

POGLAVLJE 9

TESTIRANJE HIPOTEZA O ARITMETIČKOJ SREDINI I PROPORCIJI

9.1 TESTIRANJE HIPOTEZA: UVOD

- Dvije hipoteze
- Oblasti odbacivanja i neodbacivanja
- Dva tipa grešaka
- Smjerovi (oblici) testa

Dvije hipoteze

Definicija

Nulta hipoteza je tvrđenje (ili iskaz) o nekom parametru osnovnog skupa koji se smatra istinitim sve dok se ne pokaže suprotno.

Alternativna hipoteza je tvrđenje o nekom parametru osnovnog skupa koje će biti istinito ako je nulta hipoteza neistinita.

Oblasti odbacivanja i neodbacivanja

Slika 9.1 Oblasti odbacivanja i neodbacivanja u sudskom procesu.



Dva tipa grešaka

Tabela 9.1 Četiri moguća ishoda u sudskom procesu

		Stvarno stanje	
		Osoba nije kriva	Osoba jeste kriva
Odluka suda	Osoba nije kriva	Ispravna odluka	Greška II vrste ili β greška
	Osoba jeste kriva	Greška I vrste ili α greška	Ispravna odluka

Dva tipa grešaka

Definicija

Greška I vrste se javlja kada se istinita nulta hipoteza odbaci. Vrijednost α predstavlja vjerovatnoću javljanja greške ove vrste; odnosno,

$$\alpha = P(H_0 \text{ se odbacuje} \mid H_0 \text{ je istinita})$$

Vrijednost α predstavlja **nivo značajnosti** testa.

Dva tipa grešaka

Definicija

Greška II vrste se javlja kada se neistinita nulta hipoteza ne odbaci. Vrijednost β predstavlja vjerovatnoću javljanja greške II vrste; odnosno,

$$\beta = P(H_0 \text{ se ne odbacuje} \mid H_0 \text{ je neistinita})$$

Vrijednost $1 - \beta$ se naziva **jačina testa** i predstavlja vjerovatnoću da se greška II vrste ne javi.

Tabela 9.2 Četiri moguća ishoda za testiranje hipoteza

		Stvarno stanje	
		H_0 je istinita	H_0 nije istinita
Odluka	H_0 se ne odbacuje	Ispravna odluka	Greška II vrste ili β greška
	H_0 se odbacuje	Greška I vrste ili α greška	Ispravna odluka

Smjerovi (oblici) testa

Definicija

Dvostrani test ima oblast odbacivanja na oba kraja, **lijevostrani test** ima oblast odbacivanja na lijevom kraju, a **desnostrani test** ima oblast odbacivanja na desnom kraju krive raspodjele.

Dvostrani test

- ❑ Na osnovu ankete koju je sproveo časopis Consumer Reports u 2008. godini, uzorak učenika šestog razreda odabranih iz škola u Njujorku pokazao je da su njihove školske torbe u prosjeku teške 18.4 funti (USA TODAY, 3. Avgust, 2009). Drugi časopis želi da provjeri da li se ovaj prosjek *promijenio* od ankete ili nije. Ključna riječ ovdje je *promijenio*.
- ❑ Prosječna težina torbi za učenike šestih razreda u Njujorku se promijenila ako se povećala ili smanjila u odnosu na nivo od 2008. godine. Ovo je jedan primjer dvostranog testa.

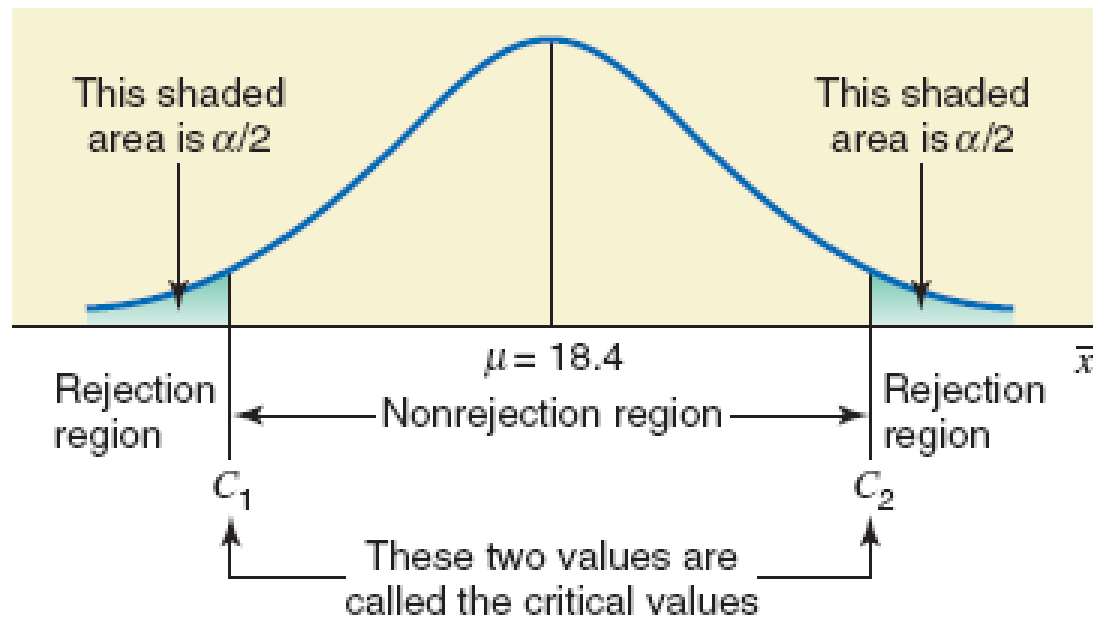
Dvostrani test

- Neka je μ težina torbi za sadašnje učenike šestih razreda u Njujorku. Dvije moguće odluke su
 - $H_0 : \mu = 18.4$ funti (Prosječna težina torbi za učenike šestih razreda u Njujorku se nije promijenila)
 - $H_1 : \mu \neq 18.4$ funti (Prosječna težina torbi za učenike šestih razreda u Njujorku se promijenila)

