Numerička analiza (A i B smjer). Ogledni primjeri

Za Prvi kolokvijum (30 poena) oblasti: Interpolacija, Numerička integracija i Numeričke metode algebre. Za Završni ispit (30 poena) oblasti: Rješavanje sistema nelinearnih jednačina, Numeričke metode za rješavanje Košijevog zadatka za obične diferencijalne jednačine i Numeričke metode za rješavanje graničnog zadatka za obične diferencijalne jednačine.

Za Prvi kolokvijum dolaze dva pitanja iz teorije i dva zadatka. Za Završni ispit dolaze dva pitanja iz teorije i dva zadatka.

	pitanja iz teorije	zadaci
prvi kolokvijum	1–39	1–32
završni ispit	40–70	33–67

Prvi kolokvijum, najvažnija pitanja iz teorije su: 1, 2, 3, 4, 7, 12, 14, 15, 16, 19, 21, 23, 26, 27, 30, 31, 34, 35, 37, 39.

Završni ispit, najvažnija pitanja iz teorije su: 44, 45, 46, 48, 49, 53, 55, 56, 57, 59, 60, 61, 62, 63, 66, 67, 68, 69.

Što se tiče završnog ispita, potreban je digitron za rješavanje zadatka tipa: metodom proste iteracije ili Njutnovom metodom naći približnu vrijednost jednog rješenja jednačine $\sin x - x + 1 = 0$ na pet decimala.

(U nastavku: Pitanja iz teorije, Zadaci i Rješenja zadataka.)

Numerička analiza. Pitanja iz teorije

⋈ Interpolacija

1. Najbolja aproksimacija pomoću prave linije $y = ax + b$ (metoda najmanjih kvadrata, linearna regresija).
2. Dokazati postojanje i jedinstvenost Lagranžovog interpolacionog polinoma (Lagrange).
3. Izvesti eksplicitni izraz za Lagranžov interpolacioni polinom.
4. Ocjena greške za Lagranžov interpolacioni polinom.
5. Podijeljene razlike i njihova svojstva.
6. Njutnova interpolaciona formula sa podijeljenim razlikama (Newton).
7. Konačne razlike.
8. Prva Njutnova interpolaciona formula sa konačnim razlikama (Njutnova interpolaciona formula za interpolaciju unaprijed).
9. Postojanje i jedinstvenost Hermitovog interpolacionog polinoma (Hermite) (interpolacija sa višestrukim čvorovima).
10. Ocjena greške za Hermitov interpolacioni polinom (interpolacija sa višestrukim čvorovima).
11. Interpolacija pomoću splajna: kako se formira sistem po nepoznatim $\{b_i, c_i, d_i\}_{i=1}^{n}$.
12. Ako je (realna) kvadratna matrica A dijagonalno dominantna onda je $\det A \neq 0$.
13. Numeričko diferenciranje: kako se izvodi izraz za grešku $r(x) = f^{(k)}(x) - L_n^{(k)}(x)$.
14. Formula za prvi izvod u čvoru, jednostrana formula.
15. Kako se aproksimira $y''(x_n)$ na osnovu $y(x_{n-1})$, $y(x_n)$, $y(x_{n+1})$ i izvesti izraz za grešku pomoću razvoja funkcije po Tejlorovoj formuli (Taylor).
16. Nestabilnost numeričkog diferenciranja.
17. Tri vrste greške u numeričkim metodama.
18. Pojmovi greška i relativna greška približnog broja. Značajna i sigurna cifra približnog broja.
19. Greška funkcije A i linearna ocjena za grešku funkcije L.

⋈ Numerička integracija

20. Osnovna i sastavljena formula pravougaonika (zajedno sa izrazom za grešku).
21. Osnovna i sastavljena trapezna formula. Koliko se greška smanji prilikom polovljenja koraka.
22. Osnovna i sastavljena Simpsonova formula.
23. Rungeovo pravilo za praktičnu ocjenu greške u slučaju trapezne formule, dobro svojstvo i slabo svojstvo.
24. O Rombergovoj kvadraturnoj formuli, u glavnim crtama.
25. Kvadraturne formule u slučaju prisustva težinske funkcije i Njutn–Kotesove formule (Cotes).
26. Ortogonalni polinomi i njihova svojstva.
27. Izvođenje Gausove kvadraturne formule (Gauss).
28. Ocjena greške za Gausovu kvadraturnu formulu.

