POGLAVLJE 8

OCJENJIVANJE ARITMETIČKE SREDINE I PROPORCIJE

8.1 OCJENJIVANJE: UVOD

Definicija

Dodjela vrijednosti parametru osnovnog skupa zasnovano na vrijednosti odgovarajuće statistike uzorka se naziva ***ocjenjivanje***.

OCJENJIVANJE: UVOD

Definicija

Vrijednost(i) dodijeljena parametru skupa zasnovana na vrijednosti statistike uzorka naziva se ***ocijenjena vrijednost***.

Statistika uzorka koja se koristi za ocjenjivanje parametra skupa naziva se ***ocjena***.

OCJENJIVANJE: UVOD

Postupak ocjenjivanja uključuje sledeće etape.

- Izbor uzorka.
- Prikupljanje neophodnih informacija od jedinica uzorka.
- Izračunavanje vrijednosti statistike uzorka.
- Dodjela vrijednosti odgovarajućem parametru skupa.

8.2 TAČKASTE I INTERVALNE OCIJENJENE VRIJEDNOSTI

- Tačkasta ocijenjena vrijednost
- Intervalna ocijenjena vrijednost

Tačkasta ocijenjena vrijednost

Definicija

Vrijednost statistike uzorka koja se koristi za ocjenu parametra skupa naziva se ***tačkasta ocijenjena vrijednost***.

Tačkasta ocijenjena vrijednost

- Obično, kad god koristimo tačkasto ocijenjivanje, izračunavamo marginalnu grešku pridruženu tom tačkastom ocijenjivanju.
- Marginalna greška se računa kao:

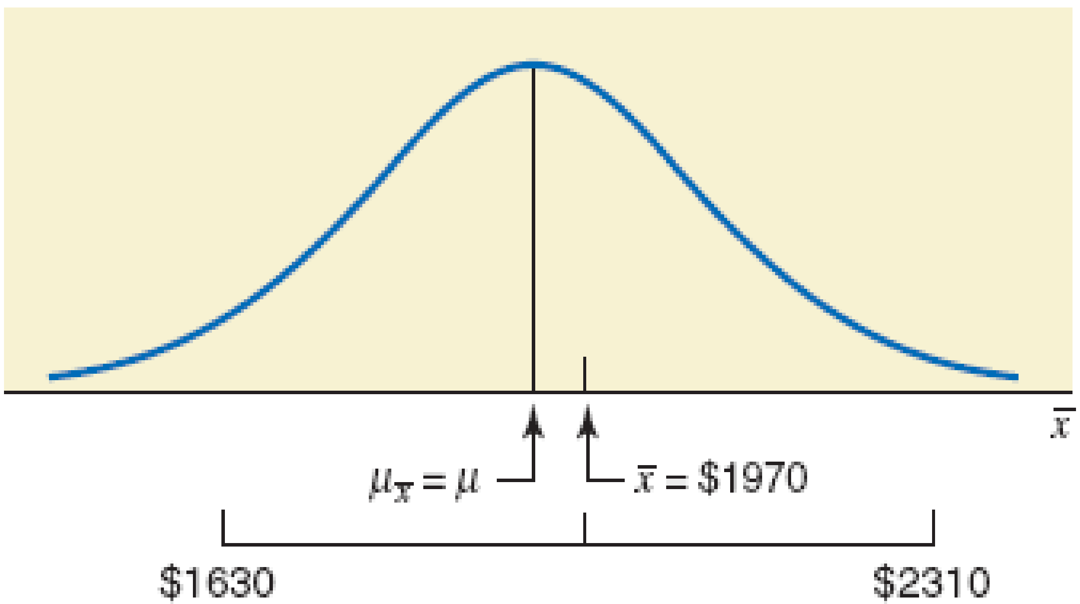
$$Marginalna\ greška = \pm 1.96\sigma_{\bar{x}} \quad ili \quad \pm 1.96 s_{\bar{x}}$$

Intervalna ocijenjena vrijednost

Definicija

Kod ***intervalnog ocjenjivanja***, konstruiše se interval oko tačkaste ocijenjene vrijednosti i tvrdi se da ovaj interval vjerovatno sadrži odgovarajući parametar skupa.

Slika 8.1 Intervalno ocjenjivanje.



Nivo pouzdanosti i interval pouzdanosti

Definicija

Svaki interval se konstruiše uz zadavanje ***nivoa pouzdanosti*** i zove se ***interval pouzdanosti***. Interval pouzdanosti je određen na sledeći način

Tačkasta ocijenjena vrijednost $\pm$ Marginalna greška

Nivo pouzdanosti koji je pridružen intervalu povjerenja pokazuje koliko možemo biti sigurni da ovaj interval sadrži pravu vrijednost parametra skupa. Nivo pouzdanosti se označava $(1 - \alpha)100\%$.

8.3 OCJENJIVANJE ARITMETIČKE SREDINE OSNOVNOG SKUPA: σ POZNATO

Tri moguća slučaja

Slučaj I. Ako su ispunjena sledeća tri uslova:

1. Standardna devijacija skupa σ je poznata
2. Veličina uzorka je mala (tj., $n < 30$)
3. Osnovni skup iz koga se uzima uzorak ima normalnu raspodjelu.

