# POGLAVLJE 13

## PROSTA LINEARNA REGRESIJA

# 13.1 PROST LINEARNI REGRESIONI MODEL

- Prosta regresija
- Linearna regresija

# Prosta regresija

## Definicija

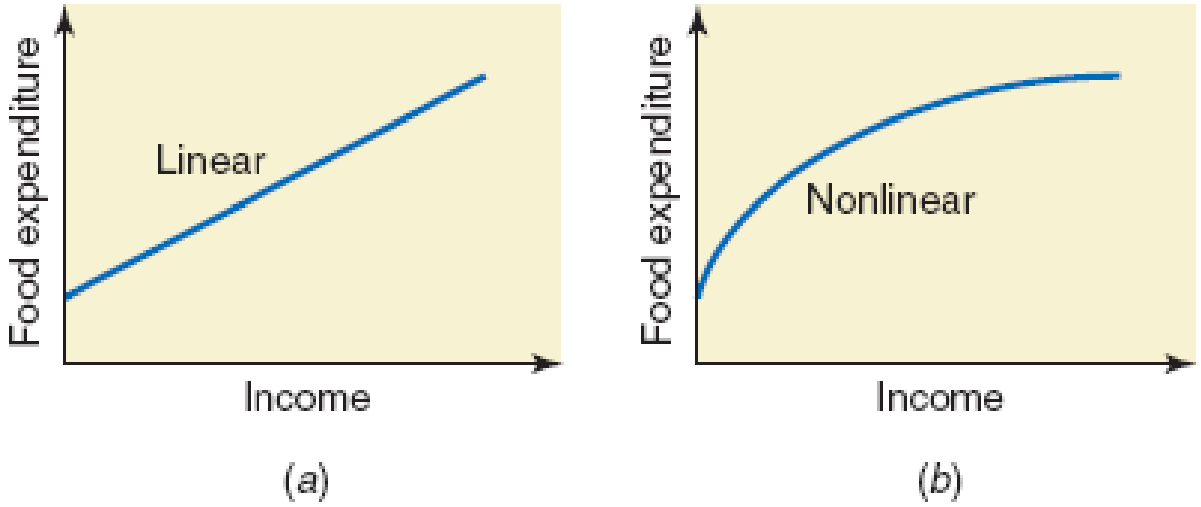
Regresioni model je matematički model koji opisuje vezu između dvije ili više promjenljivih. ***Prost regresioni*** model obuhvata samo dvije promjenljive: jednu objašnjavajuću i jednu zavisnu. Zavisna promjenljiva je promjenljiva čije varijacije treba da objasnimo na osnovu kretanja objašnjavajuće promjenljive.

# Linearna regresija

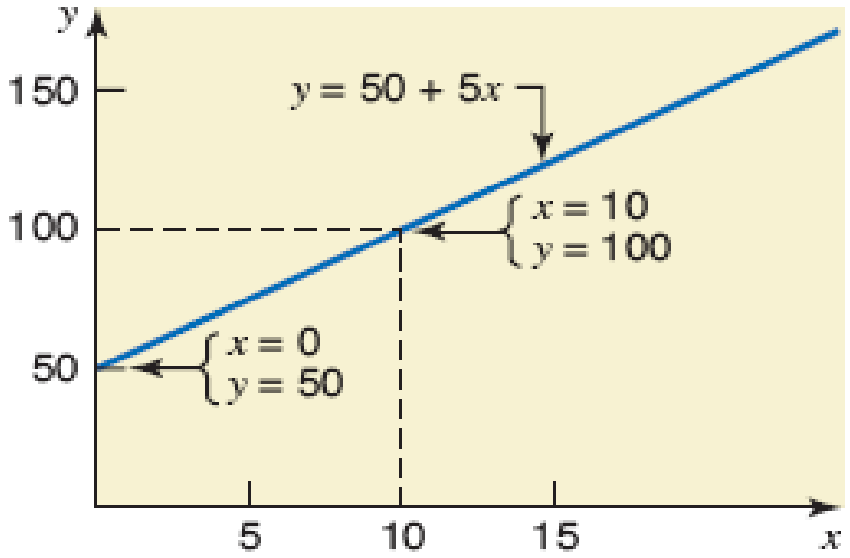
## Definicija

Regresioni model kojim se opisuje linearna međuzavsinost između dvije promjenljive naziva se ***prost linearni regresioni*** model.