⋈ Numeričke metode algebre

29. Gausova metoda eliminacije (sistem linearnih jednačina) (kada nema biranja glavnog elementa).

30. Gausova metoda eliminacije sa izborom glavnog elementa – algoritam.

31. Pojam mjere uslovljenosti matrice i svojstva.

32. Teorema o greški rješenja sistema linearnih jednačina $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ čiji su ulazni podaci A i $\mathbf{b}$ samo približno poznati.

33. Norma vektora i norma matrice u R^n. Posebno $\|\cdot\|_p$ kada je $p = 1$, $p = 2$, $p = \infty$.

34. Rješavanje sistema linearnih jednačina metodom proste iteracije: teorema o dovoljnim uslovima za konvergenciju ($\|B\| < 1$).

35. Jakobijeva metoda (Jacobi) (sistem linearnih jednačina).

36. Teorema o neophodnim i dovoljnim uslovima za konvergenciju metode proste iteracije (sistem linearnih jednačina) ($|\lambda_i(B)| < 1$), u glavnim crtama.

37. Zajdelova metoda, isto se kaže i Gaus–Zajdelova metoda (Seidel).

38. Primjer iterativne metode za rješavanje sistema linearnih jednačina varijacionog tipa ili svejedno metoda minimalne nepovezanosti, u glavnim crtama.

39. Metoda skalarnog proizvoda (svojstvena vrijednost matrice), isto se kaže i metoda stepena, samo dokaz navedene teoreme.

⋈ Rješavanje sistema nelinearnih jednačina

40. Algoritam za metodu polovljenja.

41. Ocjena greške u slučaju metode polovljenja.

42. Priprema za metodu proste iteracije (sistem nelinearnih jednačina): kako glasi princip kontrakcije ili Banahova teorema o fiksnoj / nepokretnoj tački (Banach).

43. Metoda proste iteracije u slučaju dvije nelinearne jednačine: teorema o dovoljnim uslovima za konvergenciju ($q_1 < 1$ ili $q_\infty < 1$), u glavnim crtama.

44. Dokazati prvu formulu za ocjenu greške u slučaju primjene metode proste iteracije $\Big($gdje piše $\dfrac{q^n}{1-q}\Big)$.

45. Dokazati drugu formulu za ocjenu greške u slučaju primjene metode proste iteracije $\Big($gdje piše $\dfrac{q}{1-q}\Big)$.

46. Dokazati teoremu o dovoljnim uslovima za konvergenciju metode proste iteracije u slučaju jedne jednačine.

47. Metoda proste iteracije u slučaju jedne jednačine: kako postići da uslov kontrakcije bude ispunjen (λ–postupak).

48. Metoda tangente ili svejedno Njutnova metoda u slučaju jedne jednačine: algoritam i izvođenje formule po kojoj se računa x_{n+1}.

49. Dokazati teoremu o dovoljnim uslovima za konvergenciju metode tangente.

50. Dokazati teoremu o ocjeni greške u slučaju metode tangente.

51. Njutnova metoda u slučaju dvije jednačine ($F(x,y) = 0$, $G(x,y) = 0$), u glavnim crtama.

52. Njutnova metoda u opštem slučaju Banahovog prostora ($F\colon X \to Y$), u glavnim crtama.

⋈ Numeričke metode za rješavanje Košijevog zadatka za obične diferencijalne jednačine

53. Lema o dva rješenja diferencijalne jednačine.

54. Izvođenje Ojlerove metode (Euler).

55. Ocjena greške Ojlerove metode.

56. Modifikovana (ili poboljšana) Ojlerova metoda.

57. Opšti slučaj eksplicitne metode tipa Runge–Kuta (Kutta): samo slučaj $q = 2$ (kada dva priraštaja k_1 i k_2).

58. Ocjena greške za metodu Runge–Kuta, u glavnim crtama.

59. Numerički algoritam zasnovan na metodi Runge–Kuta: praktični postupci da se ocijeni greška.

60. Kako glase formule za metodu Runge–Kuta četvrtog reda i kako se praktično ocjenjuje greška.

61. Pojam eksplicitne Adamsove metode – diferencne metode za rješavanje Košijevog zadatka (Cauchy): formula po kojoj se računa i izraz za lokalnu grešku ($y_n = y_{n-1} + h(\dots)$, $\rho_n = \dots$).