OCJENJIVANJE ARITMETIČKE SREDINE OSNOVNOG SKUPA: σ POZNATO

Tri moguća slučaja

Slučaj II. Ako su ispunjena sledeća dva uslova :

1. Standardna devijacija skupa σ je poznata
2. Veličina uzorka je velika (tj., $n \geq 30$)

OCJENJIVANJE ARITMETIČKE SREDINE OSNOVNOG SKUPA: σ POZNATO

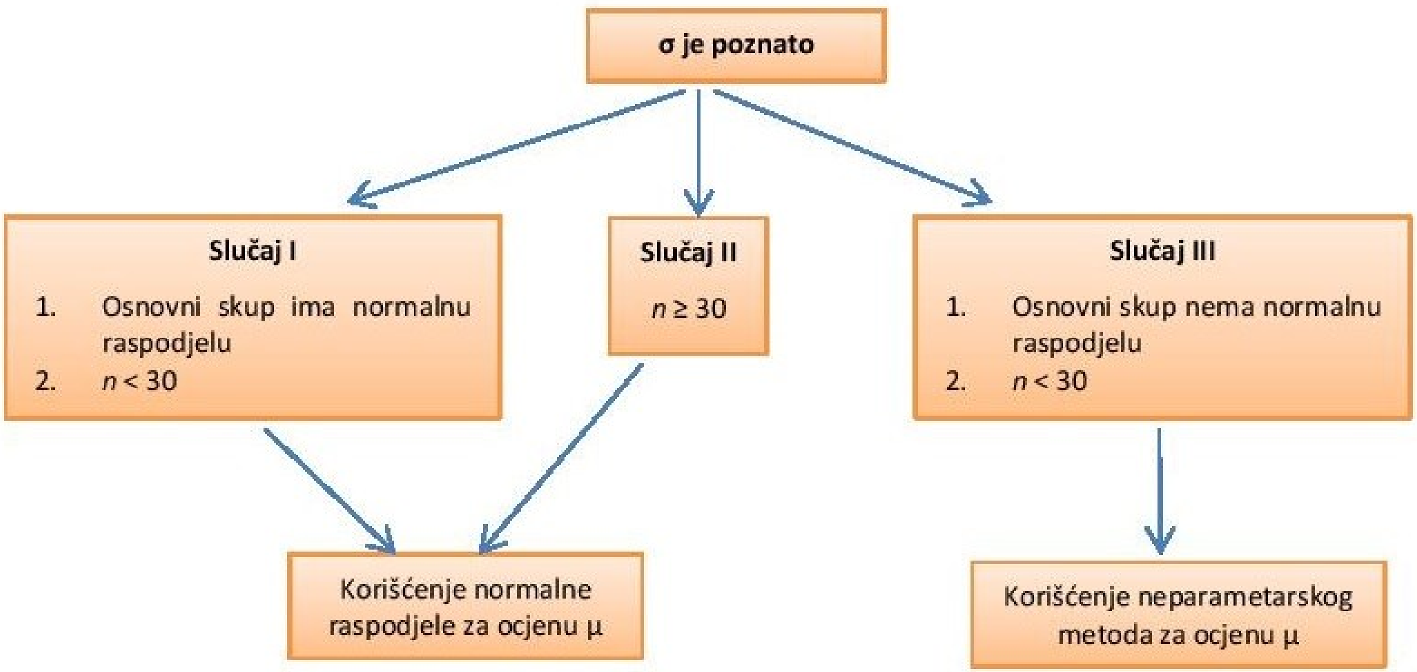
Tri moguća slučaja

Slučaj III. Ako su ispunjena sledeća tri uslova:

1. Standardna devijacija skupa σ je poznata
2. Veličina uzorka je mala (tj., $n < 30$)
3. Osnovni skup iz koga se uzima uzorak nema normalnu raspodjelu (ili je njegova raspodjela nepoznata).

OCJENJIVANJE ARITMETIČKE SREDINE OSNOVNOG SKUPA: σ POZNATO

Tri moguća slučaja



OCJENJIVANJE ARITMETIČKE SREDINE OSNOVNOG SKUPA: σ POZNATO

Interval povjerenja za μ

(1 – α)100% ***interval povjerenja za μ*** u gorepomenutim slučajevima I i II je

$$\bar{x} \pm z\sigma_{\bar{x}}$$

$$gdje\ je\ \sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$$

Vrijednost z se dobija iz tablice standardizovane normalne raspodjele (Tablica IV iz Dodatka C) za zadati nivo pouzdanosti.

