OSNOVNI POJMOVI TEORIJE VJEROVATNOĆE

Teorija vjerovatnoće se bavi izučavanjem eksperimenata sa slučajnim ishodima (rezultatima eksperimenta).

Uvedimo oznake: Ω - skup svih mogućih ishoda nekog eksperimenta

ω - elementi skupa Ω (ishodi ili elementarni događaji).

DEFINICIJA: $A \subseteq \Omega$ je slučajni događaj. Svaki podskup A skupa Ω je događaj.

Događaj A se realizuje ako se ostvari neki ishod ω koji pripada podskupu A.

Nemoguć događaj je događaj koji se nikada ne ostvaruje. Njemu odgovarajući skup povoljnih ishoda je prazan skup $\emptyset$.

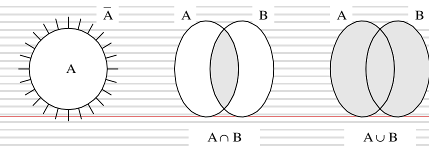
Siguran događaj je događaj koji se uvijek ostvaruje. Njemu odgovara Ω.

OSNOVNE OPERACIJE NAD DOGAĐAJIMA

SUPROTAN DOGAĐAJ $\overline{A}$ (komplement skupa A) – događaj koji se realizuje samo ukoliko se A ne realizuje.

PRESJEK DOGAĐAJA $A \cap B$ (često ćemo pisati samo AB) – događaj koji se ostvaruje ako se ostvare i A i B

UNIJA DOGAĐAJA $A \cup B$ (ostvaruje se ako se ostvari bar jedan od događaja A, B).



OSNOVNI POJMOVI TEORIJE VJEROVATNOĆE

Relacija među događajima

DISJUNKCIJA (ISKLJUČIVANJE) DOGAĐAJA - događaji su disjunktni (isključuju se) ako ne mogu istovremeno da se ostvare.

$A \cap B = \emptyset$

Za uniju disjunktnih događaja često ćemo pisati $A + B$

IMPLIKACIJA DOGAĐAJA - A implicira (povlači) B ako se pri pri realizaciji događaja A uvijek realizuje i događaj B.

DEFINICIJA VJEROVATNOĆE

Klasična (Laplasova) definicija vjerovatnoće događaja A:

$$\boxed{p(A) = \frac{M}{N}}$$

M – broj povoljnih ishoda

N – broj svih mogućih ishoda

Primjer: ***Kolika je vjerovatnoća da pri bacanju novčića padne grb?***

$$\Omega = \{P, G\}$$
$$A = \{G\}$$
$$p(A) = \frac{1}{2}$$

KOMBINATORIKA

DEFINICIJA: Neka je dat skup $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

1. **Kombinacije bez ponavljanja klase k od n elemenata** su bilo koji podskupovi sa k elemenata od n datih.

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k-1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-K)!}$$

2. **Varijacije bez ponavljanja klase k od n elemenata** su uređeni podskupovi k elemenata od n datih.

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (0 - k + 1)$$
$$V_n^0 = 1$$

3. **Permutacije bez ponavljanja od n elemenata** su varijacije (bez ponavljanja) gdje je k = n.

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

OSNOVNI KOMBINATORNI MODELI

1. Ako imamo r konačnih skupova $A_1, \dots, A_r$ koji imaju $n_1, \dots, n_r$ elemenata respektivno i ako se bira r elemenata, iz svakog po jedan, predmete (njih r) je moguće odabrati na $N = n_1 \dots n_r$ načina.

2. Izbor sa vraćanjem

Ako biramo jedan po jedan element iz skupa $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ i izabrani element registrujemo, a zatim vratimo, tada je broj mogućih izbora n^r (varijacija sa ponavljanjem - poredak je bitan).

3.Izbor bez vraćanja

a) Ako imamo situaciju iz 2., ali bez vraćanja elemenata, tada je broj mogućih izbora $n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1)$ (varijacije bez ponavljanja).

b) Ako tih r elemenata biramo iz skupa A (koji ima n elemenata) odjednom, tada je riječ o kombinacijama bez ponavljanja, jer poredak izvlačenja nije bitan, tj. njihov broj je $\binom{n}{r}$.