62. Pojam implicitne Adamsove metode: formula po kojoj se računa i izraz za lokalnu grešku.

63. Pojam prediktor–korektor metode. Navesti primjer.

64. Metoda neodređenih koeficijenata za izvođenje diferencne šeme za rješavanje Košijevog zadatka.

65. Ocjena greške eksplicitne Adamsove metode.

66. Kako glasi Adamsova prediktor–korektor metoda IV reda i kako se procjenjuje lokalna greška $\left(\frac{1}{14}\right)$.

67. Numerički algoritam zasnovan na diferencnoj metodi: dva načina za praktičnu ocjenu greške.

68. Milnova metoda: kako se izvodi formula i kako se procjenjuje lokalna greška $\left(\frac{1}{29}\right)$ (Milne).

⋈ Numeričke metode za rješavanje graničnog zadatka za obične diferencijalne jednačine

69. Metoda konačnih razlika (za rješavanje graničnog zadatka): numerički algoritam, tj. formule koje su dovoljne da se napiše algoritam za računar. Ukratko objasniti.

70. Metoda konačnih razlika (za rješavanje graničnog zadatka): dokaz teoreme o ocjeni greške. Dovoljno je razmotriti slučaj kada je prisutna samo greška metode, $\frac{1}{96}X^2 M_4 h^2$.

$\bowtie$ Interpolacija

1. Neka su o funkciji $y = f(x)$ dati podaci

x	0	1	2
f	2	3	5

. Naći najbolju aproksimaciju oblika $y = ax + b$ (po metodi najmanjih kvadrata).

Uputstvo $\begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle & \langle \mathbf{x}, \mathbf{1} \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{1} \rangle & \langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{f}, \mathbf{x} \rangle \\ \langle \mathbf{f}, \mathbf{1} \rangle \end{bmatrix}$.

2.

x	0	1	2
f	2	3	6

.

3. Za fiksirano n, razmotrimo tzv. Lagranžove koeficijente $\ell_i(x) = \prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ za $i = 0, \ldots, n$. Dokazati da je $\ell_0(x) + \ell_1(x) + \ldots + \ell_n(x) \equiv 1$.

Uputstvo. Koliki je stepen polinoma $\ell_i(x)$ odnosno $y(x) = \ell_0(x) + \ell_1(x) + \ldots + \ell_n(x)$. Kolika je vrijednost $y(x)$ kada je x čvor.

4. Za fiksirano n, razmotrimo tzv. Lagranžove koeficijente $\ell_i(x) = \prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ za $i = 0, \ldots, n$. Dokazati da je $(x - x_0)^k \ell_0(x) + (x - x_1)^k \ell_1(x) + \ldots + (x - x_n)^k \ell_n(x) \equiv 0$ za $k = 1, \ldots, n$.

5. Funkcija $f(x)$ aproksimira se interpolacionim polinomom sa čvorovima $x_i = a + ih$, gdje je $0 \leq i \leq 3$ ($a \in R$, $h > 0$). Dokazati da greška interpolacije u tački $x \in (x_1, x_2)$ nije veća od $\frac{3}{128} h^4 \max_{t \in [a,b]} |f^{IV}(t)|$.

Uputstvo. Znamo kako glasi izraz za grešku Lagranžovog interpolacionog polinoma. Neka je $\omega_4(x) = \prod\limits_{i=0}^{3} (x - x_i)$. Ocijeniti sa gornje strane $|\omega_4(x)|$ kada je $x_1 < x < x_2$.

6. Neka je $a \in R$, $h > 0$ i $n \geq 1$. Čvorovi su ekvidistantni sa korakom h, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Neka je $P_n(x)$ interpolacioni polinom za funkciju $f(x)$ po razmatranoj mreži čvorova, gdje $f \in C^{n+1}[a, b]$. Dokazati: $|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} \max_{t \in [a,b]} |f^{(n+1)}(t)|$ kad $x \in [a, b]$.

7. Funkcija je data tablicom

x	0,4	0,6	0,8
y	-1	$-0{,}5$	0,5

. Naći približno nulu funkcije.

Uputstvo. Posmatrati inverznu funkciju $x = x(y)$. Izračunati $x(0)$ pomoću aparata interpolacije (primjenom Lagranžovog interpolacionog polinoma).

8.

x	0,4	0,6	0,8
y	-1	$-0{,}5$	1

.