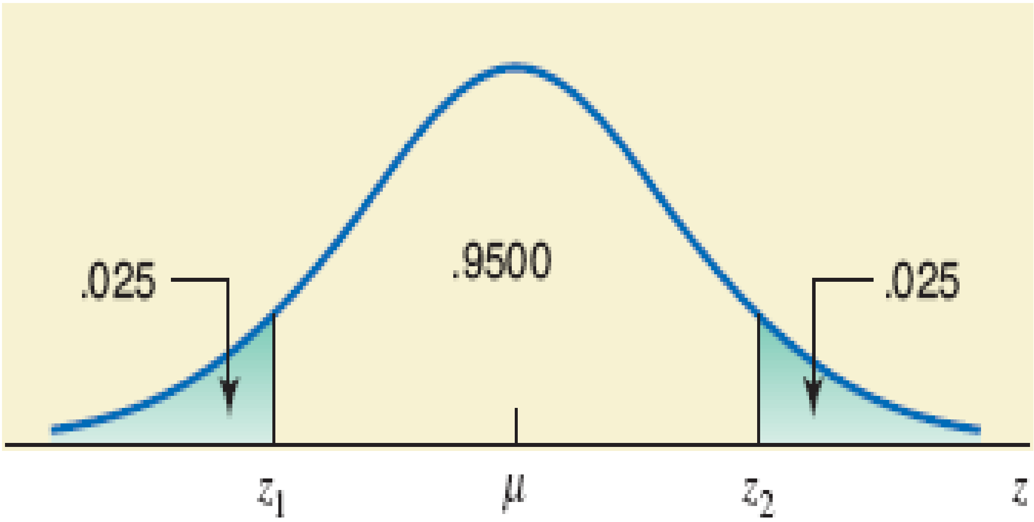
OCJENJIVANJE ARITMETIČKE SREDINE OSNOVNOG SKUPA: σ POZNATO

Definicija

Marginalna greška ocjene od μ, koja se obilježava sa E, je vrijednost koja je oduzeta i dodata vrijednosti $\bar{x}$ kako bi se dobio interval povjerenja za μ. Znači,

$$E = z\sigma_{\bar{x}}$$

Slika 8.2 Određivanje *z* za nivo pouzdanosti od 95%.



Slika 8.3 Površina na krajevima.

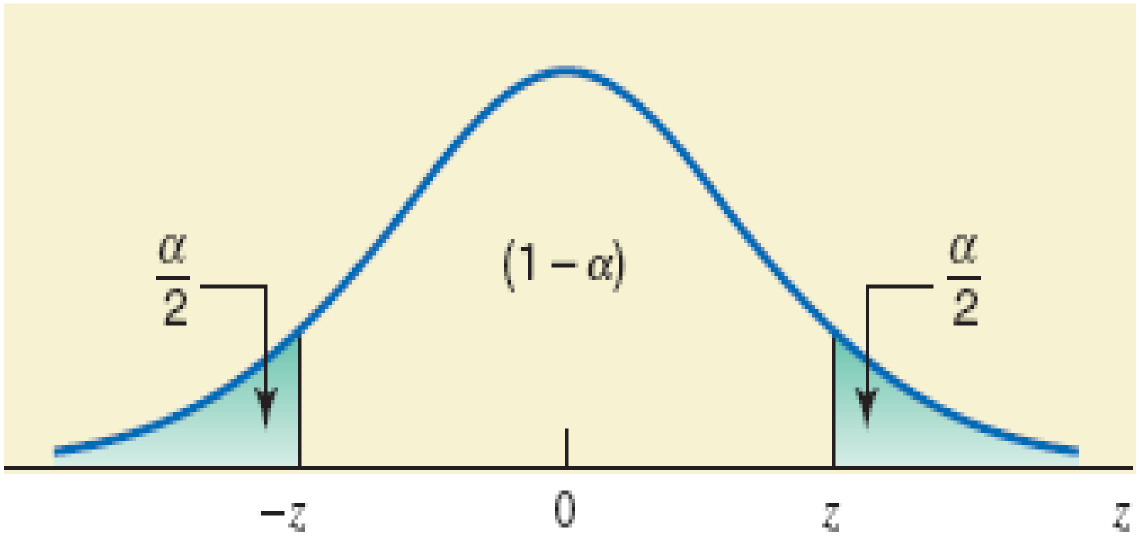


Tabela 8.1 *z* vrijednosti za najčešće korišćene nivoe pouzdanosti

Nivo pouzdanosti	Površine dobijene iz Tablice IV	z vrijednost
90%	0.0500 i 0.9500	1.64 ili 1,65
95%	0.0250 i 0.9750	1.96
96%	0.0200 i 0.9800	2.05
97%	0.0150 i 0.9850	2.17
98%	0.0100 i 0.9900	2.33
99%	0.0050 i 0.9950	2.57 ili 2.58

Primjer 8-1

Izdavačka kuća je upravo objavila novu knjigu za fakultete. Prije nego što odluči po kojoj cijeni će se knjiga prodavati, kompanija želi da zna prosječnu cijenu svih knjiga takvog tipa u prodaji. Istraživačko odjeljenje firme je uzelo uzorak od 25 odgovarajućih udžbenika i prikupilo podatke o njihovim cijenama. Ovo istraživanje je pokazalo da je prosječna cijena u uzorku \$145. Poznato je da je standardna devijacija svih ovakvi knjiga \$35 i da osnovni skup takvih cijena ima normalnu raspodjelu.

Primjer 8-1

(a) Kolika je tačkasta ocijenjena vrijednost prosječne cijene svih ovakvih udžbenika za fakultete?

(b) Konstruisati 90% interval povjerenja za prosječnu cijenu svih ovakvih udžbenika za fakultete.