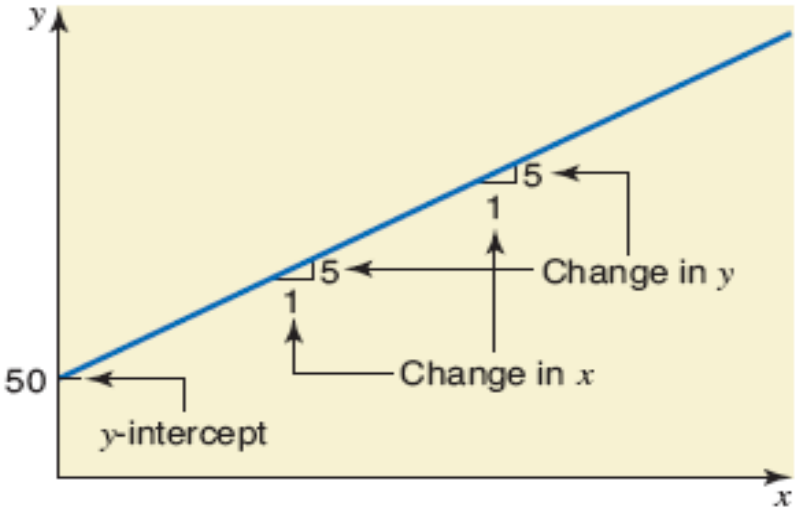
# Slika 13.1 Veza između izdataka za hranu i dohotka. (a) Linearna veza. (b) Nelinearna veza.



# Slika 13.2 Grafički prikaz jednačine prave.



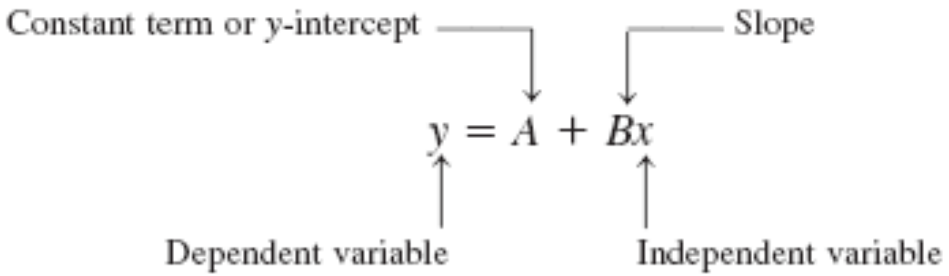
# Slika 13.3 Odsječak i nagib prave linije.



# 13.2 PROSTA LINEARNA REGRESIONA ANALIZA

- Dijagram raspršenosti (rasturanja)
- Metod najmanjih kvadrata
- Interpretacija ocijenjenih vrijednosti $a$ i $b$
- Pretpostavke prostog linearnog regresionog modela

# PROSTA LINEARNA REGRESIONA ANALIZA



# PROSTA LINEARNA REGRESIONA ANALIZA

## Definicija

U ***regresionom modelu*** $y = A + Bx + \varepsilon$, $A$ je odsječak ili konstanta, $B$ koeficijent nagiba, a ε slučajna greška. Zavisna i objašnjavajuća promjenljiva su $y$ i $x$, respektivno.

# PROSTA LINEARNA REGRESIONA ANALIZA

## Definicija

U regresionom modelu uzorka $\hat{y} = a + bx$, koeficijenti *a* i *b* nazivaju se ***ocjene parametara A i B***, respektivno.

# Tabela 13.1 Dohodak (u stotinama dolara) i izdaci za hranu sedam domaćinstava

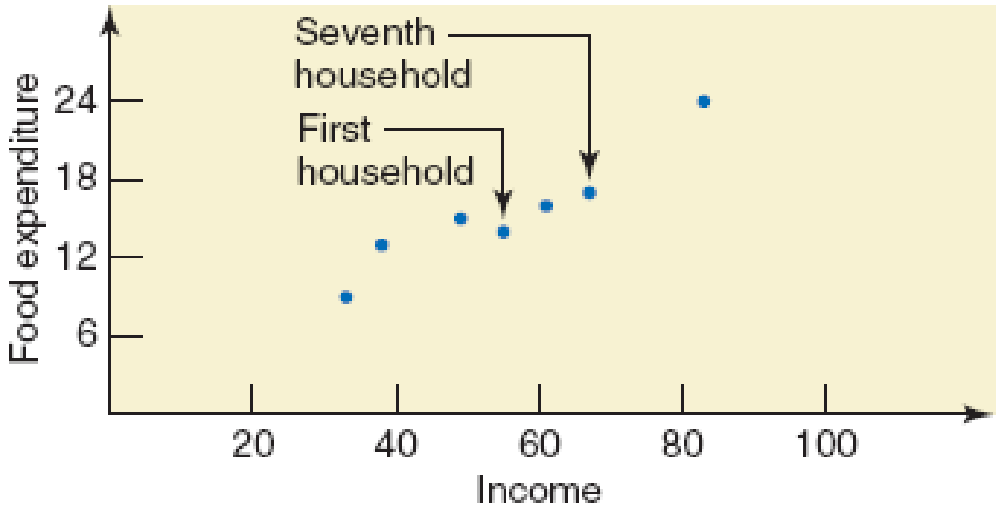
| Income | Food Expenditure |
|---|---|
| 55 | 14 |
| 83 | 24 |
| 38 | 13 |
| 61 | 16 |
| 33 | 9 |
| 49 | 15 |
| 67 | 17 |