9. Sastaviti eksplicitni izraz za kubni splajn $y = s(x)$ koji odgovara funkciji $y = f(x)$ na intervalu $-1 \leq x \leq 1$ ako se mreža sastoji od čvorova $x = -1$, $x = 0$ i $x = 1$. Znači, dati su brojevi $f_{-1} = f(-1)$, $f_0 = f(0)$ i $f_1 = f(1)$. Smatra se da je $f''(-1) = f''(1) = 0$, odnosno da je $s''(-1) = s''(1) = 0$ (tzv. prirodni "granični uslovi").

Uputstvo. Direktnim računom, $s(x) = s_i(x)$ za $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ $(i = 1, 2)$, $s_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$ $(i = 1, 2)$.

10. Neka je y dovoljno glatka funkcija i neka je $x_j = x_0 + jh$ i $y_j = y(x_j)$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Pomoću Tejlorovog razvoja izvesti formulu za numeričko diferenciranje

$$y''(x_0) = \frac{1}{h^2} \Big(-y_3 + 4y_2 - 5y_1 + 2y_0 \Big) + O(h^2).$$

11. Neka je y dovoljno glatka funkcija i neka je $x_j = x_0 + jh$ i $y_j = y(x_j)$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Odredite koeficijente a, b. c i d tako da važi $y''(x_0 + \frac{h}{2}) = \frac{1}{h^2}(ay_{-1} + by_0 + cy_1 + dy_2) + O(h^2)$.

12. Neka se unaprijed zna da je $x = 10 \pm 1$. Sa koliko sigurnih cifara iza decimalnog zareza treba saznati približnu vrijednost x^* broja x, da bismo zatim bili u stanju da izračunamo vrijednost izraza x^4 sa greškom do 10^{-4}?

Uputstvo. Formula za grešku funkcije, slučaj funkcije od jedne promjenljive. Može se primijeniti tzv. linearna ocjena za grešku funkcije (L).

13. Neka se unaprijed zna da je $x = 10 \pm 1$ i $y = 10 \pm 1$. Sa koliko sigurnih cifara iza decimalnog zareza treba saznati približnu vrijednost x^* broja x odnosno približnu vrijednost y^* broja y, da bismo zatim bili u stanju da izračunamo vrijednost izraza $x^2 y$ sa greškom do 10^{-4}?

Uputstvo. Formula za grešku funkcije, slučaj funkcije od dvije promjenljive. Može se primijeniti tzv. linearna ocjena za grešku funkcije (L). Primijenite princip jednakih grešaka ili jednakih relativnih grešaka ili jednakih doprinosa.

Stavimo $f(x,y) = x^2 y$. Veličine Δx i Δy određuju se tako da bude zadovoljen uslov $|\Delta f| \leq 10^{-4}$. Ako dobijemo $|\Delta x| \leq 10^{-n}$ ili $|\Delta x| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-n}$ za neko n onda u odgovoru treba kazati: x treba saznati sa n decimala. Slično naravno i kada je riječ o $|\Delta y|$ odnosno y.

14. Očito je $x = 2$ jedno rješenje jednačine $x^2 - x - 2 = 0$. Kolika se greška čini kada se kaže da je $x = 2$ približna vrijednost jednog rješenja jednačine $x^2 + bx + c = 0$, pri čemu je $b = -1 \pm 0{,}1$, $c = -2 \pm 0{,}1$?

Uputstvo. Pomoću linearne ocjene za grešku funkcije L, slučaj funkcije od dvije promjenljive. Uslov $x^2 + bx + c = 0$ implicitno definiše funkciju $x = x(b,c)$, gdje imamo u vidu pravilno izdvojenu granu od dvije grane koje postoje. Kada se $F(b,c,x) = x^2 + bx + c = 0$ diferencira po b, odnosno po c onda

$$\frac{\partial F}{\partial b} + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial b} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial c} + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial c} = 0.$$

15. Neka je $x \neq 0$, $y = \frac{1}{x}$, a y^* približna vrijednost za broj y koja zadovoljava $|1 - xy^*| \leq 0{,}02$ i $|y^*| = 100$. Dati što bolju ocjenu greške $|y - y^*|$ s gornje strane.

$\bowtie$ Numerička integracija

16. Odredite koeficijente a, b i c tako da kvadraturna formula $I(f) \approx S(f)$, $I(f) = \int_0^{2h} x^\alpha f(x)dx$, $S(f) = (2h)^{\alpha+1}(af_0 + b\Delta f_0 + c\Delta^2 f_0)$ bude tačna za polinome $f(x)$ što je moguće višeg stepena. Ovdje je $\alpha > -1$, $f_0 = f(0)$, $f_1 = f(h)$, $f_2 = f(2h)$.

