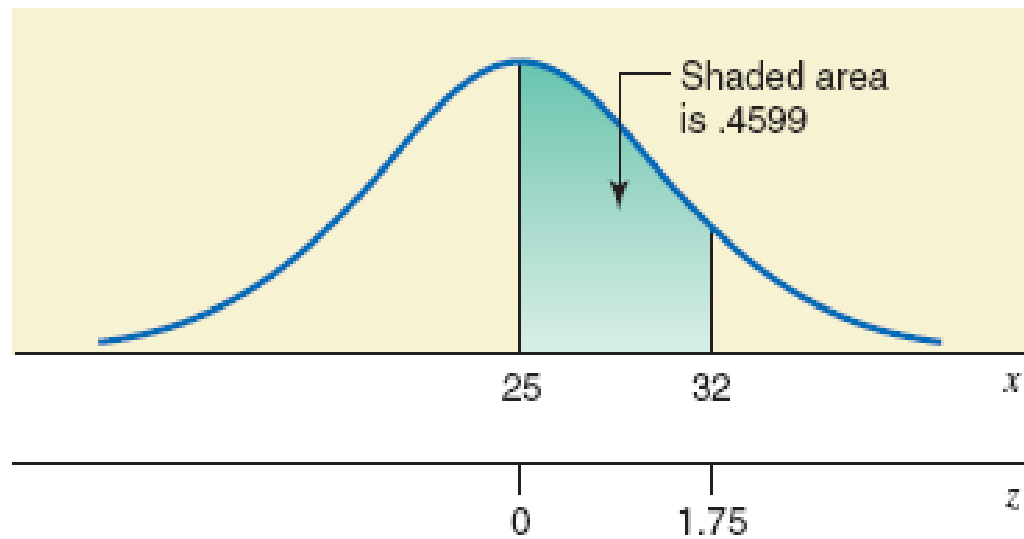
□ Vrijednost  $z$  za  $x = 32$  je

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{32 - 25}{4} = 1.75$$

□  $P(25 < x < 32) = P(0 < z < 1.75)$   
 $= 0.4599$

# Slika 6.33 Površina između $x = 25$ i $x = 32$ .

---



## Primjer 6-7: Rješenje

---

b)

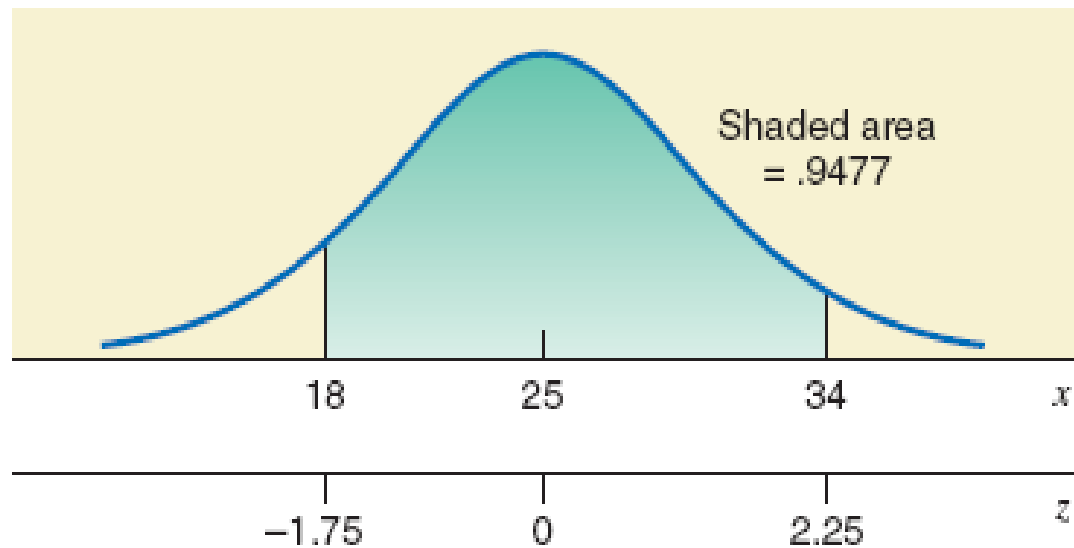
□ Za  $x = 18$ : 
$$z = \frac{18 - 25}{4} = -1.75$$