# Dijagram raspršenosti (rasturanja)

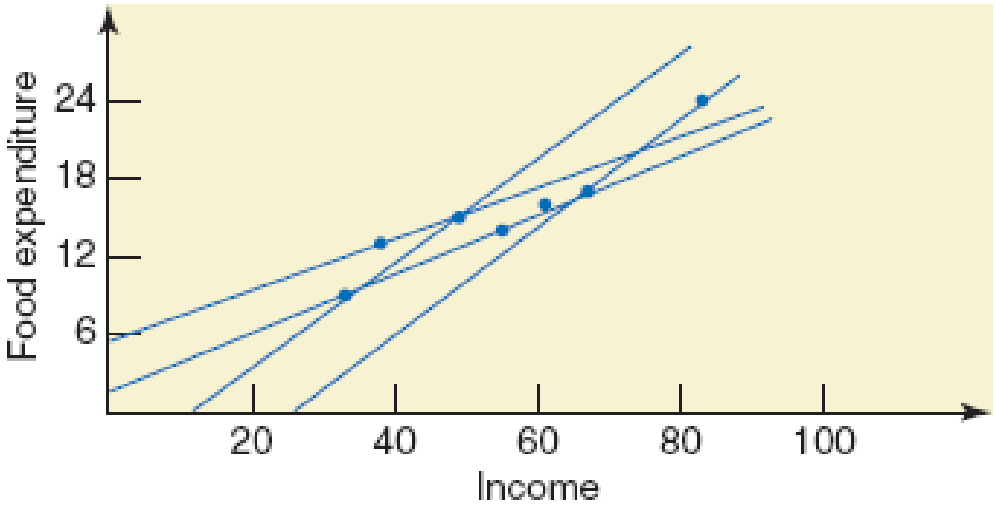
## Definicija

Grafički prikaz parova podataka *X* i *Y* u osnovnom skupu (ili uzorku) naziva se ***dijagram raspršenosti (rasturanja)***.

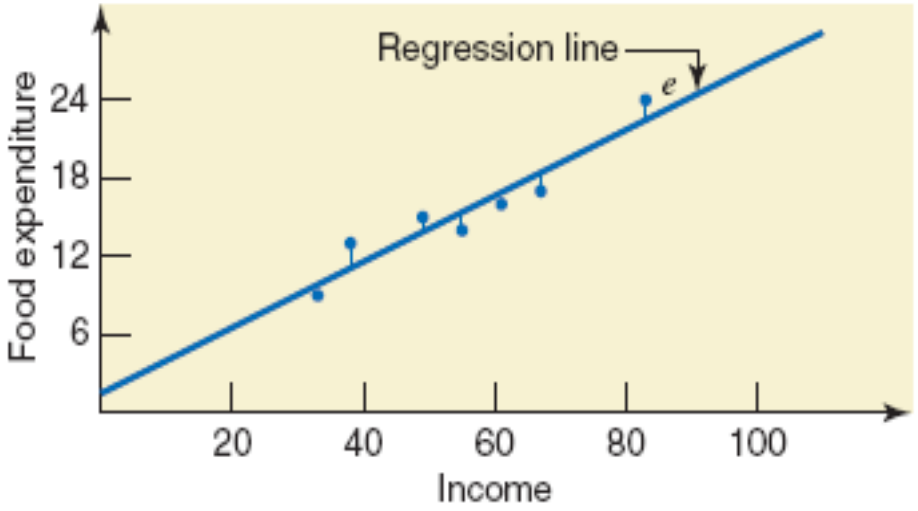
# Slika 13.4 Dijagram raspršenosti.



