**1.** Puasonov proces $X(t)$ ima intenzitet 1. Naći vjerovatnoću događaja

$$P\{2X(t) = X(2t) = 2 \text{ za neko } t > 0\}.$$

$$\tau_1 < t < \tau_2;\ \tau_2 < 2t < \tau_3 \Leftrightarrow \max\{\tau_1, \frac{\tau_2}{2}\} < t < \min\{\tau_2, \frac{\tau_3}{2}\}.$$

Postojaće $t$ takvo da važi posljednja dvostruka nejednakost ako i samo ako je max manji od min to jest svaki član kod max manji od svakog člana kod min. Konstatujmo, $\tau_1 < \tau_2$, $\frac{\tau_2}{2} < \tau_2$, $\frac{\tau_2}{2} < \frac{\tau_3}{2}$. Preostala je nejednakost $\tau_1 < \frac{\tau_3}{2} \Leftrightarrow \tau_3 > 2\tau_1$. Dakle, tražena vjerovatnoća je

$$P\{\tau_3 > 2\tau_1\}.$$

**2.** Vremena dolazaka crvenih i plavih automobila na kontrolni punkt obrazuju dva nezavisna Puasonova potoka sa intenzitetima $\lambda$ i $\mu$ respektivno. Naći vjerovatnoću da prvi plavi automobil bude na punktu poslije prvog crvenog, a prije drugog crvenog.

Neka su $\tau_1$ i $\tau_2$ momenti prvog i drugog ekscesa u potoku sa intenzitetom $\lambda$, a $v_1$ momenat prvog ekscesa u potoku sa intenzitetom $\mu$. Znamo da je gustina $g_{(\tau_1,\tau_2,v_1)}(x,y,z) = \lambda^2\mu e^{-\lambda y}e^{-\mu z}$. Imamo

$$P\{\tau_1 < v_1 < \tau_2\} = \int\limits_0^\infty \int\limits_x^\infty \int\limits_x^y \lambda^2\mu e^{-\lambda y}e^{-\mu z}dzdydx = \frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}.$$

**3.** $W(t)$ je Vinerov proces, $\sigma^2 = 1$. Naći gustinu vektora $(W(1), W(3))$ i $E(W(1) \mid W(3))$.

Potražimo $E(W(s) \mid W(t) = a)$, $s < t$.

$$g_{(W(s)|W(t)=a)}(x \mid a) = \frac{g_{(W(s),W(t))}(x,a)}{g_{W(t)}(a)} =$$

$$\frac{\frac{1}{2\pi\sqrt{s(t-s)}}e^{-\frac{x^2}{2s}-\frac{(a-x)^2}{2(t-s)}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{a^2}{2t}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi s(1-\frac{s}{t})}}e^{-\frac{(x-\frac{as}{t})^2}{2s(1-\frac{s}{t})}}.$$

Zbog Gausovosti gustine dobijamao

$$E(W(s) \mid W(t) = a) = \frac{as}{t} \Rightarrow E(W(s) \mid W(t)) = \frac{sW(t)}{t},\ D(W(s) \mid W(t)) = s(1-\frac{s}{t}).$$