Primjer 8-1: Rješenje

a)

n = 25, $\bar{x}$ = \$145, i σ = \$35

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{35}{\sqrt{25}} = \$7.00$$

Tačkasta ocjena za $\mu = \bar{x}$ = **\$145**

Primjer 8-1: Rješenje

b)

Nivo pouzdanosti je 90% ili 0.90. Ovdje, površina na svakom kraju normalne krive je α/2=(1-0.90)/2=0.05. Dakle, z = 1.65.

$$\bar{x} \pm z\sigma_{\bar{x}} = 145 \pm 1.65(7.00) = 145 \pm 11.55$$

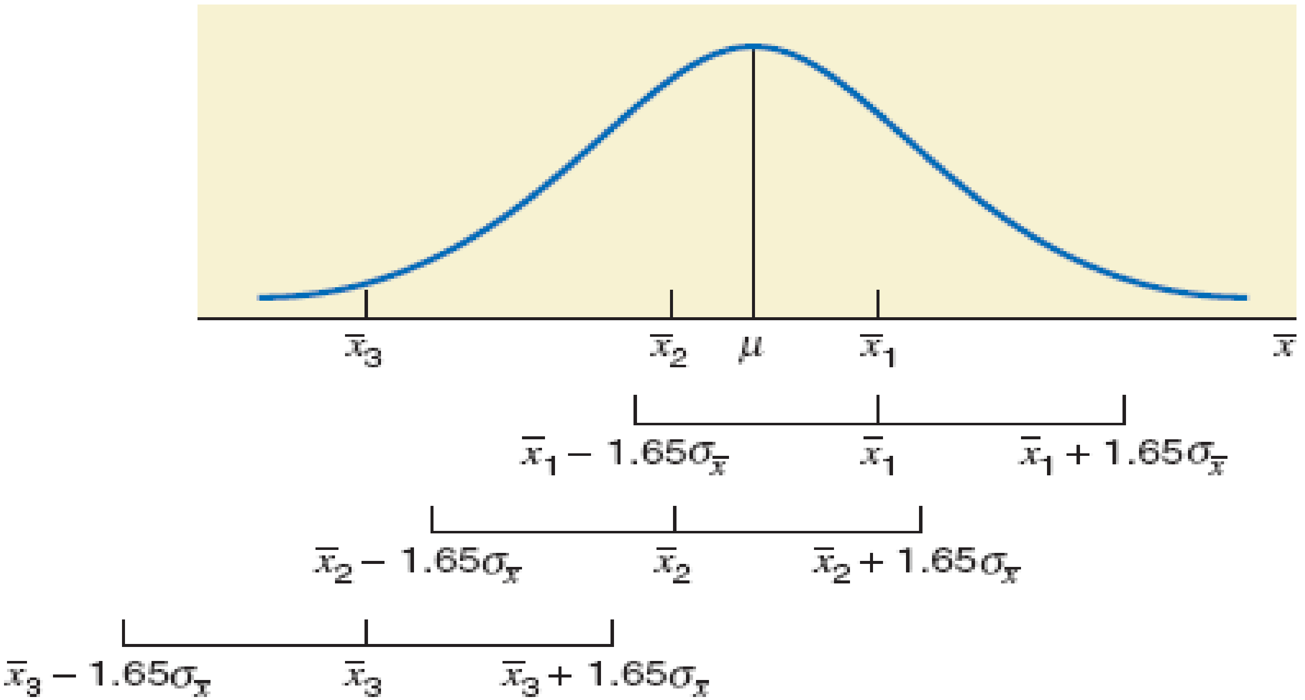
$$= (145-11.55) \text{ to } (145+11.55)$$

$$= \$133.45 \text{ to } \$156.55$$

Primjer 8-1: Rješenje

Možemo reći da smo 90% sigurni da je prosječna cijena svih fakultetskih udžbenika traženog tipa između \$133.45 i \$156.55.

Slika 8.4 Intervali povjerenja.



OCJENJIVANJE ARITMETIČKE SREDINE OSNOVNOG SKUPA: σ POZNATO

Širina intervala povjerenja

Širina intervala povjerenja zavisi od toga kolika je marginalna greška, $z\sigma_{\bar{x}}$.
Znači, širina intervala povjerenja može da se kontroliše promjenom

1. Vrijednosti z, koja je određena nivoom pouzdanosti

2. Veličine uzorka, n

Određivanje veličine uzorka za ocjenjivanje aritmetičke sredine

Određivanje veličine uzorka za ocjenjivanje μ

Ako su zadati nivo pouzdanosti i standardna devijacija osnovnog skupa, veličina uzorka kojom ćemo dobiti unaprijed zadatu marginalnu grešku *E* intervalne ***ocjene od μ*** je

$$n = \frac{z^2 \sigma^2}{E^2}$$

Primjer 8-3

Udruženje bivših studenata želi da ocijeni prosječan dug ovogodišnjih diplomaca. Zna se da je standardna devijacija skupa dugovanja ovogodišnjih diplomaca \$11,800. Koliko veliki uzorak bi trebalo izabrati da bi ocjena bila do \$800 od aritmetičke sredine skupa uz nivo pouzdanosti 99%?