Dvostrani test

- Da li je test dvostrani ili jednostrani određuje znak u alternativnoj hipotezi.
- Ako se u alternativnoj hipotezi nalazi znak *nije jednako* (\neq), onda je taj test dvostrani.

Slika 9.2 Dvostrani test.



Lijevostrani test

Vratimo se primjeru u kom provjeravamo prosječnu količinu soka u limenkama bezalkoholnih pića jednog proizvođača. Proizvođač tvrdi da ove limenke u prosjeku sadrže 12 unci soka. Ali, ako je sadržaj limenki manji od navedene količine, onda proizvođač može biti optužen za prevaru. Pretpostavimo da jedna agencija za zaštitu potrošača želi da ispita da li je prosječna količina soka po limenki *manja od* 12 unci. Obratite pažnju da je ključna fraza *manje od*, koja ukazuje na lijevostrani test.

Lijevostrani test

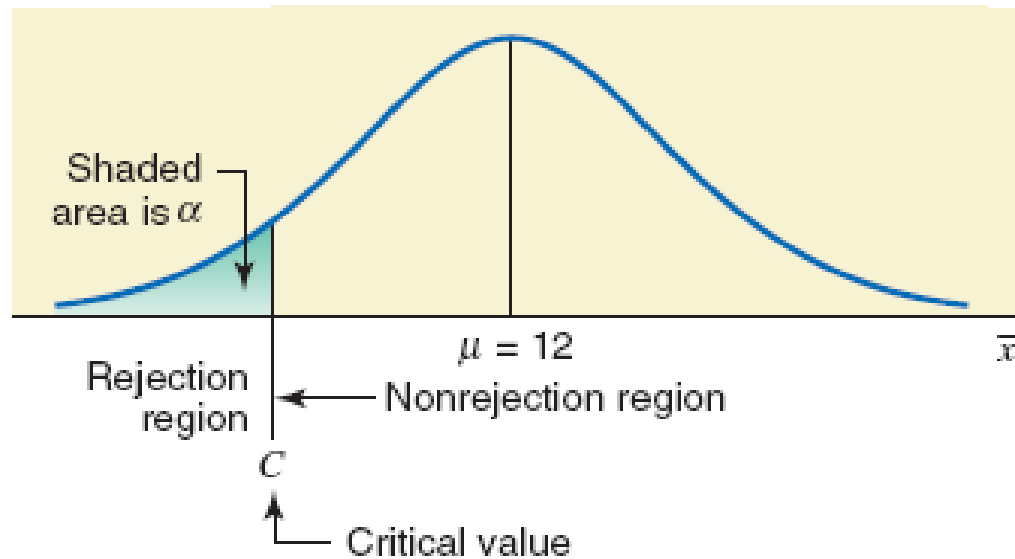
- Neka je μ prosječna količina soka u svim limenkama. Dvije moguće odluke su
 - $H_0 : \mu = 12$ unci (Prosjek je jednak 12 unci)
 - $H_1 : \mu < 12$ unci (Prosjek je manji od 12 unci)

Lijevostrani test

U ovom slučaju nultu hipotezu možemo da napišemo i kao $H_0 : \mu \geq 12$. Ovo neće uticati na rezultat testa sve dok se u H_1 nalazi znak *manje od* ($<$).

Kada je u alternativnoj hipotezi znak *manje od* ($<$), test je uvijek lijevostran.

Slika 9.3 Lijevostrani test.



Desnostrani test

Prema www.city-data.com, prosječna cijena domova u West Orange, država New Jersey, bila je \$461,216 u 2007.

Pretpostavimo da istraživač nekretnina želi da provjeri da li je trenutna prosječna cijena domova u ovom gradu *veća od* \$461,216. Ključna fraza u ovom slučaju je *veće od*, što ukazuje na desnostrani test.

Desnostrani test

- Neka je μ trenutna prosječna cijena domova u ovom gradu. Dvije moguće odluke su
 - $H_0 : \mu = \$461,216$ (Trenutna prosječna cijena domova u ovom gradu nije veća od \$461,216)
 - $H_1 : \mu > \$461,216$ (Trenutna prosječna cijena domova u ovom gradu je veća od \$461,216)

Desnostrani test

Kada alternativna hipoteza sadrži znak veće od ($>$), test je uvijek desnostrani.

Slika 9.4 Desnostrani test.