# Slika 13.5 Dijagram raspršenosti i regresione prave.



# Slika 13.6 Regresiona prava i reziduali.



# Suma kvadrata reziduala (SSE)

***Suma kvadrata reziduala***, u oznaci SSE, je

$$\mathbf{SSE} = \sum \boldsymbol{e}^2 = \sum (\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}})^2$$

Minimiziranjem sume kvadrata reziduala dobijaju se *a* i *b* kao ***ocjene regresionih parametara*** $A$ i $B$, a regresiona prava koja se na osnovu tih ocjena dobija naziva se ***regresiona prava uzorka***.

# Linija regresije uzorka

Koeficijenti regresione prave uzorka $\hat{y} = a + bx$, odnosno ocjene po metodu najmanjih kvadrata glase:

$$b = \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}} \quad \text{i} \quad a = \bar{y} - b\bar{x}$$

# Linija regresije uzorka

gdje je

$$SS_{xy} = \sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n} \qquad \text{i} \qquad SS_{xx} = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}$$

i gdje SS označava odgovarajuću "sumu kvadrata". Linija regresije uzorka $\hat{y} = a + bx$ se također naziva regresija od $y$ na $x$.

# Primjer 13-1

Na osnovu podataka slučajnog uzorka od sedam domaćinstava, prikazanih u Tabeli 13.1, ocijenite regresioni model primjenom metoda najmanjih kvadrata.
Objašnjavajuća promjenljiva je dohodak, a zavisna promjenljiva izdaci za hranu.

# Tabela 13.2

| Income $x$ | Food Expenditure $y$ | $xy$ | $x^2$ |
|---|---|---|---|
| 55 | 14 | 770 | 3025 |
| 83 | 24 | 1992 | 6889 |
| 38 | 13 | 494 | 1444 |
| 61 | 16 | 976 | 3721 |
| 33 | 9 | 297 | 1089 |
| 49 | 15 | 735 | 2401 |
| 67 | 17 | 1139 | 4489 |
| $\Sigma x = 386$ | $\Sigma y = 108$ | $\Sigma xy = 6403$ | $\Sigma x^2 = 23{,}058$ |

# Primjer 13-1: Rješenje

$$\sum x = 386 \qquad \sum y = 108$$

$$\bar{x} = \sum x / n = 386/7 = 55.1429$$

$$\bar{y} = \sum y / n = 108/7 = 15.4286$$

# Primjer 13-1: Rješenje

$$SS_{xy} = \sum xy - \frac{\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n} = 6403 - \frac{(386)(108)}{7} = 447.5714$$

$$SS_{xx} = \sum x^2 - \frac{\left(\sum x\right)^2}{n} = 23,058 - \frac{(386)^2}{7} = 1772.8571$$

# Primjer 13-1: Rješenje

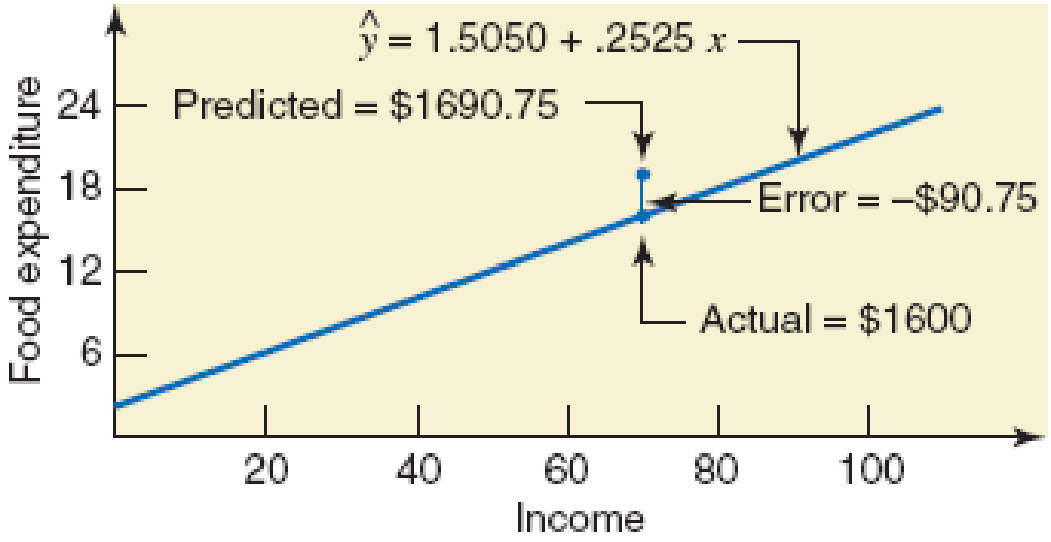
$$b = \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}} = \frac{447.5714}{1772.8571} = .2525$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 15.4286 - (.2525)(55.1429) = 1.5050$$