Uputstvo. Želimo da bude zadovoljen uslov $I(f) = S(f)$ kada je $f(x) = 1$, slično i kada je $f(x) = x$, itd.

17. Razmotrimo kvadraturnu formulu $I(f) \approx S(f)$, $I(f) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $S(f) = c_1 f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + c_2 f(0) + c_3 f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Odredite koeficijente c_1, c_2 i c_3 kvadraturne sume $S(f)$ tako da bude $I(f) = S(f)$ kada je funkcija f polinom što je moguće višeg stepena.

Uputstvo. Uvrstiti $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, ..., tzv. metoda neodređenih koeficijenata. (Uostalom, zapažamo da se radi o specijalnom slučaju Gausove kvadraturne formule.)

18. Sastaviti kvadraturnu formulu $I(f) \approx S(f)$, $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$, $S(f) = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$, tj. odrediti veličine c_1, c_2, x_1 i x_2 tako da algebarski stepen tačnosti ove formule $I(f) \approx S(f)$ bude što je moguće veći.

Uputstvo. Zadatak može da bude riješen pomoću metode neodređenih koeficijenata. (Zapažamo da se radi o specijalnom slučaju Gausove kvadraturne formule.)

19. Ležandrovi polinomi P_n (Legendre). Razmotrimo polinom n–tog stepena $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$. Dokazati da je $\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = 0$, odnosno $P_m \perp P_n$ u Lebegovom prostoru $L^2(-1,1)$ (Lebesgue) kada je $m \neq n$, kao i $\|P_n\| = \sqrt{2/(2n+1)}$.

Uputstvo. Pomoću $\int u^{(n)}(x)v^{(n)}(x)dx = \int u^{(n)}(x)dv^{(n-1)}(x)$, itd. – parcijalna integracija.

20. Dokazati da važi rekurentna relacija $(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$.

21. Čebiševljevi polinomi T_n. Razmotrimo polinom n–tog stepena $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. Dokazati da je $\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0$ kada je $m \neq n$, kao i $\|T_0\| = \sqrt{2\pi}$, $\|T_n\| = \sqrt{\pi/2}$ za $n \geq 1$.

Dodajmo da je n–ti polinom Čebiševa $T_n(x)$ definisan naravno za svako $x \in R$. Relacija $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ važi samo za $-1 \leq x \leq 1$, ali je ipak dovoljna da definiše polinom.

U ovom zadatku, $\|y\|^2 = \int_{-1}^{1} \frac{|y(x)|^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

22. Dokazati da važi rekurentna relacija $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$.

⋈ Numeričke metode algebre

23. Razmatra se sistem linearnih jednačina $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Vektor $\mathbf{b}$ poznat je samo približno, tako da se i rješenje sistema $\mathbf{x}$ može saznati samo približno. Želimo da ocijenimo grešku za $\mathbf{x}$. Neka je $A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 8 & 7 & 6 \\ 7 & 6 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}^* = [b_i^*] = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = [b_i]$, $\mathbf{x}^* = [x_i^*]$, $\mathbf{x} = [x_i]$, osim toga $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $A\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^*$ i $b_i = b_i^* \pm 0{,}001$ $(i = 1,2,3)$. Ako se $\mathbf{x}^*$ uzme kao približna vrijednost za $\mathbf{x}$ – kolika je greška?

Uputstvo. $R(\mathbf{x}^*) \leq \operatorname{cond}(A)R(\mathbf{b}^*)$, oznaka R – relativna greška.

24. Neka je A regularna kvadratna matrica, $B = A^{-1}$, a B^* približna matrica, matrici B, koja zadovoljava ocjene: $\|I - AB^*\| \leq 0{,}02$, $\|B^*\| = 100$. Dati što bolju ocjenu norme: $\|B - B^*\|$ s gornje strane.

Dovoljno je riješiti jednostavni slučaj $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $B = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $B^* = \operatorname{diag}(\mu_1^*, \ldots, \mu_n^*)$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$.

Radi jednostavnijeg pisanja, ograničite se samo na slučaj $n = 2$.

Napomena. Naš zadatak dosta je sličan zadatku broj 15. koji se odnosi na slučaj jedne dimenzije (na slučaj $n = 1$).

25. Neka je $B = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & -0{,}6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$ za $k \geq 0$. Na ovaj način definisan je niz $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ čiji članovi pripadaju skupu R^2. Dokažite da niz konvergira i odredite $\mathbf{X} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)}$.