OSOBINE VJEROVATNOĆE

TEOREMA.

1. $0 \le p(A) \le 1$
2. $p(\Omega) = 1, \quad p(\varnothing) = 0$
3. Za $A \cap B = \varnothing$ je $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

   Za A, B, ... , C koji su međusobno disjunktni važi

   $p(A \cup B \cup \ldots \cup C) = p(A) + p(B) + \ldots + p(C)$
4. Ako je $A \subseteq \Omega$ tada je $p(A) \le p(B)$
5. $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
6. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
7. $p(A \cup B) \le p(A) + p(B)$

USLOVNA VJEROVATNOĆA
NEZAVISNOST DOGAĐAJA

Uslovna vjerovatnoća događaja A, pod uslovom da se desio događaj B, je broj, koji označavamo sa $p(A/B)$ definisan sa

$$\boxed{p(A/B) = \frac{p(AB)}{p(B)}}$$

uz uslov da je $p(B) > 0$ i da su A i B događaji iz istog prostora događaja.

Iz definicije dobijamo tzv. **formulu množenja vjerovatnoća:**

$$p(AB) = p(B) \cdot p(A/B) = p(A) \cdot p(B/A)$$

Njeno uopštenje na slučaj n događaja je:

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2 / A_1) \cdot p(A_3 / A_1 A_2) \cdot \ldots \cdot p(A_n / A_1 A_2 \ldots A_{n-1})$$

Događaji A i B su **nezavisni** ako je $\boxed{p(AB) = p(A) \cdot p(B)}$

FORMULA POTPUNE VJEROVATNOĆE
BAJESOVA FORMULA

Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ međusobno disjunktni događaji sa pozitivnim vjerovatnoćama. Ako je njihova unija Ω, tada za njih kažemo da obrazuju potpun sistem događaja (razbijanje sigurnog događaja).

TEOREMA: Za $B \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$ važi tzv. formula potpune vjerovatnoće:

$$\boxed{p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) \cdot p(B/A_i)}$$

DOKAZ: Kako je po pretpostavci $B \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$ to je $B = BA_1 + \ldots + BA_n$

Primjenjujući osobinu aditivnosti i formulu množenja vjerovatnoća imamo:

$$\boxed{p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(BA_i) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) \cdot p(B/A_i)}$$

BERNULIJEVA ŠEMA

Neka se izvodi niz od n nezavisnih eksperimenata za koje važi da se svaki od njih završava sa jednim od dva moguća ishoda; uspjehom, sa vjerovatnoćom p i neuspjehom, sa vjerovatnoćom q=1-p.

Ako je A_k, k=0,1,...,n događaj, da se tačno k od n izvedenih eksperimenata završi uspješno, tada je:

$$\boxed{p(A_k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}}$$

SLUČAJNE VELIČINE

Preslikavanje $X : \Omega \to R$ je ***slučajna veličina.***

Slučajna veličina X je ***diskretnog tipa*** ako skup ishoda ω slika na konačan ili prebrojiv skup vrijednosti (realizacija te slučajne veličine) $R_x = \{x_1, x_2, \ldots\}$

Diskretne slučajne veličine kod kojih je R_x konačan skup vrijednosti su ***proste slučajne veličine.***

Slučajna veličina diskretnog tipa je određena ako poznajemo skup njenih vrijednosti Rx i vjerovatnoće sa kojima ona uzima te vrijednosti,

$p_i = p\{\omega : X(\omega) = x_i\}$ i=1,2,...

Raspodjela slučajne veličine se označava sa

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots \end{pmatrix}$$

MATEMATIČKO OČEKIVANJE

Neka je X diskretna slučajna veličina sa konačnim skupom realizacija i raspodjelom:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Matematičko očekivanje (srednja vrijdnost) slučajne veličine je broj, koji označavamo sa EX, definisan sa:

$$EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum x_i p_i$$

Disperzija (varijansa) slučajne veličine X, u oznaci DX, se definiše sa:

$$DX = E(X - EX)^2$$

Kvadratni korijen iz disperzije se zove ***standardna devijacija ili standardno odstupanje, u oznaci σ(X).***

OSIGURANJE ŽIVOTA

UVODNE NAPOMENE

Aktuarska matematika je grana matematike koja se primjenjuje u teoriji osiguranja.