Dakle, ocijenjeni regresioni model glasi

$$\hat{y} = 1.5050 + 0.2525\,x$$

# Slika 13.7 Rezidual.



# Interpretacija ocijenjenih vrijednosti $a$ i $b$

## Interpretacija ocijenjene vrijednosti $a$

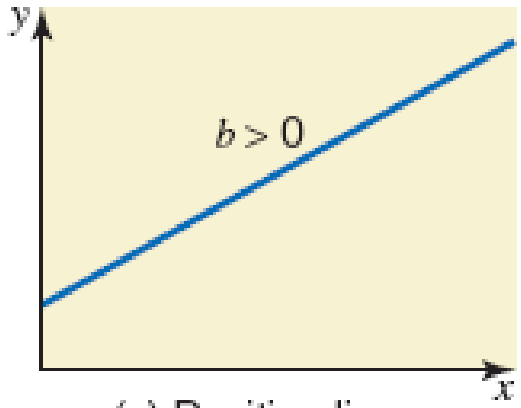
- Ukoliko razmatramo domaćinstvo sa nultim nivoom dohotka, na osnovu ocijenjene regresione prave iz primjera 13-1, dobijamo ocijenjenu vrijednost $y$ za $x$=0:
  - $\hat{y}$ = 1.5050 + 0.2525(0) = \$1.5050 stotina
- Dakle, možemo zaključiti da domaćinstvo koje ne ostvaruje nikakav dohodak troši \$150.50 mjesečno na hranu
- Regresiona prava važi samo za vrijednosti $x$ između 33 i 83

# Interpretacija ocijenjenih vrijednosti $a$ i $b$

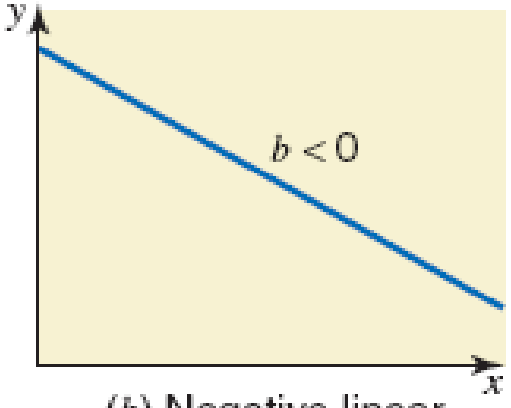
## Interpretacija ocijenjene vrijednosti $b$

- Vrijednost $b$ u regresionom modelu pokazuje koliko se u prosjeku promijeni $y$ (zavisna promjenljiva) ako se $x$ (objašnjavajuća promjenljiva) poveća za jednu svoju jedinicu.
- Možemo zaključiti, u prosjeku, da će rast dohotka od \$100 (ili \$1) imati za rezultat porast izdataka za hranu za \$25.25 (ili \$0.2525).

# Slika 13.8 Pozitivna i negativna linearna veza između x i y.




(a) Positive linear relationship




(b) Negative linear relationship

# Pretpostavke prostog linearnog regresionog modela

Pretpostavka 1:

Očekivana vrijednost slučajne greške $\epsilon$ jednaka je nuli za svaku vrijednost promjenljive $x$

Pretpostavka 2:

Slučajne greške različitih opservacija su međusobno nezavisne

# Pretpostavke prostog linearnog regresionog modela

Pretpostavka 3:

Za datu vrijednost promjenljive $x$, raspodjela slučajnih grešaka je normalna

Pretpostavka 4:

Slučajne greške za svaku vrijednost promjenljive $x$ imaju konstantnu standardnu devijaciju $\sigma_{\epsilon}$

# 13.3 STANDARDNA DEVIJACIJA SLUČAJNE GREŠKE

Broj stepeni slobode u prostom linearnom regresionom modelu

***Broj stepeni slobode*** u prostom linearnom regresionom modelu je

$$df = n - 2$$

# STANDARDNA GREŠKA REGRESIJE

***Standardna greška regresije*** izračunava se kao

$$s_e = \sqrt{\frac{SS_{yy} - bSS_{xy}}{n-2}}$$

gdje

$$SS_{yy} = \sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}$$

# Primjer 13-2

Na osnovu podataka datih u Tabeli 13.1, izračunajte standardnu grešku regresije.