□ Za  $x = 34$ : 
$$z = \frac{34 - 25}{4} = 2.25$$

□ 
$$P(18 < x < 34) = P(-1.75 < z < 2.25)$$
$$= 0.9878 - 0.0401 = 0.9477$$

# Slika 6.34 Površina između $x = 18$ i $x = 34$ .

---



## 6.5 PRIMJENE NORMALNE RASPODJELE

---

U odjeljcima od 6.2 do 6.4 smo proučili normalnu raspodjelu, kako da transformišemo normalnu raspodjelu u standardizovanu normalnu raspodjelu i kako da odredimo površine ispod krive normalne raspodjele. Sada predstavljamo primjere koji ilustruju primjene normalne raspodjele.

## Primjer 6-11

---

Prema podacima Sallie Mae i kreditnog biroa, studenti su 2008. godine na svojim kreditnim karticama imali u prosjeku \$3173 duga (*USA TODAY*, 13. april, 2009.). Pretpostavimo da trenutni dugovi na kreditnim karticama svih studenata imaju normalnu raspodjelu sa aritmetičkom sredinom \$3173 i standardnom devijacijom \$800. Odrediti vjerovatnoću da je dug na kreditnoj kartici slučajno izabranog studenta između \$2109 i \$3605.

## Primjer 6-11: Rješenje

---

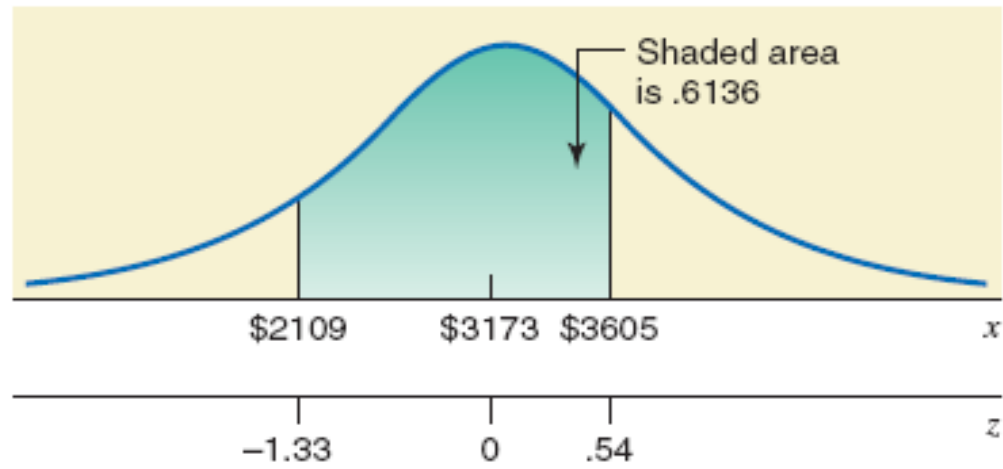
□ Za  $x = \$2109$ :  $z = \frac{2109 - 3173}{800} = -1.33$

□ Za  $x = \$3605$ :  $z = \frac{3605 - 3173}{800} = .54$

□  $P(\$2109 < x < \$3605)$   
 $= P(-1.33 < z < 0.54)$   
 $= 0.7054 - 0.0918$   
 $= 0.6136 = 61.36\%$

Slika 6.40 Površina između  $x = \$2109$  i  $x = \$3605$ .

---





## Primjer 6-12

---

Trkački automobil je jedna od mnogih igračaka koje proizvodi Mack Corporation. Vrijeme sastavljanja ove igračke prati normalnu raspodjelu sa aritmetičkom sredinom 55 minuta i standardnom devijacijom 4 minuta. Kompanija se zatvara u 17h svakoga dana. Ako jedna radnica počne da sastavlja ovu igračku u 16h, kolika je vjerovatnoća da će završiti sastavljanje prije nego se kompanija toga dana zatvori?