Osiguranje je ekonomska institucija čiji je cilj nadoknada štete, fizičkom ili pravnom licu ili društvu, prouzrokovane elementarnim nepogodama, nesrećnim slučajem i dr.

Polisa osiguranja je isprava kojom se osiguravač obavezuje da će osiguraniku isplatiti ugovorenu sumu, tj. to je isprava o zaključenom ugovoru o osiguranju.

Premija je iznos koji osiguranik plaća zavodu za određeno osiguranje.

OSIGURANJE ŽIVOTA

UVODNE NAPOMENE

Sa aspekta predmeta osiguranje može biti:

- Osiguranje imovine
- Osiguranje lica koje se vrši kao osiguranje života i osiguranje protiv nezgoda

Osiguranje lica može biti socijalno ili premijsko.

Predmet razmatranja će biti premijsko osiguranje života.

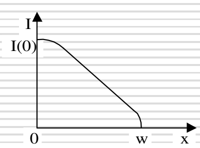
BIOMETRIJSKE FUNKCIJE

Funkciju, koja starosnom dobu pridružuje broj živih lica tog starosnog doba, označavamo sa l i zovemo **FUNKCIJA DOŽIVLJENJA.**

$$\boxed{l : N \cap [0, w] \to N \cap [0, l(x_0)]}$$

w - oznaka za najdublju starost

$l(x_0)$- broj članova polazne grupe osoba starih x_0 godina



BIOMETRIJSKE FUNKCIJE

$\boxed{p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}}$ vjerovatnoća da će lice staro x godina doživjeti narednu (x+1)-vu godinu

$\boxed{q_x = 1 - p_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}}$ vjerovatnoća da lice staro x godina neće doživjeti narednu (x+1)-vu godinu

$\boxed{{}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}}$ vjerovatnoća da će lice staro x godina doživjeti x+n godina

$\boxed{{}_n q_x = 1 - {}_n p_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}}$ vjerovatnoća da lice staro x godina neće doživjeti x+n godina

INTEZITET SMRTNOSTI I ŽIVOTA

INTENZITET SMRTNOSTI μ_x je trenutna stopa smrtnosti lica starih x godina).

$$\boxed{\mu_x = -\frac{l'_x}{l_x}}$$

Ukoliko nije dat analitički izraz za funkciju l_x, pošto znamo njenu vrijednost iz tablica smrtnosti, možemo odrediti približnu vrijednost intenziteta smrtnosti μ_x:

$$\boxed{\mu_x = \frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{2 \cdot l_x}}$$

Recipročna vrijednost intenziteta smrtnosti $\frac{1}{\mu_x}$ je **INTENZITET ŽIVOTA**.

SREDNJE TRAJANJE ŽIVOTA

- Neka je T - numerička funkcija koja slučajno izabranoj osobi pridružuje trajanje života od x-te godine do smtri (broj godina života još preostaje osobi koja ima x godina).

- Srednje trajanje života se definiše kao očekivanje pomenute neprekidne slučajne veličine T.

- Funkcija raspodjele slučajne veličine T je:

$F(t) = p(T < t)$ vjerovatnoća da lice staro x godina umrijeti do (x+t) godine

$F(t) = {}_t q_x$

Gustina raspodjele je : $f(t) = F'(t) = ({}_t q_x)'$

Očekivanje od T je : $ET = \int_0^{w+x} t \cdot ({}_t q_x)' dt$

SREDNJE TRAJANJE ŽIVOTA

Kako je izvod po t funkcije gustine: $\left[\dfrac{(l_x - l_{x+t})}{l_x}\right]' = \dfrac{-l'_{x+t}}{l_x}$

Poslije primjene parcijalne integracije dobijamo:

$$\boxed{ET = \frac{1}{l_x}\int_0^{w-x} l_{x+t}\,dt = \int_0^{w-x} {}_t p_x\,dt}$$

Ukoliko nije dat analitički izraz za funkciju doživljenja, srednje trajanje života je:

$$\boxed{ET = \frac{1}{2} + \frac{(l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots + l_{w-1})}{l_x}}$$

VJEROVATNO TRAJANJE ŽIVOTA

Vjerovatno trajanje života se definiše kao broj k, kojeg određujemo iz relacije:

$$\boxed{l_{x+k} = \frac{l_x}{2},\ \text{tj.}\ {}_k p_x = \frac{1}{2}}$$

Kako funkcija ${}_t p_x$ opada od 1 do 0 kada t raste od 0 do w-x to će takvo $k \in (0, w-x)$ postojati.