# Tabela 13.3

| Income $x$ | Food Expenditure $y$ | $y^2$ |
|---|---|---|
| 55 | 14 | 196 |
| 83 | 24 | 576 |
| 38 | 13 | 169 |
| 61 | 16 | 256 |
| 33 | 9 | 81 |
| 49 | 15 | 225 |
| 67 | 17 | 289 |
| $\Sigma x = 386$ | $\Sigma y = 108$ | $\Sigma y^2 = 1792$ |

# Primjer 13-2: Rješenje

$$SS_{yy} = \sum y^2 - \frac{\left(\sum y\right)^2}{n} = 1792 - \frac{(108)^2}{7} = 125.7143$$

$$s_e = \sqrt{\frac{SS_{yy} - bSS_{xy}}{n-2}} \sqrt{\frac{125.7143 - .2525(447.5714)}{7-2}} = 1.5939$$

# 13.4 KOEFICIJENT DETERMINACIJE

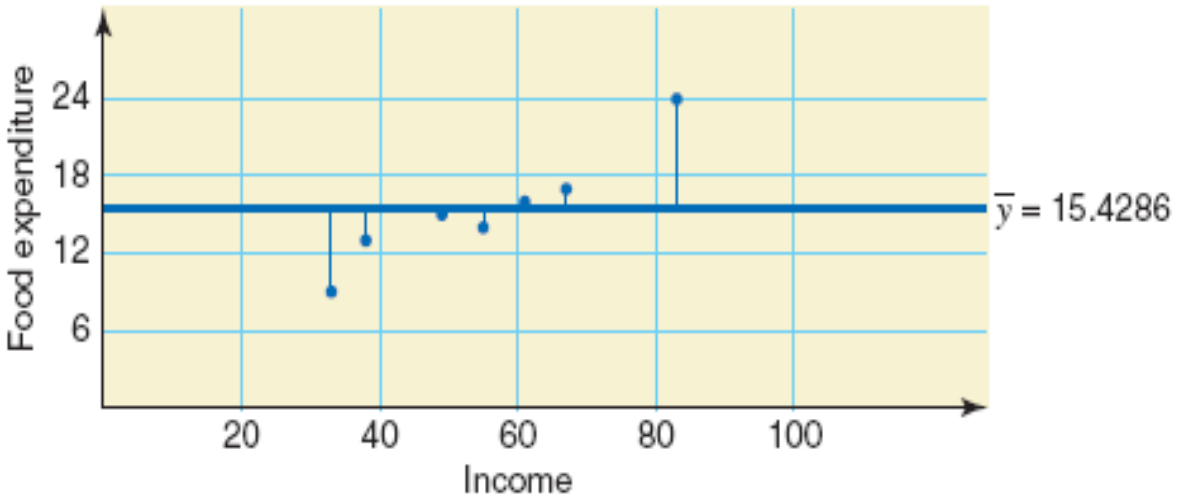
## Ukupna suma kvadrata (SST)

***Ukupna suma kvadrata***, označena sa SST, računa se po sledećoj formuli

$$SST = \sum y^2 - \frac{\left(\sum y\right)^2}{n}$$

Obratite pažnju da je ovo ista formula koju smo koristili da izračunamo $SS_{yy}$.

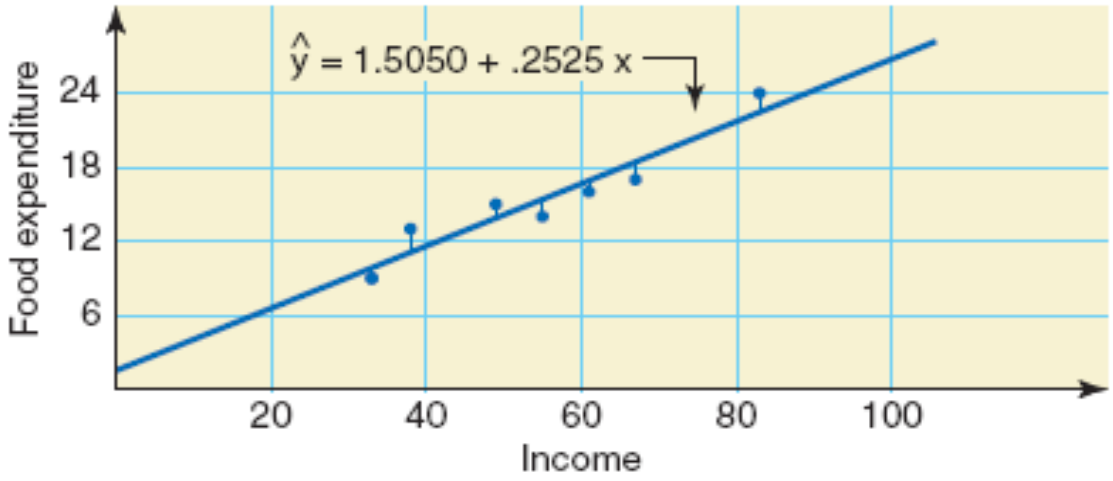
# Slika 13.15 Ukupno odstupanje.