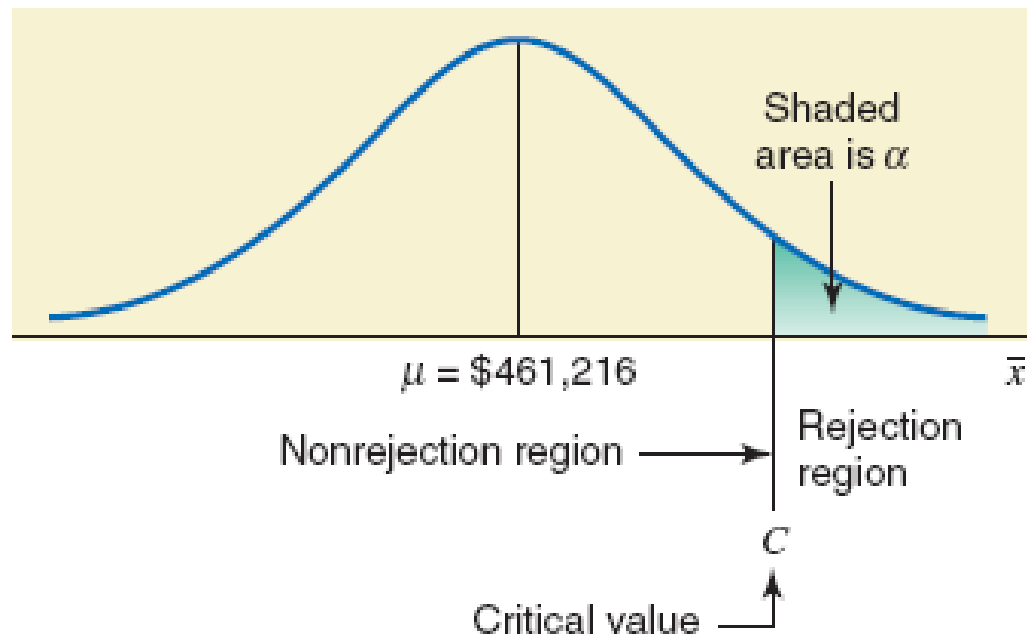


Tabela 9.3 Znaci u H_0 i H_1 i smjerovi testa

	Dvostrani test	Lijevostrani test	Desnostrani test
Znak u nultoj hipotezi H_0	=	= ili \geq	= ili \leq
Znak u alternativnoj hipotezi H_1	\neq	<	>
Odbast odbacivanja	Na oba kraja	Na lijevom kraju	Na desnom kraju

Dva postupka

Dva postupka testiranja hipoteza

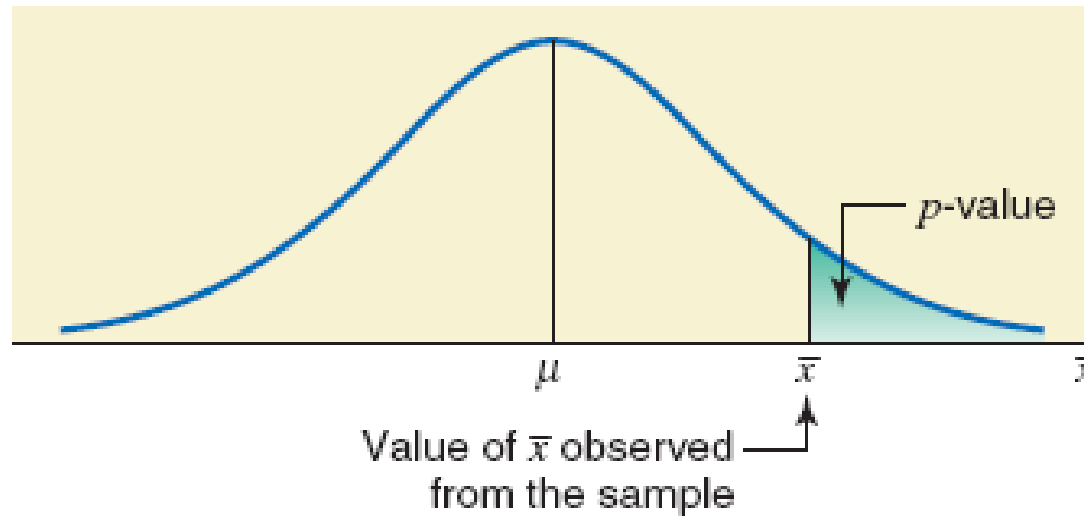
1. Pristup zasnovan na p-vrijednosti
2. Pristup zasnovan na kritičnoj vrijednosti