U opštem slučaju k se određuje interpolacijom uz upotrebu mortalitetnih tablica.

OSIGURANJE LIČNE RENTE JEDNOKRATNOM PREMIJOM - MIZOM

Lična renta je iznos koji osigurano lice prima lično, sve dok je u životu.

Lična renta može biti:

- neposredna (teče odmah po osiguranju) ili odložena;
- anticipativna (isplaćuje se početkom perioda) ili dekurzivna (krajem perioda)
- godišnja renta (prima se jednom godišnje) ili renta u ratama;
- konstantna ili promjenljiva rentu;

Prema trajanju renta može biti:

- neposredna doživotna lična renta,
- odložena doživotna lična renta,
- neposredna privremena lična renta i
- odložena privremena lična renta.

NEPOSREDNA DOŽIVOTNA LIČNA RENTA

Razmotrimo problem određivanja mize anticipativne rente od 1 €, tj. sume koju treba da uplati lice staro x godina osiguravajućem zavodu, da bi mu zavod od dana osiguranja do smrti isplaćivao, početkom godine, rentu od 1€.

Označimo sa:

- a_x – premiju;
- X_i - diskretnu slučajnu veličinu koja predstavlja vrijednost i-te isplate (koja je diskontovana na dan osiguarnja), $i = 0, 1, 2, \ldots, w-x$ (w-najdublja starost), za osobu staru x godina.
- ako je p kamatna stopa važi $q = 1 + \dfrac{p}{100}$

NEPOSREDNA DOŽIVOTNA LIČNA RENTA

Raspodjela slučajne veličine:

$$X_i : \begin{Bmatrix} 0 & \dfrac{1}{q^i} \\ 1 - \dfrac{l_{x+i}}{l_x} & \dfrac{l_{x+i}}{l_x} \end{Bmatrix}, i = 0, 1, 2, \ldots, w-x$$

Očekivanja tih diskretnih slučajnih veličina su

$$EX_i = 0 \cdot \left(1 - \frac{l_{x+1}}{l_x}\right) + \frac{1}{q^i} \cdot \frac{l_{x+i}}{l_x} = \frac{l_{x+i}}{l_x} \cdot \frac{1}{q^i} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, w-x$$

Dijeljenjem brojioca i imenioca prethodne relacije sa q^x dobijamo:

$$EX_i = \frac{\dfrac{l_{x+i}}{q^{x+i}}}{\dfrac{l_x}{q^x}} = \frac{D_{x+i}}{D_x},\ \text{gdje je}\ D_x = \frac{l_x}{q^x}\ \text{(diskontovani broj živih lica starih x god)}$$

NEPOSREDNA DOŽIVOTNA LIČNA RENTA

Kako je a_x jednako sumi očekivanja slučajnih veličina X_i, važi:

$$\begin{aligned} a_x &= EX_0 + EX_1 + EX_2 + \ldots + EX_{w-x} \\ &= \frac{l_x}{l_x} \cdot 1 + \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{1}{q} + \frac{l_{x+2}}{l_x} \cdot \frac{1}{q^2} + \ldots + \frac{l_w}{l_x} \cdot \frac{1}{q^{w-x}} \\ &= \sum_{i=0}^{w-x} \frac{l_{x+i}}{l_x} \cdot \frac{1}{q^i} \\ &= \frac{D_x}{D_x} + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \ldots + \frac{D_w}{D_x} \\ &= \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_w}{D_x} = \frac{N_x}{D_x} \end{aligned}$$

gdje je: $N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_w$ zbir diskontovanih brojeva živih lica starih $x, x+1, \ldots$ godina.