## Primjer 6-12: Rješenje

---

- Za  $x = 60$ :

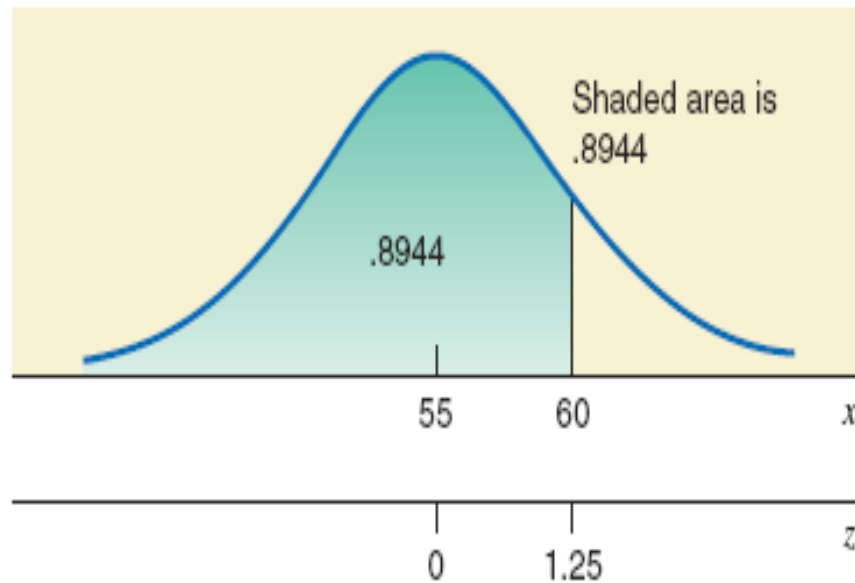
$$z = \frac{60 - 55}{4} = -1.25$$

- $P(x \leq 60) = P(z \leq 1.25) = 0.8944$

- Dakle, vjerovatnoća da će radnica završiti sastavljanje ove igračke prije nego se kompanija toga dana zatvori iznosi 0.8944.

# Slika 6.41 Površina ulijevo $x = 60$ .

---



## **6.6 ODREĐIVANJE VRIJEDNOSTI $z$ I $x$ KADA JE POZNATA POVRŠINA ISPOD KRIVE NORMALNE RASPODJELE**

---

Sada ćemo naučiti kako da odredimo odgovarajuće vrijednosti  $z$  ili  $x$  kada je površina ispod krive normalne raspodjele poznata.

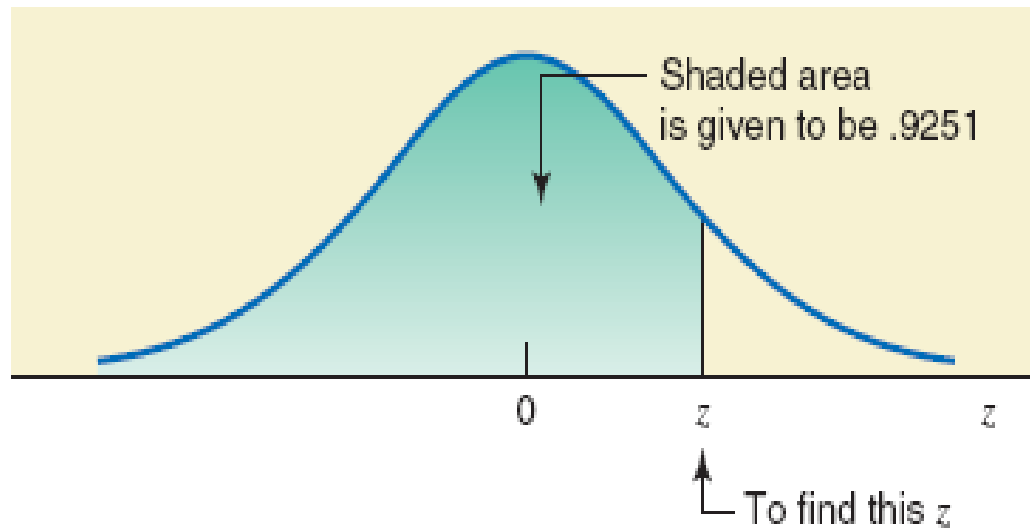
## Primjer 6-15

---

Odrediti tačku  $z$  tako da je površina ispod standardizovane normalne krive ulijevo od  $z$  jednaka 0.9251.