Uputstvo. Dovoljan uslov za konvergenciju je $\|B\| < 1$ u bar jednoj normi. Možda je $\|B\|_2 < 1$. Ako niz konvergira onda važi jednakost $\mathbf{X} = B\mathbf{X} + \mathbf{c}$.

26. Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Da li postoji realan broj r takav da iterativni niz $\mathbf{x}^{(n)} = (I - rA)\mathbf{x}^{(n-1)} + r\mathbf{b}$ (za $n \in N$) konvergira ka rješenju sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$?

Uputstvo. Neophodan i dovoljan uslov za konvergenciju glasi: za svako i, $|\lambda_i(B)| < 1$. Kod nas je $B = I - rA$.

27. Dokazati da Jakobijev iterativni postupak za rješavanje sistema linearnih jednačina $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $A \in R^{2\times 2}$, $\mathbf{b} \in R^2$, konvergira ako je $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Uputstvo. $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{c}$, svojstvene vrijednosti $\det(\lambda I - B) = 0$, $|\lambda_i| < 1$.

28. Dokazati da Jakobijev iterativni postupak za rješavanje sistema linearnih jednačina $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $A \in R^{3\times 3}$, $\mathbf{b} \in R^3$, konvergira ako je $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

29. Dokazati da Jakobijev iterativni postupak za rješavanje sistema linearnih jednačina $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $A \in R^{n\times n}$, $\mathbf{b} \in R^n$, konvergira ako je ($a_{ii} = 2$, $a_{i,i-1} = a_{i,i+1} = -1$, $a_{ij} = 0$ u ostalim

slučajevima, tj.)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

30. Neka je dat sistem jednačina $A\varphi = \mathbf{f}$, pri čemu je $A = I - C$, $c_{ij} \geq 0$, $f_i \geq 0$, $1 \leq i, j \leq n$. Ako je rješenje sistema $A\varphi = \mathbf{f}$ nenegativno (tj. $\varphi_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$) tada iterativni proces: $\varphi^{(j+1)} = C\varphi^{(j)} + \mathbf{f}$ konvergira.

31. Ispitati konvergenciju Jakobijevog iterativnog postupka za rješavanje sistema linearnih jednačina $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

32. Dat je sistem linearnih jednačina $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, gdje je $A = \begin{bmatrix} 2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 3 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 4{,}8 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4{,}1 \\ 7{,}3 \\ 14{,}7 \end{bmatrix}$. Dokazati da iterativni postupak $\mathbf{x}^{(k+1)} = (I - \delta A)\mathbf{x}^{(k)} + \delta \mathbf{b}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ konvergira za $0 < \delta < 0{,}4$ i proizvoljno $\mathbf{x}^{(0)}$.

$\bowtie$ Rješavanje sistema nelinearnih jednačina

33. Metodom proste iteracije ili Njutnovom metodom naći približnu vrijednost jednog rješenja jednačine $\sqrt{x} = x^2 - 4x + 1$ na pet decimala. (Računa se dok se x_{n-1} i x_n ne poklope na pet decimala.)

34. $\sqrt{x} = x^2 - 4x + 3$.

35. $\sin x - x + 1 = 0$.

36. $\cos x - x + 1 = 0$.

37. $e^x - x - 2 = 0$.

38. $e^x - x - 4 = 0$.

39. Metodom proste iteracije ili Njutnovom metodom naći približnu vrijednost jednog rješenja jednačine $x^3 - x - 1 = 0$ na pet decimala.

40. $x^3 - x - 2 = 0$.

41. $\operatorname{arctg} x = x - 2$.

42. $\operatorname{arctg} x = x^2 - 4$.

43. $\ln x - x + 2 = 0$.

44. $\ln x - x + 4 = 0$.

45. Neka je $a > 0$. Odredite realne brojeve p, q i r tako da iterativni niz $x_{n+1} = px_n + \dfrac{qa}{x_n^2} + \dfrac{ra^2}{x_n^5}$ može da posluži za računanje $\sqrt[3]{a}$ i da ima što je moguće viši red konvergencije.

46. Pokazati da iterativni proces $x_{n+1} = x_n \dfrac{x_n^3 + 2a}{2x_n^3 + a}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ za nalaženje rješenja jednačine $x^3 - a = 0$ $(a \neq 0)$ ima red konvergencije $r = 3$.