NEPOSREDNA DOŽIVOTNA LIČNA RENTA

Miza anticipativne rente od 1 € pri neposrednom doživotnom osiguranju lične rente iznosi:

$$\boxed{a_x = \frac{N_x}{D_x}}$$

osiguranik mora uplatiti (odjednom) iznos a_x da bi mu osiguravač, godišnje (početkom godine), isplaćivao rentu od 1 €.

$$\boxed{M = R \cdot a_x}$$

miza anticipativne rente od R €

$$\boxed{b_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}}$$

miza dekurzivne rente od 1 €

$$\boxed{b_x = a_x - 1}$$

veza između dekurzivne i anticipativne rente od 1 €

ODLOŽENA DOŽIVOTNA LIČNA RENTA

Ako isplate rente počinju m godina poslije izvršene uplate osiguranja (prvih m godina isplate se ne vrše), imamo da je miza anticipativne rente od 1 €:

$$\boxed{{}_m a_x = \frac{N_{x+m}}{D_x} (= EX_m + EX_{m+1} + \ldots + EX_{w-x})}$$

$$\boxed{{}_m b_x = \frac{N_{x+m+1}}{D_x}}$$

miza dekurzivne rente od 1 €

Ova vrsta rente se koristi npr. kod osiguranja penzija.

Ukoliko osiguranik umre u toku prvih m godina ili u toku isplaćivanja, miza ostaje u korist onih osiguranika koji dožive isplaćivanje.

NEPOSREDNO PRIVREMENA LIČNA RENTA

Ona se isplaćuje najviše n godina od dana osiguranja (što zavisi od dužine života osiguranika).

Miza neposredne privremene n godina anticipativne lične rente od 1 € je:

$$a_{x,n} = EX_0 + EX_1 + \ldots + EX_{n-1} = \frac{l_x}{l_x} + \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{1}{q} + \ldots + \frac{l_{x+n-1}}{l_x} \cdot \frac{1}{q^{n-1}}$$

$$\boxed{a_{x,n} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}}$$

Očigledno važi relacija: $a_{x,n} = a_x - {}_n a_x$

$$b_{x,n} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

miza dekurzivne rente

ODLOŽENA PRIVREMENA LIČNA RENTA

Ovo je model osiguranja lične rente kod kojeg je prva isplata poslije m godina (ako je osiguranik živ) a posljednja isplata (ako bude u životu) kad osiguranik bude imao x+m+n-1 godina.

Miza anticipativne odložene privremene lične rente od 1 € u ovom slučaju je jednaka:

$${}_m a_{x,n} = EX_m + EX_{m+1} + EX_{m+2} + \ldots + EX_{m+n-1}$$

$$= \frac{l_{x+m}}{l_x} \cdot \frac{1}{q^m} + \frac{l_{x+m+1}}{l_x} \cdot \frac{1}{q^{m+1}} + \ldots + \frac{l_{x+m+n-1}}{l_x} \cdot \frac{1}{q^{m+n-1}}$$

$$= \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}$$

Važi relacija: ${}_m a_{x,n} = {}_m a_x - {}_{m+n} a_x$

$${}_m b_{x,n} = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x}$$

miza dekurzivne odložene privremene rente od 1 €

LIČNA RENTA U RATAMA

Ako se radi o renti u ratama, tj. ako se isplate vrše u razmacima kraćim od jedne godine (k puta godišnje), ubiraćemo rentu od 1/k € k puta godišnje, umjesto 1 € kao kod modela godišnje rente.