p-vrijednost

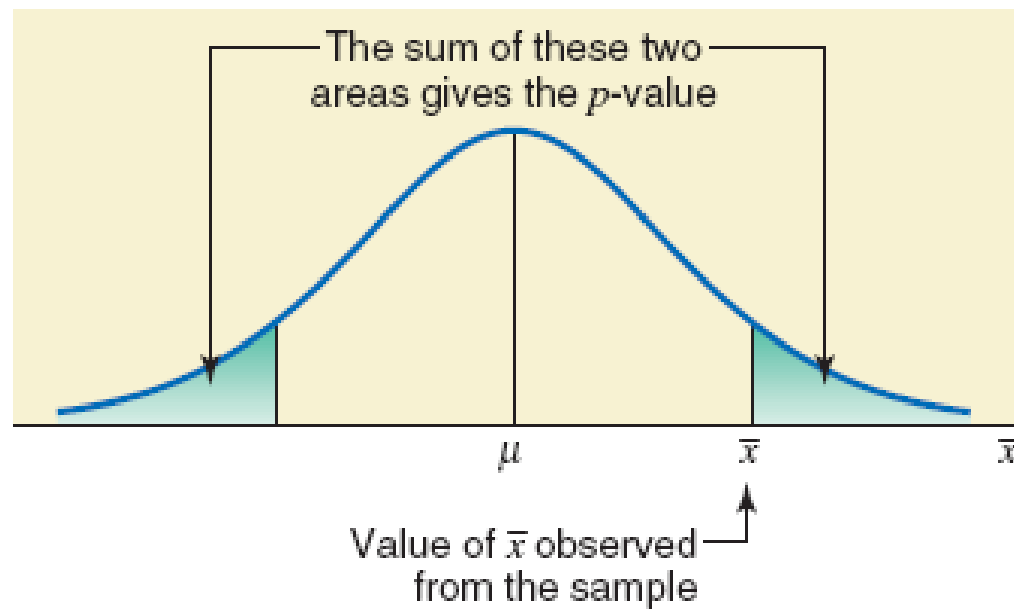
Definicija

Pod pretpostavkom da je nulta hipoteza tačna, *p*-vrijednost može da se definiše kao vjerovatnoća da statistika uzorka (kao što je aritmetička sredina uzorka) odstupa od hipotetičke vrijednosti parametra u smjeru alternativne hipoteze, barem toliko koliko i realizovana vrijednost statistike uzorka u izabranom uzorku. Napomenimo da ako je ***p*-vrijednost** manja od nivoa značajnosti, nulta hipoteza se odbacuje.

Slika 9.5 p -vrijednost za desnostrani test.

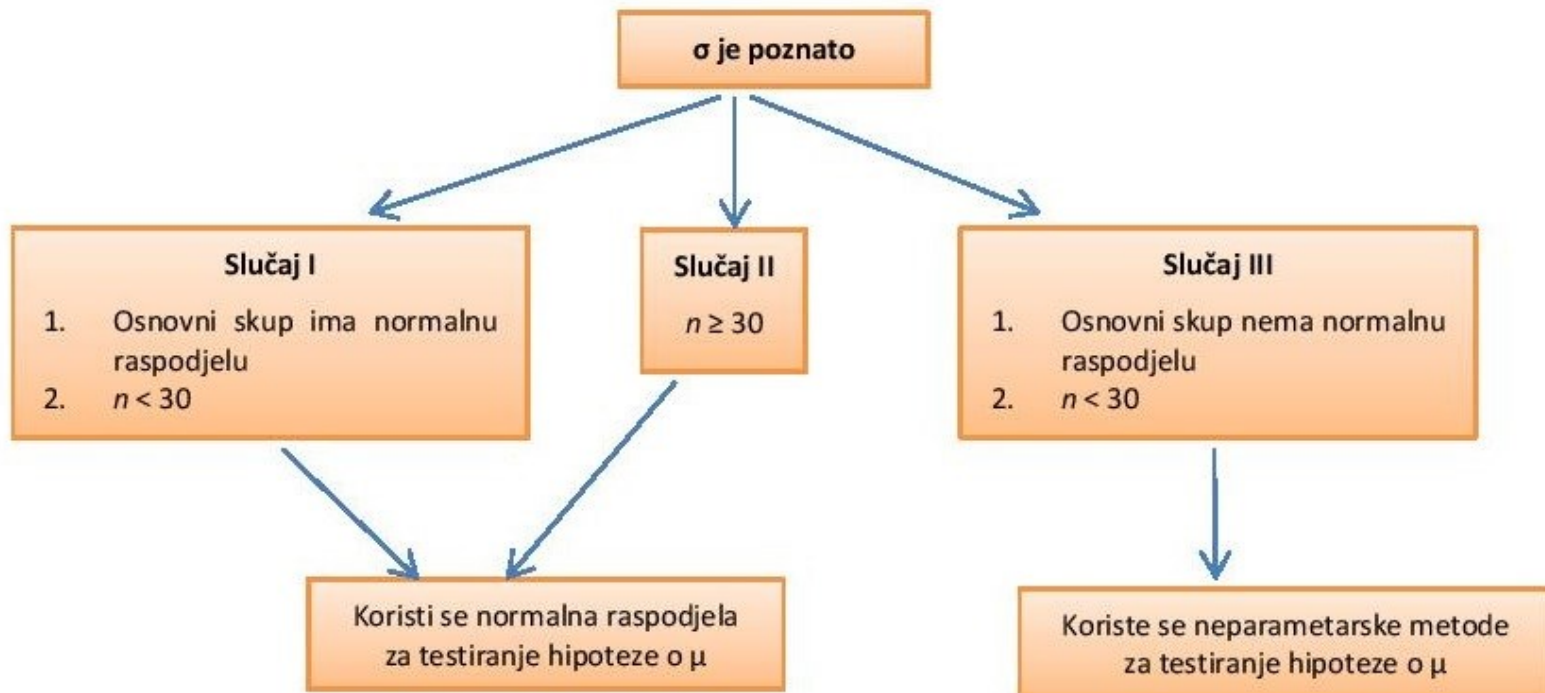


Slika 9.6 p -vrijednost za dvostrani test.