Uputstvo. Definicija. Kaže se da iterativni niz $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ za $n \geq 0$ služi za nalaženje približnog rješenja jednačine $x = \varphi(x)$ i da ima red konvergencije r ako važi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ i $x_{n+1} - \xi \sim c(x_n - \xi)^r$, gdje ξ označava tačno rješenje jednačine. Teorema. Dovoljan uslov glasi $\varphi(\xi) = \xi$ i $\varphi'(\xi) = 0$, ..., $\varphi^{(r-1)}(\xi) = 0$, $\varphi^{(r)}(\xi) \neq 0$.

47. Odredite broj rješenja sistema u R^2:

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - x + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 100 = 0 \end{cases}$$

48. Njutnovim postupkom, sa tačnošću $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$, odredite realno rješenje jednačine $x^3 - 2x - 5 = 0$.

49. Metodom proste iteracije riješite jednačinu $x^2 = e^x + 2$ sa tačnošću $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$.

50. Sa greškom manjom od $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$ odredite maksimalnu vrijednost funkcije $f(x) = \frac{\sin x}{1+x}$ na intervalu $[0, \pi]$. Koristite metodu proste iteracije.

51. Neka je $a > 0$. Konstruisati postupak za izračunavanje $1/\sqrt{a}$ zasnovan na Njutnovoj metodi. Ispitati konvergenciju tog postupka.

52. Postupkom po izboru odrediti približno najmanji pozitivni korijen jednačine $x \sin x = 1/2$.

$\bowtie$ Numeričke metode za rješavanje Košijevog zadatka za obične diferencijalne jednačine

53. Ojlerovom metodom sa korakom $h = 0{,}2$ riješite Košijev zadatak $y' = 2x - y$, $y(0) = -1$ na intervalu $[0, 1]$.

54. Za nalaženje približnog rješenja jednačine $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ u tačkama $x_k = x_0 + kh$ koristi se formula $y_{k+3} = y_{k+1} + \dfrac{h}{3}\Big(7y'_{k+2} - 2y'_{k+1} + y'_k\Big)$. Odredite red veličine lokalne greške predložene diferencne šeme.

55. Za rješavanje početnog zadatka $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ koristi se diferencna šema $y_n = 5y_{n-2} - 4y_{n-1} + h\Big(\alpha f(x_{n-2}, y_{n-2}) + \beta f(x_{n-1}, y_{n-1})\Big)$ za $n \geq 2$, gdje je $x_n = x_0 + nh$ za $n \geq 0$ i $h > 0$, pri čemu su α i β zasad neodređeni koeficijenti. Izaberite α i β tako da lokalna greška šeme iznosi $O(h^4)$.

56. Za diferencijalnu jednačinu $\begin{cases} y'' - 3y' - 4y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1 \end{cases}$ $(0 \leq x \leq 1)$ primjenjuje se diferencna šema

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - 3\dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - 4y_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ y_0 = 1, \quad \dfrac{y_1 - y_0}{h} = -1 \end{cases}$$

gdje je $h = \dfrac{1}{n}$. Odredite red aproksimacije.

Kako treba izmijeniti aproksimaciju početnih uslova da bismo povećali red aproksimacije?

57. Početni problem $y' = y - x$, $y(0) = 1$ numerički riješite na intervalu $[0, 1]$ sa korakom $h = 0{,}25$ Ojlerovim postupkom.

58. poboljšanim Ojlerovim postupkom

$\bowtie$ Numeričke metode za rješavanje graničnog zadatka za obične diferencijalne jednačine

59. Dat je granični zadatak $y'' + y = x$, $y(0) = 1$, $y(0{,}4) = 2$. Odredite približnu vrijednost rješenja $y = y(x)$ na intervalu $0 \leq x \leq 0{,}4$ pomoću metode konačnih razlika, uzimajući korak $h = 0{,}1$.

60. Dat je granični zadatak

$$\begin{cases} y'' + xy' + x^3 y = e^x, \quad 0 < x < 3 \\ y(0) = 1, \quad y(3) = 3 \end{cases}$$

Odredite približnu vrijednost rješenja $y = y(x)$ pomoću standardne diferencne metode (pomoću metode konačnih razlika) uzimajući korak $h = 1$.

61. Nastavak prethodnog zadatka. Precizno opišite kako bi se računalo za $h = 0{,}5$ i kako bi se onda, na osnovu dvije približne vrijednosti za rješenje dobijene sa dva navedena koraka, ocijenila greška bolje približne vrijednosti (one dobijene sa manjim korakom).