Miza odložene privremene anticipativne rente u ratama je:

$${}_m a^{(k)}_{x,n} = \frac{l_{x+m}}{l_x} \cdot \frac{\frac{1}{k}}{q^m} + \frac{l_{x+m+\frac{1}{k}}}{l_x} \cdot \frac{\frac{1}{k}}{q^{m+\frac{1}{k}}} + \ldots + \frac{l_{x+m-\frac{1}{k}}}{l_x} \cdot \frac{\frac{1}{k}}{q^{m+n-\frac{1}{k}}}$$

Miza neposredne privremene anticipativne rente u ratama:

$$a^{(k)}_{x,n} = \frac{1}{k} + \frac{\frac{1}{k}}{q^{\frac{1}{k}}} \cdot \frac{l_{x+\frac{1}{k}}}{l_x} + \frac{\frac{1}{k}}{q^{\frac{2}{k}}} \cdot \frac{l_{x+\frac{2}{k}}}{l_x} + \ldots + \frac{\frac{1}{k}}{q^{n-\frac{1}{k}}} \cdot \frac{l_{x+n-\frac{1}{k}}}{l_x}$$

LIČNA RENTA U RATAMA

$a^{(k)}_{x,n} \cong a_{x,n} - \frac{k-1}{2k}(EX_0 - EX_n)$ anticipativna privremena neposredna renta u ratama

$b^{(k)}_{x,n} \cong b_{x,n} + \frac{k-1}{2k}(EX_0 - EX_n)$ dekurzivna privremena neposredna renta u ratama

$a^{(k)}_x \cong a_x - \frac{k-1}{2k}$ anticipativna neposredna doživotna renta u ratama

$b^{(k)}_x \cong b_x + \frac{k-1}{2k}$ dekurzivna neposredna doživotna renta u ratama

LIČNA RENTA U RATAMA

$${}_m a_{x,n}^{(k)} \cong {}_m a_{x,n} - \frac{k-1}{2k}(EX_m - EX_{m+n})$$ odložena privremena anticipativna renta u ratama

$${}_m b_{x,n}^{(k)} \cong {}_m b_{x,n} + \frac{k-1}{2k}(EX_m - EX_{m+n})$$ odložena privremena deklurzivna renta u ratama

$${}_m a_x^{(k)} \cong {}_m a_x - \frac{k-1}{2k} EX_m$$ anticipativna odložena doživotna renta u ratama

$${}_m b_x^{(k)} \cong {}_m b_x + \frac{k-1}{2k} EX_m$$ dekurzivna odložena doživotna renta u ratama

OSIGURANJE KAPITALA

Ovo je vid osiguranja uplatom mize gdje se, za razliku od osiguranja lične rente, osigurana suma isplaćuje korisniku polise jednom (ili najviše dva puta).

Osnovna podjela je na:

- osiguranje kapitala za slučaj doživljenja,
- osiguranje kapitala za slučaj smrti
- mješovito osiguranje

OSIGURANJE KAPITALA ZA SLUČAJ DOŽIVLJENJA

Osiguravajući zavod vrši isplatu osigurane sume samo licima koja dožive ugovoreni rok.

$$X_n : \begin{Bmatrix} 0 & \frac{1}{q^n} \\ 1-\frac{l_{x+n}}{l_x} & \frac{l_{x+n}}{l_x} \end{Bmatrix}$$

X_n – diskretna slučajna veličina (koja predstavlja vrijednosti diskontovane isplate)

n - broj godina počev od x-te poslije čijeg isteka će se izvršiti ugovorena isplata (ako osiguranik bude u životu) tj. n je trajanje osiguranja.

$$B_x = EX_n = \frac{1}{q^n} \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$$\boxed{B_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}}$$

B_x – miza osiguranja kapitala za slučaj doživljenja (x+n)-te godine ukoliko osiguramo iznos od 1 €

Ako umjesto 1 € osiguramo R € miza će biti jednaka **RB_x**

DOŽIVOTNO
OSIGURANJE KAPITALA ZA SLUČAJ SMRTI

Osiguravač isplaćuje (jednom) ugovorenu sumu nasljedniku osiguranika, krajem godine u kojoj osiguranik umre.

$$X : \begin{Bmatrix} \frac{1}{q} & \frac{1}{q^2} & \cdots & \frac{1}{q^{w-x}} \\ \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} & \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{l_x} & \cdots & \frac{l_{w-1} - l_w}{l_x} \end{Bmatrix}$$ Raspodjela slučajne veličine X

Po principu ekvivalencije, miza A_x je u ovom slučaju jednaka očekivanju slučajne veličine X, tj.:

$$A_x = EX = \sum_{i=0}^{w-x-1} \frac{1}{q^{i+1}} \cdot \frac{l_{x+i} - l_{x+i+1}}{l_x}$$