# Tabela 13.4

| $x$ | $y$ | $\hat{y} = 1.5050 + .2525x$ | $e = y - \hat{y}$ | $e^2 = (y - \hat{y})^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 55 | 14 | 15.3925 | −1.3925 | 1.9391 |
| 83 | 24 | 22.4625 | 1.5375 | 2.3639 |
| 38 | 13 | 11.1000 | 1.9000 | 3.6100 |
| 61 | 16 | 16.9075 | −.9075 | .8236 |
| 33 | 9 | 9.8375 | −.8375 | .7014 |
| 49 | 15 | 13.8775 | 1.1225 | 1.2600 |
| 67 | 17 | 18.4225 | −1.4225 | 2.0235 |
| | | | | $\Sigma e^2 = \Sigma(y - \hat{y})^2 = 12.7215$ |

# Slika 13.16 Reziduali ocijenjenog regresionog modela.



# KOEFICIJENT DETERMINACIJE

Suma kvadrata objašnjenog varijabiliteta (SSR)

***Suma kvadrata objašnjenog varijabiliteta*** , u oznaci SSR, je

$$SSR = SST - SSE$$

# KOEFICIJENT DETERMINACIJE

## Koeficijent determinacije

***Koeficijent determinacije***, označen sa $r^2$, predstavlja učešće objašnjenog u ukupnom varijabilitetu, odnosno $r^2$ je

$$r^2 = \frac{b\ SS_{xy}}{SS_{yy}}$$

i $0 \leq r^2 \leq 1$

# Primjer 13-3

Na osnovu podataka u Tabeli 13.1 o mjesečnom dohotku i izdacima za hranu, izračunati koeficijent determinacije.

# Primjer 13-3: Rješenje

- Na osnovu rezultata iz primjera 13-1 i 13-2,
- $b$ = 0.2525, $SSxx$ = 447.5714, $SSyy$ = 125.7143

$$r^2 = \frac{b\ SS_{xy}}{SS_{yy}} = \frac{(.2525)(447.5714)}{125.7143} = .90$$

# 13.5 STATISTIČKO ZAKLJUČIVANJE O PARAMETRU $B$

- Uzoračka raspodjela ocjene $b$
- Ocjenjivanje regresionog parametra $B$
- Testiranje hipoteze o regresionom parametru $B$

# Uzoračka raspodjela ocjene $b$

## Očekivana vrijednost, standardna devijacija, i uzoračka raspodjela ocjene $b$

Zbog pretpostavke o normalnosti slučajnih grešaka, uzoračka raspodjela ocjene $b$ također je normalna sa očekivanom vrijednošću i standardnom devijacijom (standardnom greškom), označenim sa $\mu_b$ i $\sigma_b$, respektivno:

$$\mu_b = B \qquad \text{i} \qquad \sigma_b = \frac{\sigma_\epsilon}{\sqrt{SS_{xx}}}$$

# Ocjenjivanje regresionog parametra $B$

## Interval povjerenja za parametar $B$

(1 – α)100% ***interval povjerenja za parametar $B$*** glasi

$$b \pm ts_b$$

gdje je

$$s_b = \frac{s_e}{\sqrt{SS_{xx}}}$$

Vrijednost t statistike dobijamo iz Tablice Studentove t raspodjele za površinu od α/2 na oba kraja raspodjele i n-2 stepena slobode.

# Primjer 13-4

Formirati 95% interval povjerenja za parametar $B$ za podatke o dohotku i izdacima za hranu sedam domaćinstava datim u Tabeli 13.1.