Primjer 8-3: Rješenje

- Maksimalna vrijednost marginalne greške ocjene je \$800; odnosno, *E* = \$800.
- Vrijednost z za 99% nivo pouzdanosti je z = 2.58.
- Vrijednost σ je \$11,800.

$$\boldsymbol{n = \frac{z^2\sigma^2}{E^2} = \frac{(2.58)^2(11,800)^2}{(800)^2} = 1448.18 \approx 1449}$$

- Dakle, tražena veličina uzorka je 1449.

8.4 OCJENJIVANJE ARITMETIČKE SREDINE OSNOVNOG SKUPA: σ NIJE POZNATO

Tri moguća slučaja

Slučaj I. Ako su ispunjena sledeća tri uslova:

1. Standardna devijacija skupa σ nije poznata
2. Veličina uzorka je mala (tj., $n < 30$)
3. Osnovni skup iz koga se uzima uzorak ima normalnu raspodjelu.

OCJENJIVANJE ARITMETIČKE SREDINE OSNOVNOG SKUPA: σ NIJE POZNATO

Tri moguća slučaja

Slučaj II. Ako su ispunjena sledeća dva uslova:

1. Standardna devijacija skupa σ nije poznata
2. Veličina uzorka je velika (tj., $n \geq 30$)

OCJENJIVANJE ARITMETIČKE SREDINE OSNOVNOG SKUPA: σ NIJE POZNATO

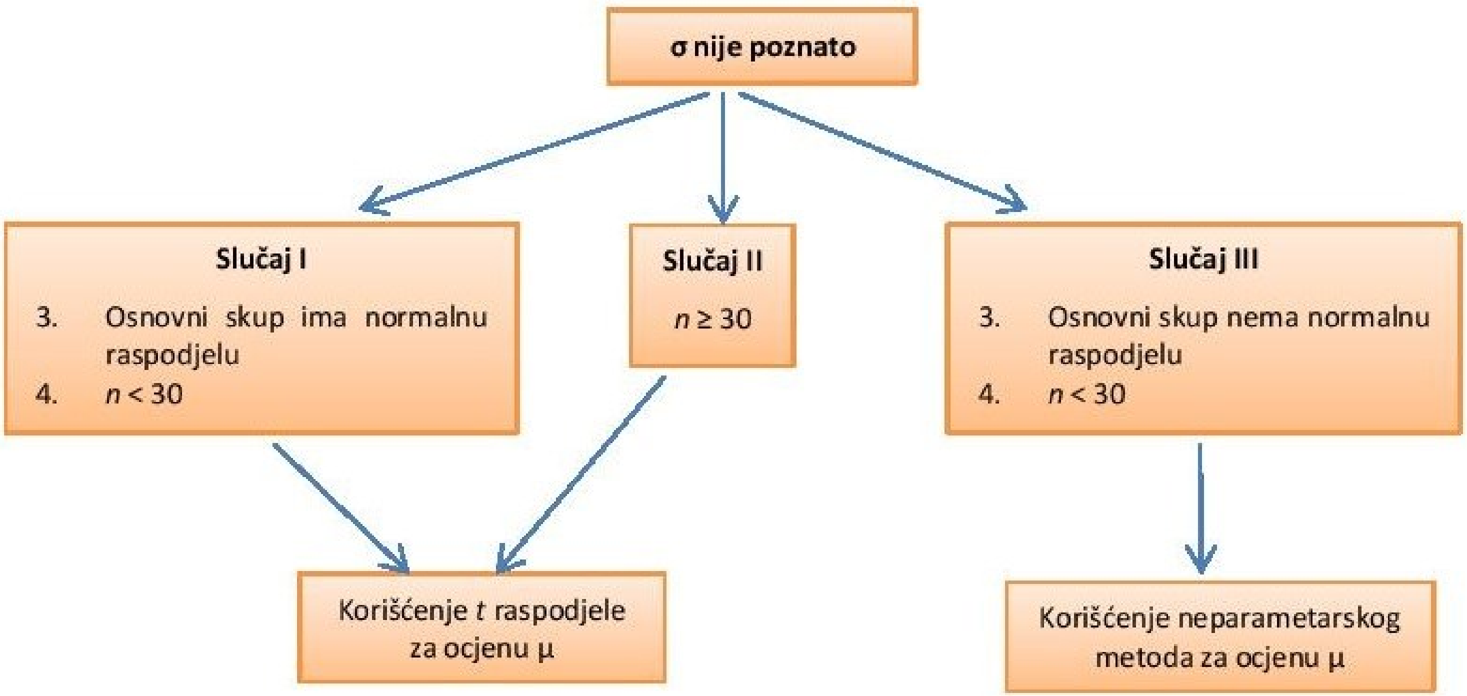
Tri moguća slučaja

Slučaj III. Ako su ispunjena sledeća tri uslova:

1. Standardna devijacija skupa σ nije poznata
2. Veličina uzorka je mala (tj., $n < 30$)
3. Osnovni skup iz koga se uzima uzorak nema normalnu raspodjelu (ili je njegova raspodjela nepoznata).