## Slika 6.45 Određivanje vrijednosti $z$ .

---



# Tabela 6.4 Određivanje vrijednosti $z$ kada je površina poznata.

$z$	.00	.01	...	<b>.04</b>	...	.09
-3.4	.0003	.0003	...		...	.0002
-3.3	.0005	.0005	...		...	.0003
-3.2	.0007	.0007	...		...	.0005
.	.	.	...		...	.
.	.	.	...		...	.
.	.	.	...		...	.
<b>1.4</b>				<b>.9251</b>		
.	.	.	...	.	...	.
.	.	.	...	.	...	.
.	.	.	...	.	...	.
3.4	.9997	.9997	...	.9997	...	.9998

We locate this value in Table IV of Appendix C

## Primjer 6-16

---

Odrediti vrijednost  $z$  takvu da je površina ispod standardizovane normalne krive na desnom kraju raspodjele jednaka 0.0050.



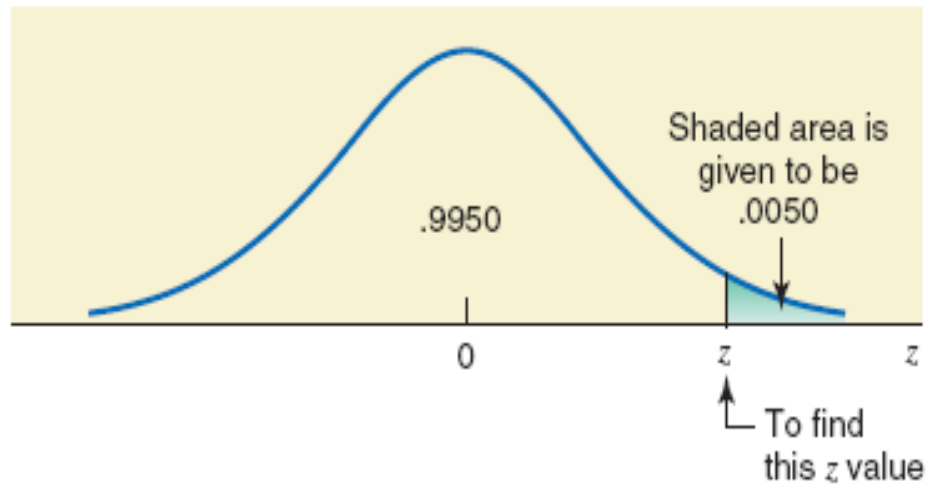
## Primjer 6-16: Rješenje

---

- Površina ulijevo od  $z = 1.0 - 0.0050 = 0.9950$
- Potražimo 0.9950 u tablicama normalne raspodjele. U Tablici IV se ne nalazi 0.9950.
- Naći vrijednost najbližu vrijednosti 0.9950, što je ili 0.9949 ili 0.9951.
- Ako izaberemo 0.9951,  $z = \mathbf{2.58}$ .
- Ako izaberemo 0.9949,  $z = \mathbf{2.57}$ .

# Slika 6.46 Određivanje vrijednosti $z$ .

---



## Određivanje vrijednosti $x$ za normalnu raspodjelu

---

Za normalnu krivu, sa poznatim vrijednostima  $\mu$  i  $\sigma$  i za datu površinu ispod krive ulijevo od  $x$ , vrijednost  $x$  se izračunava kao

$$x = \mu + z\sigma$$

## Primjer 6-18

---

Poznato je da životni vijek kalkulatora proizvedenog u Texas Instruments ima normalnu raspodjelu sa aritmetičkom sredinom 54 mjeseca i standardnom devijacijom 8 mjeseci. Koliki bi trebalo da bude garantni rok za zamjenu neispravnog kalkulatora ako preduzeće ne želi da zamijeni više od 1% svih prodatih kalkulatora?

## Primjer 6-18: Rješenje

---

- Površina ulijevo od  $x = 0.01$  ili 1%
- Naći  $z$  vrijednost iz tablica normalne raspodjele za 0.0100. Tablica IV ne sadrži tačno vrijednost 0.0100.
- Najbliža vrijednost vrijednosti 0.0100 u tablici je 0.0099.  $z = -2.33$ .
- $$x = \mu + z\sigma = 54 + (-2.33)(8)$$
$$= 54 - 18.64 = 35.36$$

## Primjer 6-18: Rješenje

---

Dakle, preduzeće bi trebalo da zamijeni sve kalkulatore koji počinju da se kvare u roku od 35.36 mjeseci (što se može zaokružiti na 35 mjeseci) od datuma kupovine, tako da neće morati da zamijeni više od 1% kalkulatora.

## Slika 6.48 Određivanje vrijednosti $x$ .