# Primjer 13-4: Rješenje

$$s_b = \frac{s_e}{\sqrt{SS_{xx}}} = \frac{1.5939}{\sqrt{1772.8571}} = .0379$$

$$df = n - 2 = 7 - 2 = 5$$

$$\alpha / 2 = (1 - .95) / 2 = .025$$

$$t = 2.571$$

$$b \pm ts_b = .2525 \pm 2.571(.0379)$$

$$= .2525 \pm .0974 = .155 \quad \text{do} \quad .350$$

# Testiranje hipoteze o regresionom parametru $B$

## Statistika testa za $b$

vrijednost ***statistike testa $t$ za $b$*** računa se kao

$$t = \frac{b - B}{s_b}$$

Vrijednost regresionog parametra $B$ u prethodnom izrazu zamjenjuje se hipotetičkom vrijednošću koja je definisana nultom hipotezom.

# Primjer 13-5

Testirati pri nivou značajnosti 1% da li je koeficijent nagiba regresione prave osnovnog skupa za primjer o dohotku i izdacima za hranu sedam domaćinstava pozitivan.

# Primjer 13-5: Rješenje

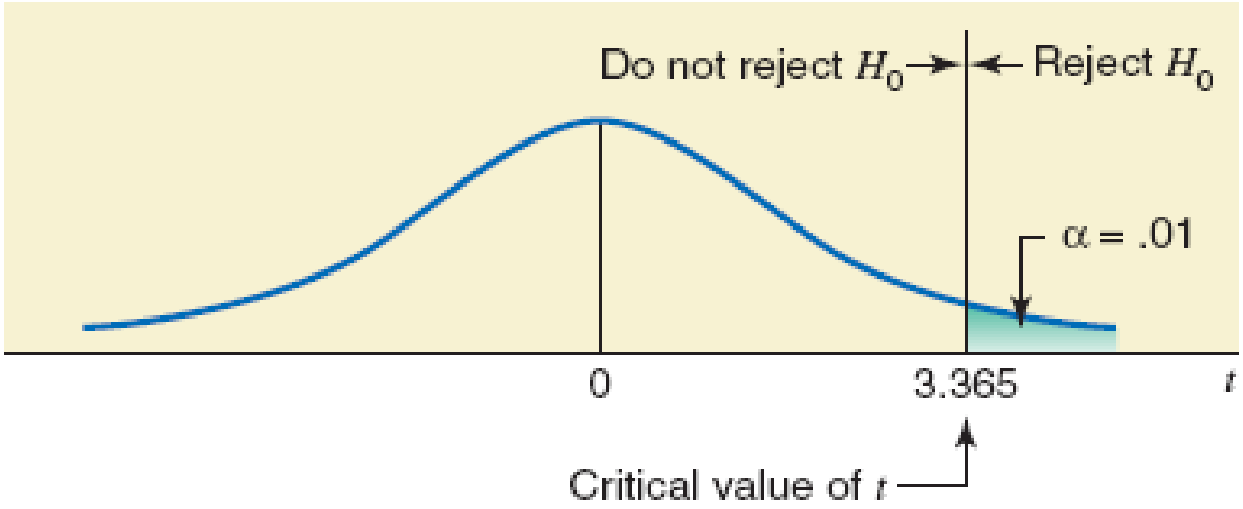
- Etapa 1:
- $H_0$: $B = 0$ (regresioni parametar je nula)
- $H_1$: $B > 0$ (regresioni parametar je pozitivan)

- Etapa 2:
- $\sigma_\epsilon$ nije poznato
- Dakle, koristimo t raspodjelu za test o $B$

# Primjer 13-5: Rješenje

- Etapa 3:
- $\alpha = 0.01$
- Površina na desnom kraju = $\alpha = 0.01$
- $df = n - 2 = 7 - 2 = 5$
- Kritična vrijednost $t$ je 3.365

# Slika 13.17


Do not reject $H_0$
Reject $H_0$
$\alpha = .01$
0
3.365
$t$
Critical value of $t$

# Primjer 13-5: Rješenje

Etapa 4:

Iz $H_0$

$$t = \frac{b - B}{s_b} = \frac{.2525 - 0}{.0379} = 6.662$$

# Primjer 13-5: Rješenje

- Etapa 5:
- Vrijednost statistike testa $t = 6.662$
  - Veća je od kritične vrijednosti $t = 3.365$
  - Nalazi se u oblasti odbacivanja nulte hipoteze
- Dakle, odbacujemo nultu hipotezu
- Zaključujemo da promjenljiva *x* (dohodak) pozitivno utiče na promjenljivu *y* (izdaci za hranu).