OCJENJIVANJE ARITMETIČKE SREDINE OSNOVNOG SKUPA: σ NIJE POZNATO

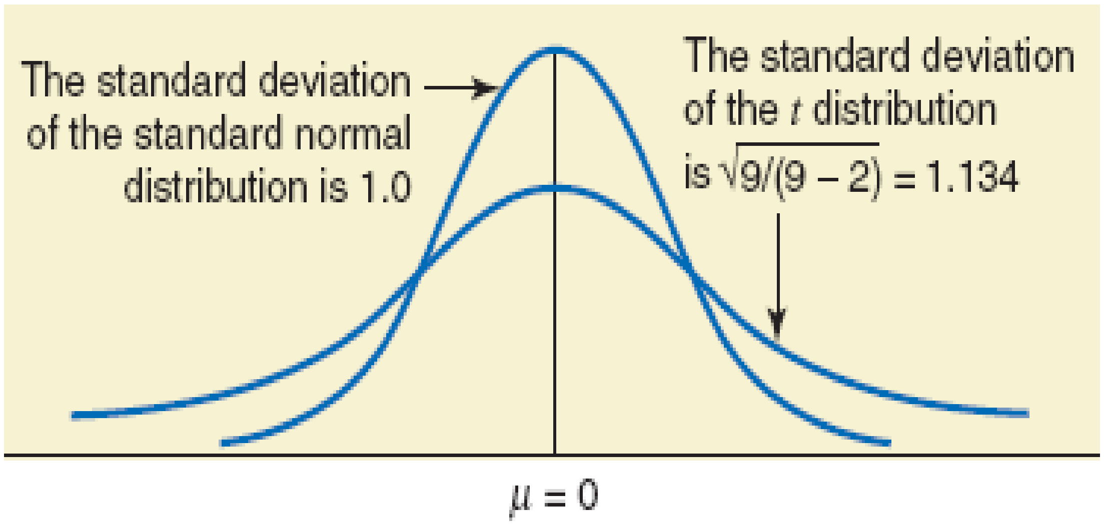
Tri moguća slučaja



t raspodjela

***t* raspodjela** je simetrična raspodjela koja je manje izdužena i više raspršena od standardizovane normalne raspodjele. Sa povećanjem veličine uzorka t raspodjela teži standardizovanoj normalnoj raspodjeli. t raspodjela ima samo jedan parametar koji se naziva broj stepeni slobode (df). Aritmetička sredina t raspodjele je 0, a njena standardna devijacija je $\sqrt{df/(df-2)}$.

Slika 8.5 *t* raspodjela za *df* = 9 i standardizovana normalna raspodjela.



Primjer 8-4

Izračunati vrijednost t za 16 stepeni slobode i za površinu od 0.05 na desnom kraju krive t raspodjele.

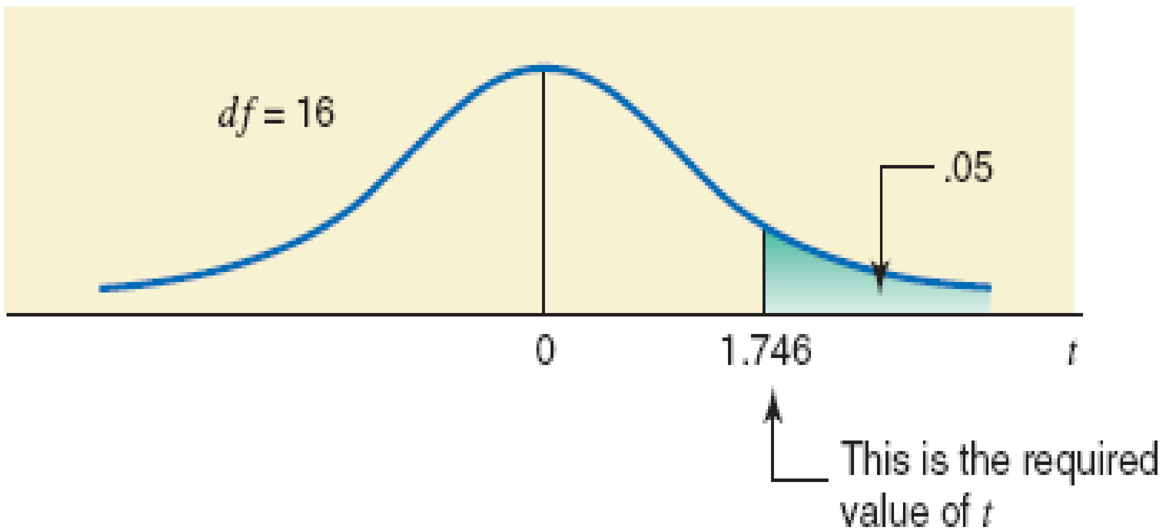
Tabela 8.2 Određivanje *t* za 16 *df* i površinu 0.05 na desnom kraju raspodjele