9.2. TESTIRANJE HIPOTEZA O μ : σ JE POZNATA

Tri moguća slučaja



TESTIRANJE HIPOTEZA O μ : σ JE POZNATA

Etape u testiranju hipoteze primjenom pristupa zasnovanog na kritičnoj vrijednosti

1. Formulisanje nulte i alternativne hipoteze.
2. Izbor raspodjele koja će se koristiti.
3. Određivanje oblasti odbacivanja i neodbacivanja.
4. Izračunavanje vrijednosti statistike testa.
5. Donošenje odluke.

Izračunavanje z vrijednosti za \bar{x}

Kada u testiranju hipoteze o μ koristimo normalnu raspodjelu, onda **vrijednost z** , za vrijednost \bar{x} u izabranom uzorku, izračunavamo na sledeći način:

$$\mathbf{z} = \frac{\bar{\mathbf{x}} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} \quad \text{gdje} \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Izračunatu vrijednost z na osnovu \bar{x} iz izabranog uzorka, nazivamo i **realizovana vrijednost statistike z testa**.

Pravila z testa hipoteza o μ : σ JE POZNATA

	Dvostrani test	Lijevostrani test	Desnostrani test
Nulta hipoteza H_0	$\mu = \mu_0$	$\mu = \mu_0$ ili $\mu \geq \mu_0$	$\mu = \mu_0$ ili $\mu \leq \mu_0$
Alternativna hipoteza H_1	$\mu \neq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\mu > \mu_0$
Kritična vrijednost	$\frac{z_\alpha}{2}$	$-z_\alpha$	z_α
Statistika testa	$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$		
Pravilo odbacivanja H_0	$ z > \frac{z_\alpha}{2}$	$z < -z_\alpha$	$z > z_\alpha$
Oblast odbacivanja	Na oba kraja	Na lijevom kraju	Na desnom kraju

Primjer 9-1

Telefonska kompanija TIV pruža usluge međunarodnih razgovora u jednoj oblasti. Na osnovu raspoloživih informacija utvrđeno je da je prosječna dužina međunarodnih razgovora koji su preko ove kompanije obavljani u 2009. godini bila 12.44 minuta. Uprava kompanije je željela da provjeri da li se prosječna dužina aktuelnih telefonskih razgovora razlikuje od 12.44 minuta. U uzorku od 150 takvih razgovora prosječna dužina iznosila je 13.71 minuta. Standardna devijacija svih razgovora je 2.65 minuta. Da li na nivou značajnosti od 2%, možete da zaključite da se prosječna dužina aktuelnih međunarodnih razgovora razlikuje od 12.44 minuta?

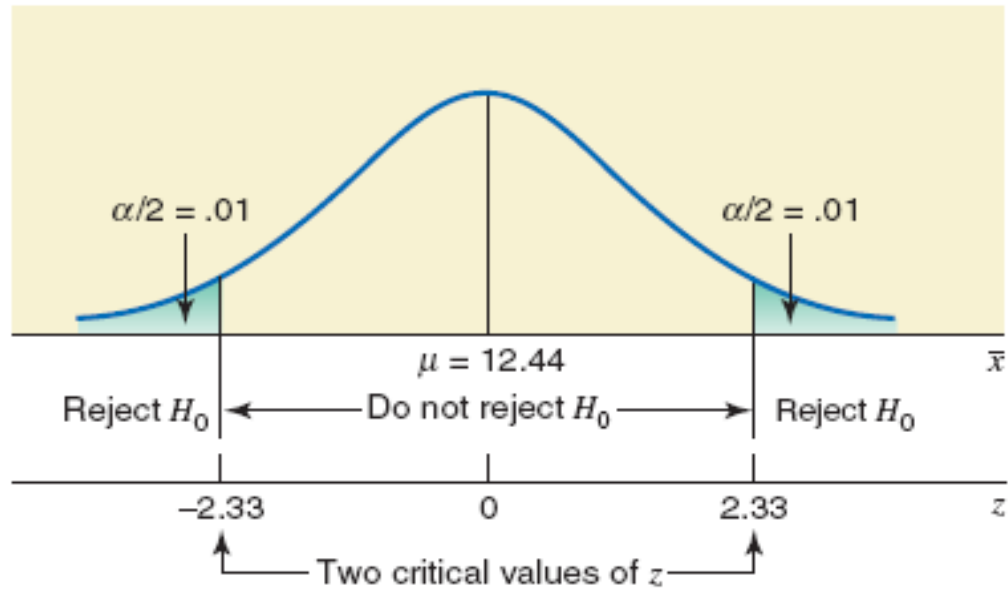
Primjer 9-1: Rješenje

- Korak 1: $H_0 : \mu = 12.44$ $H_1 : \mu \neq 12.44$
- Korak 2: Standardna devijacija skupa σ je poznata, a uzorak veliki ($n > 30$). Po centralnoj graničnoj teoremi, korišćićemo normalnu raspodjelu da sprovedemo test.