DOŽIVOTNO
OSIGURANJE KAPITALA ZA SLUČAJ SMRTI

Za komutacione brojeve d_x, C_x i M_x važe sledeće relacije:

$$d_x = l_x - l_{x+1},$$

$$C_x = \frac{d_x}{q^{x+1}}$$

$$M_x = C_x + C_{x+1} + \ldots + C_{w+1}$$

Slijedi da je miza doživotnog osiguranja kapitala za slučaj smrti

$$\boxed{A_x = \frac{1}{D_x}\sum_{i=0}^{w-x-1} C_{x+i} = \frac{M_x}{D_x}}$$

ODLOŽENO DOŽIVOTNO
OSIGURANJE KAPITALA ZA SLUČAJ SMRTI

Osiguravajući zavod se obavezuje da će ugovoreni kapital, određenom korisniku (iz ugovora), isplatiti krajem godine u kojoj osiguranik umre, pod uslovom da smrt nastupi poslije m godina od dana osiguranja.

$$X : \begin{Bmatrix} 0 & \frac{1}{q^{m+1}} & \frac{1}{q^{m+2}} & .... & \frac{1}{q^{w-x}} \\ \frac{l_x - l_{x+m}}{l_x} & \frac{l_{x+m} - l_{x+m+1}}{l_x} & \frac{l_{x+m+1} - l_{x+m+2}}{l_x} & .... & \frac{l_{w-1} - l_w}{l_x} \end{Bmatrix}$$

Slijedi da je miza odloženog doživotnog osiguranja kapitala za slučaj smrti

$$\boxed{{}_m A_x = EX = \frac{M_{x+m}}{D_x}}$$

PRIVREMENO NEPOSREDNO OSIGURANJE KAPITALA ZA SLUČAJ SMRTI

Osiguravač isplaćuje osiguranu sumu nasljedniku samo ako osiguranik umre u toku n godina od osiguranja.

Miza privremenog neposrednog osiguranja kapitala za slučaj smrti

$$\boxed{A_{x,n} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}}$$

MJEŠOVITO OSIGURANJE KAPITALA

1. MJEŠOVITO OSIGURANJE KAPITALA SA JEDNOM ISPLATOM

- Oblik osiguranja kapitala pri kome se isplata vrši ili osiguraniku, ako ostane u životu, ili nasljedniku, ako osiguranik umre u toku trajanja osiguranja.

- Ako se lice osigura na ovaj način ono plaća dvije premije: premiju za osiguranje kapitala za slučaj doživljenja i premiju za privremeno neposredno osiguranje kapitala za slučaj smrti. Miza ovog vida osiguranja je:

$$\boxed{\overline{A_x} = B_x + A_{x,n} = \frac{D_{x,n} + M_x - M_{x+m}}{D_x}}$$

MJEŠOVITO OSIGURANJE KAPITALA

2. MJEŠOVITO OSIGURANJE KAPITALA SA DVIJE ISPLATE

- Mješovito osiguranje se može ugovoriti i tako da budu predviđene dvije isplate: jedne osiguraniku, ako doživi x+n godina i druge nasljednicima na kraju godine u kojoj umire.
- Ako osiguranik umre prije isteka n godina tada se isplaćuje samo jedan iznos (nasljedniku) inače se isplaćuju dva iznosa (jedan osiguraniku, jedan nasljedniku).
- Jednokratna premija je suma premija onih osiguranja iz kojih se sastoji: osiguranja kapitala za slučaj doživljenja i doživotnog osiguranja kapitala za slučaj smrti:

$$\boxed{A_x^{'} = B_x + A_x = \frac{D_{x,n} + M_x}{D_x}}$$

Ova vrsta osiguranja sve više preovladava u savremenom osiguranju života.

OSIGURANJE PREMIJAMA

Kod ove vrste osiguranja osigurano lice ne uplaćuje mizu (jednokratnu premiju) već uplaćuje određene sume (premije P) više puta.