Area in the right tail

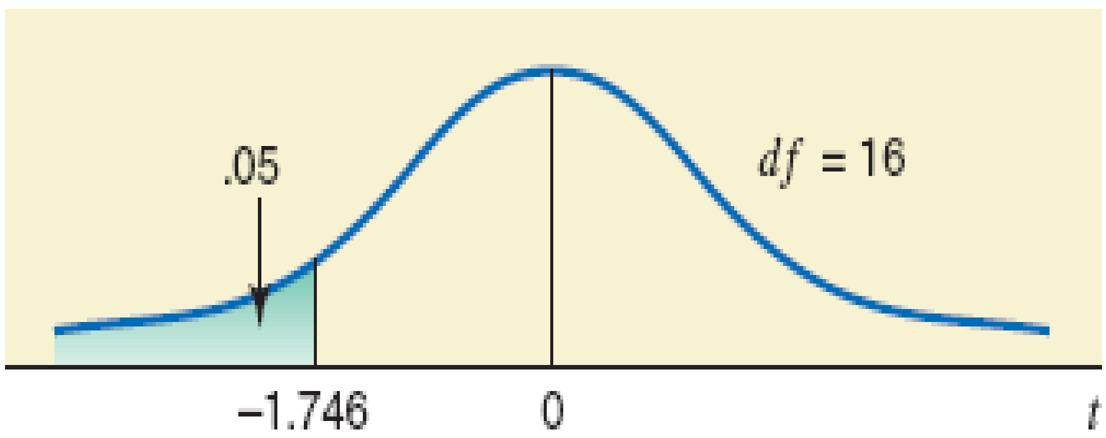
df	Area in the Right Tail Under the *t* Distribution Curve				
	.10	**.05**	**.025**	**. . .**	**.001**
1	3.078	6.314	12.706	. . .	318.309
2	1.886	2.920	4.303	. . .	22.327
3	1.638	2.353	3.182	. . .	10.215
.	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
.	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
.	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
df → **16**	1.337	**1.746**	2.120	. . .	3.686
.	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
.	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
.	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
75	1.293	1.665	1.992	. . .	3.202
	1.282	1.645	1.960	. . .	3.090

The required value of *t* for 16 *df* and .05 area in the right tail

Slika 8.6 Vrijednost *t* za 16 *df* i površinu od 0 .05 na desnom kraju raspodjele.



Slika 8.7 Vrijednost *t* za 16 *df* i površinu od 0 .05 na lijevom kraju raspodjele.



Interval povjerenja za μ korišćenjem *t* raspodjele

(1 – α)100% ***interval povjerenja*** za μ je

$$\bar{x} \pm t s_{\bar{x}} \quad gdje\ je \quad s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

vrijednost *t* je dobijena iz tablice *t* raspodjele za *n* – 1 stepeni slobode i za dati nivo pouzdanosti. Ovdje je $ts_{\bar{x}}$ marginalna greška ocjene; tj,

$$E = ts_{\bar{x}}$$

Primjer 8-5

Dr. Moore želi da ocijeni prosječan nivo holesterola kod svih odraslih muškaraca u Hartfordu. Uzeo je uzorak od 25 odraslih muških osoba iz Hartforda i pronašao da je prosječni nivo holesterola u ovom uzorku 186 mg/dL sa standardnom devijacijom 12 mg/dL. Pretpostavljamo da je nivo holesterola kod svih odraslih muškaraca u Hartfordu (približno) normalno raspodijeljen. Konstruisati 95% interval povjerenja za aritmetičku sredinu skupa μ.

Primjer 8-5: Rješenje

- σ nije poznato, n < 30, a osnovni skup je normalno raspodijeljen (Slučaj I)
- Koristiti t raspodjelu za interval povjerenja za μ

$$n = 25, \bar{x} = 186, s = 12, \qquad a\ nivo\ pouzdanosti = 95\%$$

- $$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{25}} = 2.40$$

Primjer 8-5: Rješenje

- $df = n - 1 = 25 - 1 = 24$
- Površina na svakom kraju = 0.5 – (0.95/2) = 0.5 - 0.4750 = 0.025
- Vrijednost t u desnom kraju je 2.064

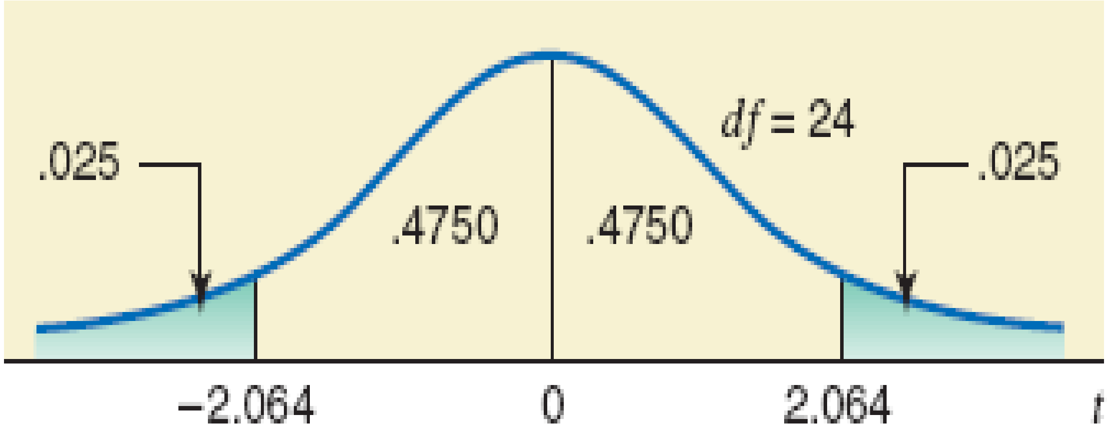
$$\bar{x} \pm t s_{\bar{x}} = 186 \pm 2.064(2.40) = 186 \pm 4.95$$

$$= 181.05 \quad \text{do} \quad 190.95$$

Primjer 8-5: Rješenje

- Tako možemo tvrditi sa pozdanošću od 95% da je prosječni nivo holesterola kod svih odraslih muškaraca koji žive u Hartfordu između 181.05 i 190.95 mg/dL.