Primjer 9-1: Rješenje

- Korak 3: $\alpha = 0.02$
- Znak \neq u alternativnoj hipotezi ukazuje da je test dvostrani
- Površina na svakom kraju = $\alpha / 2 = 0.02 / 2 = 0.01$
- Vrijednosti z za dvije kritične tačke su - 2.33 i 2.33

Slika 9.9



Primjer 9-1: Rješenje

□ Korak 4:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2.65}{\sqrt{150}} = .21637159$$

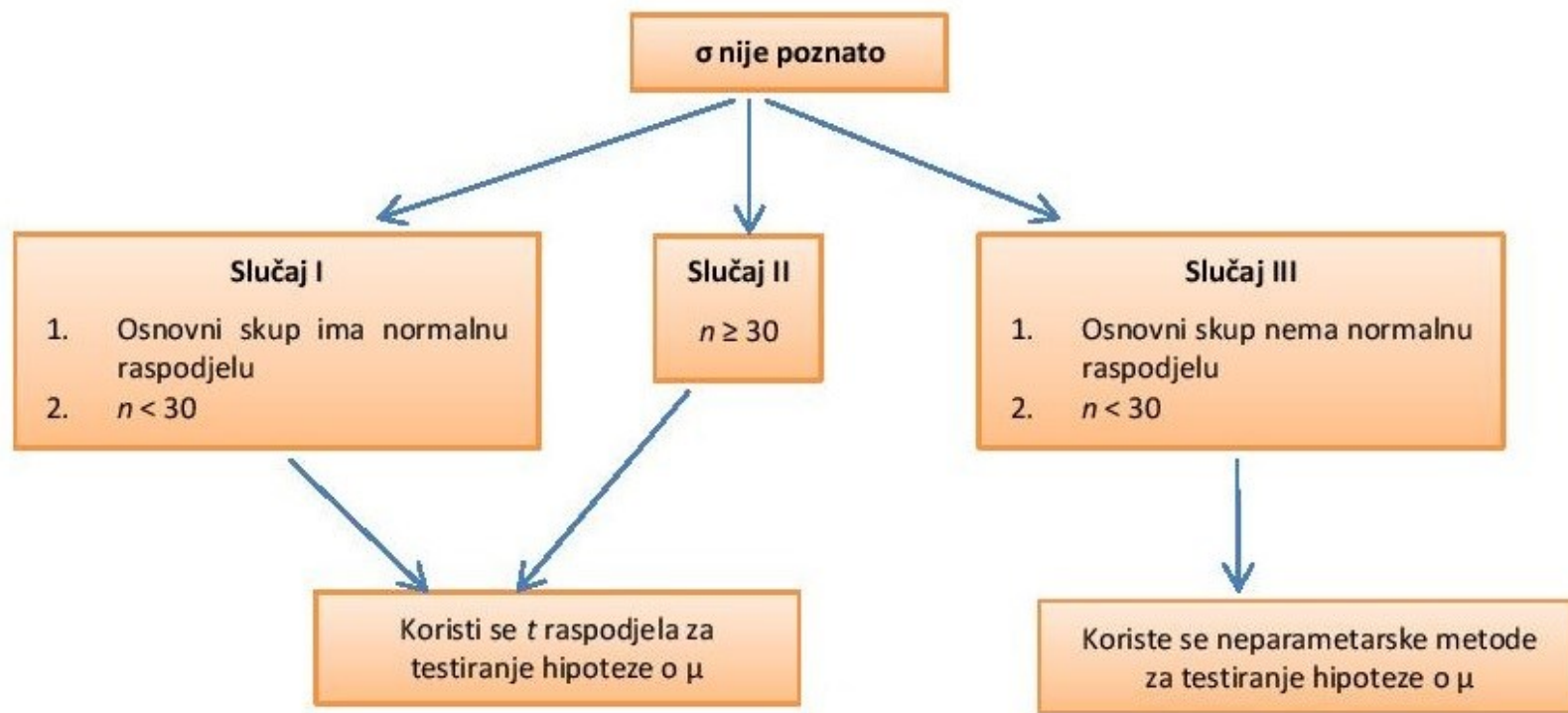
$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{13.71 - 12.44}{.21637159} = 5.87$$

Primjer 9-1: Rješenje

- Korak 5: Ova vrijednost $z = 5.87$ je veća od kritične vrijednosti $z = 2.33$, i nalazi se u oblasti odbacivanja na desnom kraju krive raspodjele na slici 9.9. Slijedi da odbacujemo H_0 i zaključujemo da, na osnovu podataka o uzorku, prosječna dužina svih telefonskih razgovora nije jednaka 12.44 minuta.

9.3. TESTIRANJE HIPOTEZA O μ : σ NIJE POZNATA

Tri moguća slučaja



TESTIRANJE HIPOTEZA O μ : σ NIJE POZNATA

Statistika testa

Vrijednost **statistike t testa** za aritmetičku sredinu uzorka \bar{x} izračunava se kao

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}} \text{ gdje je } s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Vrijednost t izračunate za \bar{x} primjenom ove formule se takođe naziva **realizovana vrijednost statistike t testa**.

Pravila z testa hipoteza o μ : σ NIJE POZNATA

	Dvostrani test	Lijevostrani test	Desnostrani test
Nulta hipoteza H_0	$\mu = \mu_0$	$\mu = \mu_0$ ili $\mu \geq \mu_0$	$\mu = \mu_0$ ili $\mu \leq \mu_0$
Alternativna hipoteza H_1	$\mu \neq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\mu > \mu_0$
Kritična vrijednost	$t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$	$-t_{\alpha, n-1}$	$t_{\alpha, n-1}$
Statistika testa	$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$		
Pravilo odbacivanja H_0	$ t > t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$	$t < -t_{\alpha, n-1}$	$t > t_{\alpha, n-1}$
Oblast odbacivanja	Na oba kraja	Na lijevom kraju	Na desnom kraju

Primjer 9-8

Rukovodstvo banke u Masačusetsu je uvijek brinulo o kvalitetu pruženih usluga. Sa starim kompjuterskim sistemom, bankarski službenik je mogao da usluži u prosjeku 22 klijenta na sat. Rukovodstvo je uočilo da je uz ovakvu brzinu pružanja usluga vrijeme čekanja klijenata predugo. Nedavno je rukovodstvo banke instaliralo novi kompjuterski sistem u banci očekujući da će to povećati brzinu pružanja usluga i da će klijenti biti zadovoljniji zbog smanjenja vremena čekanja.