Premija može biti:

- doživotna ili privremena
- godišnja ili u ratama

Pretpostavimo da za određeno osiguranje osiguranik treba da plati jednokratnu premiju A, ali ne raspolaže tolikim novcem, pa će umjesto toga plaćati godišnje premije P.

Shvatimo godišnje premije kao ličnu rentu koju osigurano lice plaća osiguravajućem zavodu.

Ako se godišnje premije počinju plaćati od trenutka osiguranja do smrti, tada one predstavljaju doživotnu neposrednu ličnu rentu. Slično je i za ostale vrste premija (odložena, privremena).

OSIGURANJE PREMIJAMA

U slučaju da aticipativna renta ima vrijednost jedan njena miza bi bila a_x. Kako renta ima vrijednost jednaku visini premije P, njena miza je $P \cdot a_x$. Primjenjujući princip ekvivalencije dobijamo jednakost:

$\boxed{P \cdot a_x = A}$ A- visina jednokratne premije

$P = \frac{A}{a_x}$ P- visina premije za jedinicu osigurane sume

Slično, ako se premija P uplaćuje neposredno privremeno:

$$\boxed{P \cdot a_{x,n} = A}$$

$$P = \frac{A}{a_{x,n}}$$

OSIGURANJE ODLOŽENE DOŽIVOTNE LIČNE RENTE PREMIJAMA

- Isplate se vrše poslije n godina od dana osiguranja do kraja života. Ako osiguranik ne doživi (x+n) -tu godinu renta se neće ni isplaćivati. Ako smrt ne nastupi ranije, vrijeme trajanja uplata godišnje premije je najviše do godinu dana pred početak isplate rente, tj. do (x+n)-te godine.
- Zbir diskontovanih ispata je:

$$EX_n + EX_{n+1} + \ldots + EX_{w-x}$$

- Zbir diskontovanih uplata:

$$P_x \cdot (EX_0 + EX_1 + EX_2 + \ldots + EX_{t-1}),\ t \le n$$

- Po principu jednakosti uplata i isplata imamo da važi:

$$EX_n + EX_{n+1} + \ldots + EX_{w-x} = P_x \cdot (EX_0 + EX_1 + \ldots + EX_{t-1}),\ t \le n$$

$$\boxed{{}_n a_x = P_x \cdot a_{x,t}}$$

OSIGURANJE ODLOŽENE DOŽIVOTNE LIČNE RENTE PREMIJAMA

$P_x = \frac{{}_n a_x}{a_{x,t}}, \ t \le n$

godišnja premija odložene doživotne anticipativne lične rente

$$P_x = \frac{\frac{N_{x+n}}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+t}}{D_x}} = \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+t}}, \ t \le n$$

Ako se prva renta primi krajem (x+1) -ve godine godišnja premija je:

$$P_x = \frac{N_{x+n+1}}{N_x - N_{x+t}}$$

OSIGURANJE ODLOŽENE PRIVREMENE LIČNE RENTE PREMIJAMA

Renta se prima po isteku n godina od dana osiguranja i traje m godina (m > n).

Godišnja premija kod ove vrste osiguranja je:

$$\boxed{P_x = \frac{N_{x+n} + N_{x+n+m}}{N_x - N_{x+t}}, \ t \le n}$$

PREMIJA U RATAMA

Neka se premije plaćaju k puta u toku godine dana, i neka je $P^{(k)}$ - premija u ratama.

Godišnja rata rente u ratama je k · $P^{(k)}$

Npr. ako se premija plaća n godina neposredno privremeno, tada važi:

$$A = k \cdot P^{(k)} \cdot a_{x,n}^{(k)}$$

odnosno $\boxed{P^{(k)} = \frac{A}{k \cdot a_{x,n}^{(k)}}}$

Ako je P – godišnja premija tada je:

- polugodišnja premija $P^{(2)} \cong \frac{1}{2} \cdot P \cdot 1{,}02 = 0{,}51 \cdot P$
- kvartalna premija $P^{(4)} \cong \frac{1}{4} \cdot P \cdot 1{,}03 = 0{,}2575 \cdot P$
- mjesečna premija $P^{(12)} \cong \frac{1}{12} \cdot P \cdot 1{,}04 = 0{,}087 \cdot P$