Slika 8.8 Vrijednost *t*.



Interval povjerenja za μ korišćenjem *t* raspodjele

Šta se dešava ako je uzorak isuviše veliki?

1. Koristimo *t* vrijednost iz poslednjeg reda (reda ∞) Tablice V.
2. Koristimo normalnu raspodjelu kao aproksimaciju t raspodjele.

8.5 OCJENJIVANJE PROPORCIJE OSNOVNOG SKUPA: VELIKI UZORCI

Ocjena standardne devijacije od $\hat{p}$

Vrijednost $s_{\hat{p}}$, koja predstavlja tačkastu ocijenjenu vrijednost od $\sigma_{\hat{p}}$, se izračunava na sledeći način. Ovdje, $s_{\hat{p}}$ je ocjena od $\sigma_{\hat{p}}$

$$s_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

OCJENJIVANJE PROPORCIJE OSNOVNOG SKUPA: VELIKI UZORCI

Interval povjerenja za proporciju osnovnog skupa, p

(1 – α)100% ***interval povjerenja za proporciju osnovnog skupa***, p, je

$$\hat{p} \pm z s_{\hat{p}}$$

Vrijednost z koja se ovdje koristi dobija se iz tablice standardizovane normalne raspodjele za dati nivo pouzdanosti, a $s_{\hat{p}} = \sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}$. Izraz $zs_{\hat{p}}$ se zove ***marginalna greška***, *E*.

Primjer 8-7

Prema jednom istraživanju Pew Research Center iz juna 2009., 44% ljudi starih od 18 do 29 godina je reklo da je religija veoma bitna za njih. Pretpostavimo da se ovaj rezultat bazira na uzorku od 1000 ljudi starih od 18 do 29 godina.

Primjer 8-7

a) Kolika je tačkasta ocijenjena vrijednost proporcije skupa?

b) Odrediti, sa pouzdanošću od 99%, procenat svih ljudi starih od 18 do 29 godina koji će reči da je religija veoma bitna za njih. Kolika je marginalna greška ove ocjene?

Primjer 8-7: Rješenje

- n = 1000, $\hat{p}$ = 0.44, i, $\hat{q}$ = 0.56
- $$s_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = \sqrt{\frac{(.44)(.56)}{1000}} = .01569713$$
- Napomenimo da su i $n\hat{p}$ i $n\hat{q}$ veći od 5.

Primjer 8-7: Rješenje

a)

Tačkasta ocijenjena vrijednost od $p = \hat{p} = 0.44$

Primjer 8-7: Rješenje

b)

Nivo pouzdanosti je 99%, ili 0.99. z = 2.58.

$$\hat{p} \pm z s_{\hat{p}} = .44 \pm 2.58(.01569713) = .44 \pm .04$$

$$= .40 \text{ do } .48 \text{ ili } 40\% \text{ do } 48\%$$

Marginalna greška = $\pm 1.96\, s_{\hat{p}}$

= ±1.96(0.01569713)

= ±0.04 ili ±4%

ODREĐIVANJE VELIČINE UZORKA ZA OCJENJIVANJE PROPORCIJE

Ako su nam poznati nivo pouzdanosti i vrijednosti $\hat{p}$ i $\hat{q}$, veličina uzorka kojom ćemo dobiti unaprijed zadatu marginalnu grešku E ***ocjene od*** p je

$$n = \frac{z^2 \hat{p}\hat{q}}{E^2}$$

ODREĐIVANJE VELIČINE UZORKA ZA OCJENJIVANJE PROPORCIJE

U slučaju da vrijednosti $\hat{p}$ i $\hat{q}$ nisu poznate

1. Pravimo najkonzervativniju ocijenjenu vrijednost veličine uzorka n uzimajući da je $\hat{p} = .5$ i $\hat{q} = .5$

2. Uzimamo preliminarni uzorak (proizvoljno određene veličine) i izračunavamo $\hat{p}$ i $\hat{q}$ za ovaj uzorak. Zatim, koristimo ove vrijednosti da odredimo n.

Primjer 8-9

Lombard Electronics preduzeće upravo je montiralo novu mašinu koja proizvodi dio za satove. Firma želi da ocijeni proporciju onih djelova proizvedenih na toj mašini koji su neispravni. Menadžer firme želi da ova ocjena bude do 0.02 od proporcije skupa uz nivo pouzdanosti 95%. Koja je najkonzervativnija ocijenjena vrijednost veličine uzorka koja će ograničiti marginalnu grešku do 0.02?

Primjer 8-9: Rješenje

- Vrijednost z za nivo pouzdanosti 95% je 1.96.
- $\hat{p} = .50$ i $\hat{q} = .50$
- $$n = \frac{z^2 \hat{p}\hat{q}}{E^2} = \frac{(1.96)^2(.50)(.50)}{(.02)^2} = 2401$$
- Prema tome, ako firma uzme uzorak od 2401 djelova, postoji mogućnost od 95% da će ocjena od p biti do 0.02 od proporcije skupa.