Primjer 9-8

Da bi se provjerilo da li je novi kompjuterski sistem efikasniji od starog, uprava banke je izabrala slučajan uzorak od 70 sati rada sa klijentima i ustanovila da je tokom ovog vremena prosječan broj klijenata kojima su bankarski službenici pružili usluge bilo 27 klijenata na sat, sa standardnom devijacijom 2.5. Testirajte na nivou značajnosti od 1%, da li je novi kompjuterski sistem efikasniji od starog?

Primjer 9-8: Rješenje

□ Korak 1: $H_0 : \mu = 22$

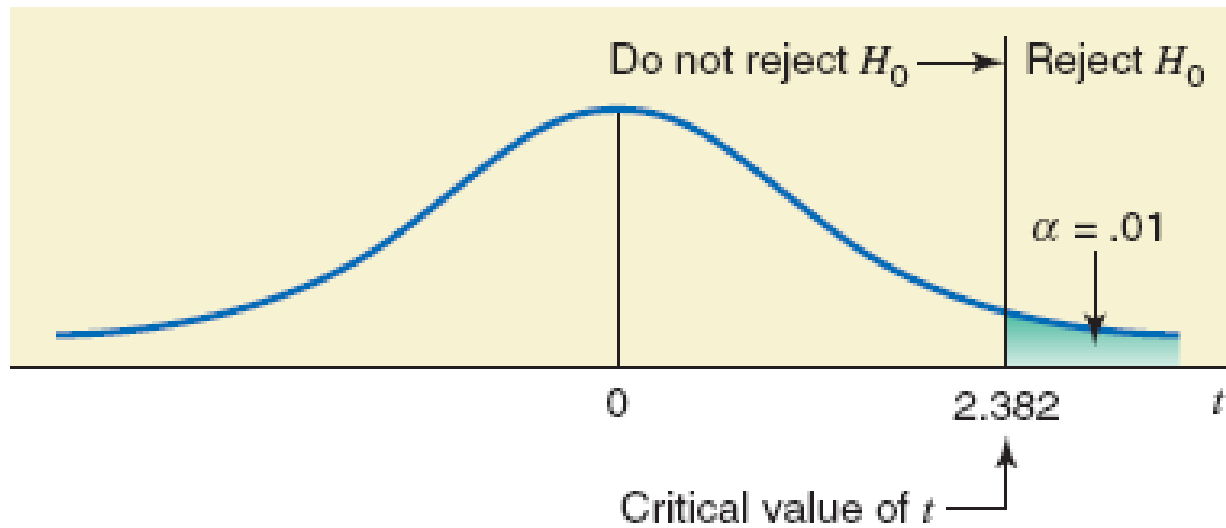
$$H_1 : \mu > 22$$

□ Korak 2: Standardna devijacija skupa σ nije poznata a uzorak je veliki ($n > 30$). Stoga koristimo t raspodjelu za test.

Primjer 9-8: Rješenje

- Korak 3: Nivo značajnosti = 0.01. Znak $>$ u alternativnoj hipotezi ukazuje da je test desnostrani i da se oblast odbacivanja nalazi na desnom kraju.
- Površina na desnom kraju = $\alpha = 0.01$
- $df = n - 1 = 70 - 1 = 69$
- Kritična vrijednost t za 69 df i površinu na desnom kraju od 0.01 je 2.382.

Slika 9.14



Primjer 9-8: Rješenje

□ Korak 4: $s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{2.5}{\sqrt{70}} = .29880715$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}} = \frac{27 - 22}{.29880715} = 16.733$$

Vrijednost statistike testa $t = 16.733$ je veća od kritične vrijednosti od $t = 2.382$, i nalazi se u oblasti odbacivanja. To znači da odbacujemo H_0 . Zbog toga možemo zaključiti da je aritmetička sredina uzorka prevelika u poređenju sa hipotetičkom vrijednošću aritmetičke sredine osnovnog skupa, a razlika između njih ne može biti rezultat slučajnosti.

Testiranje hipoteza za μ korišćenjem t raspodjele

Šta se dešava ako je uzorak preveliki?

1. Koristiti kritične vrijednosti t iz poslednjeg reda (red ∞) Tablice V u Dodatku C.
2. Koristiti normalnu raspodjelu kao aproksimaciju t raspodjele.

TESTIRANJE HIPOTEZE O PROPORCIJI OSNOVNOG SKUPA: VELIKI UZORCI

Statistika testa

Statistika testa z za proporciju uzorka, \hat{p} , izračunava se kao

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sigma_{\hat{p}}} \text{ gdje je } \sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

Vrijednost p u ovoj formuli je ona koja se koristi u nultoj hipotezi. Vrijednost q je jednaka $1-p$. Vrijednost z koja se izračunava za \hat{p} primjenom gore navedene formule naziva se realizovana vrijednost z .

Pravila z testa hipoteza o p : veliki uzorci

	Dvostrani test	Lijevostrani test	Desnostrani test
Nulta hipoteza H_0	$p = p_0$	$p = p_0$ ili $p \geq p_0$	$p = p_0$ ili $p \leq p_0$
Alternativna hipoteza H_1	$p \neq p_0$	$p < p_0$	$p > p_0$
Kritična vrijednost	$\frac{z_\alpha}{2}$	$-z_\alpha$	z_α
Statistika testa	$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$		
Pravilo odbacivanja H_0	$ z > \frac{z_\alpha}{2}$	$z < -z_\alpha$	$z > z_\alpha$
Oblast odbacivanja	Na oba kraja	Na lijevom kraju	Na desnom kraju

Primjer 9-11

Prema anketi „*Vožnja tokom rasijanosti*“ nacionalne kompanije za uzajamno osiguranje sprovedenoj u 2008. godini, 81% intervjuisanih vozača reklo je da su razgovarali na mobilnim telefonima tokom vožnje (*The New York Times*, 19. jul, 2009). Anketa je obuhvatila vozače starosti od 16 do 61 godina odabrane iz 48 država. Pretpostavimo da ovaj rezultat važi za populaciju svih takvih vozača u SAD-u u 2008. godini. U nedavnom slučajnom uzorku od 1600 vozača starih od 16 do 61 godina izabranih iz SAD-a, 83% reklo je da su razgovarali na mobilnim telefonima tokom vožnje.

Primjer 9-11

Koristeći nivo značajnosti od 5%, da li možete da zaključite da se sadašnji procenat ovakvih vozača koji su razgovarali na mobilnom telefonu tokom vožnje razlikuje od 81%.

Primjer 9-11: Rješenje

□ Korak 1: $H_0 : p = 0.81$

$$H_1 : p \neq 0.81$$

□ Korak 2: da bismo provjerili da li je uzorak veliki, izračunavamo vrijednosti np i nq :

$$np = 1600(0.81) = 1296 > 5$$

$$nq = 1600(0.19) = 304 > 5$$

Prema tome, koristimo normalnu raspodjelu za test.

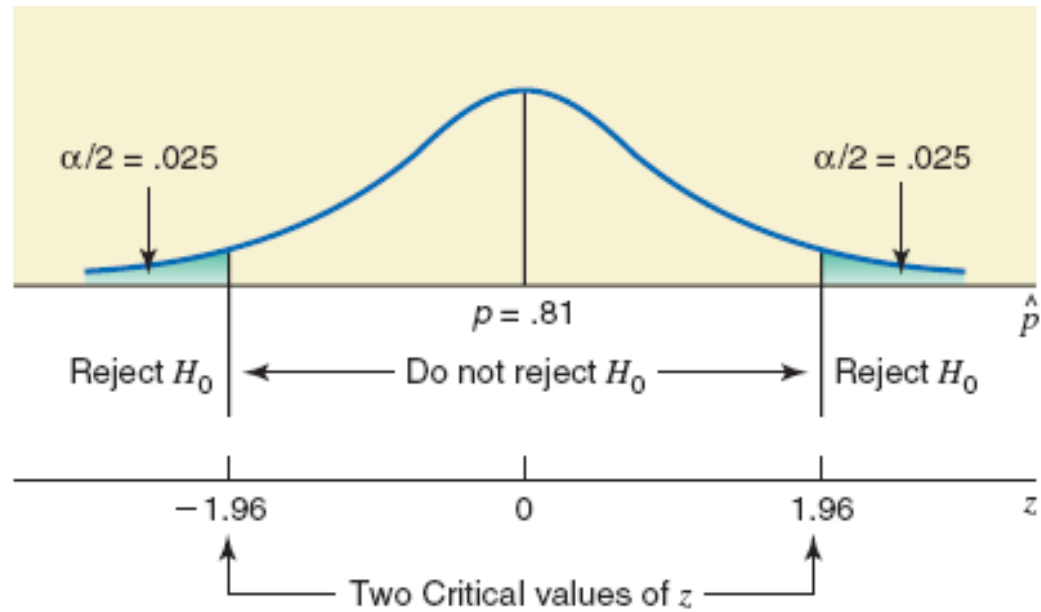
Primjer 9-11: Rješenje

- Korak 3: Znak \neq u alternativnoj hipotezi ukazuje da je test dvostrani. Nivo značajnosti je 0.05. Dakle, ukupna površina dvije oblasti odbacivanja iznosi 0.05.

Površina na svakom kraju = $\alpha / 2 = 0.05 / 2 = 0.025$

Kritične vrijednosti od z su -1.96 i 1.96.

Slika 9.17 Kritične vrijednosti od z



Primjer 9-11: Rješenje

□ Korak 4:

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{(.81)(.19)}{1600}} = .00980752$$

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{.83 - .81}{.00980752} = 2.04$$

Primjer 9-11: Rješenje

- Korak 5: Vrijednost statistike testa $z = 2.04$ nalazi se u oblasti odbacivanja. Zbog toga odbacujemo H_0 i zaključujemo da se sadašnji procenat ovakvih vozača koji su razgovarali na mobilnom telefonu tokom vožnje razlikuje od 81%.