62. Dokažite da diferencni izraz $M(y,h) = \dfrac{1}{h^2}\Big[(1-h)y_{n-1} - 2y_n + (1+h)y_{n+1}\Big]$ aproksimira diferencijalni izraz $L(y) = y''(x) + 2y'(x)$ u tački $x = x_n$ i odredite red (po h) te aproksimacije. Pretpostavlja se da je funkcija $y = y(x)$ dovoljno glatka.

63. Nastavak prethodnog zadatka. Upotrebite približnu formulu od maločas $L(y) \approx M(y,h)$ za određivanje približne vrijednosti rješenja $y = y(x)$ graničnog zadatka $(0 \le x \le 1)$:

$$\begin{cases} y'' + 2y' = x \\ y(0) = 1, \quad y'(1) = 1 \end{cases}$$

uzimajući da je korak mreže $h = \dfrac{1}{3}$, tj. uzimajući da mrežu čvorova čine $x_n = nh$, $0 \le n \le 3$.

64. Razmotrimo granični zadatak $y'' + 2xy' - x^2y = x^2$, $y(0) = 1$, $y(1) = 0$. Neka je $h = \frac{1}{4}$. Napisati diferencne jednačine (radi primjene metode konačnih razlika).

65. Razmotrimo granični problem $y'' + 2xy' - x^2y = x^2$, $y'(0) + y(0) = 1$, $y'(1) + \frac{1}{2}y(1) = 0$. Neka je $h = \frac{1}{4}$. Napisati sistem diferencnih jednačina.

66. Tanki metalni štap dužine 1 metar $(0 \le x \le 1)$ ima toplotni izvor i nakon vremena dostiže stacionarno stanje gdje se temperatura u pojedinoj tački $u(x)$ ne mijenja. Koeficijent toplotne provodljivosti štapa zavisi od pozicije x i dat je sa $c(x) = 1 + x^2$. Lijevi kraj štapa $x = 0$ drži se na konstantnoj temperaturi od 1 stepena. Desni kraj štapa $x = 1$ je toplotno izolovan, tako da u tom kraju nema ni dotoka ni oticanja toplote. Razmatrani problem opisuje se pomoću graničnog zadatka

$$\frac{d}{dx}\left((1+x^2)\frac{du}{dx}\right) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 1, \quad u'(1) = 0.$$

Neka je $n \ge 1$ i $h = \frac{1}{n}$. Za razmatrani problem, napisati skup diferencnih jednačina.

67. Nastavak prethodnog zadatka. Izabrati n i riješiti skup diferencnih jednačina. Može se napisati program za računar. Može se isprobati za razne n.

Radi uvida u grešku (u preciznost numeričkog odgovora), izabrati neki slučaj kada se raspolaže i sa analitičkim rješenjem (tačnim rješenjem). Na primjer, ako je $f(x) = 2(3x^2-2x+1)$ onda je $u(x) = (1-x)^2$. Na osnovu rezultata, šta biste rekli o redu tačnosti (o stepenu konvergencije) predložene numeričke metode?

Numerička analiza. Rješenja zadataka

$\bowtie$ Interpolacija

1

0	1	2
2	3	5

metoda najmanjih kvadrata.

$a_{11} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 5$, $a_{12} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{1} \rangle = 3$, $a_{21} = a_{12}$, $a_{22} = \langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle = 3$, $b_1 = \langle \mathbf{f}, \mathbf{x} \rangle = 13$, $b_2 = \langle \mathbf{f}, \mathbf{1} \rangle = 10$. Uvedena je oznaka za skalarni proizvod $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, gdje je $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, kao i oznaka $\mathbf{1}$ za vektor čije su sve komponente 1

$\begin{cases} 5a + 3b = 13 \\ 3a + 3b = 10 \end{cases}$ $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{11}{6}$. Odgovor: $y = 1{,}5x + 1{,}83$.

Dato je $y_1 = 2$, $y_2 = 3$, $y_3 = 5$. Kaže se da su to izmjerene ili empirijske vrijednosti. Kaže se da relacija $y = 1{,}5x + 1{,}83$ izražava teorijski oblik zavisnosti (y zavisi od x). Po teorijskom obliku (po modelu) imamo

0	1	2
1,83	3,33	4,83

sa pojedinačnim odstupanjima

0,17	−0,33	0,17

.

3 $\sum_{i=0}^{n} \ell_i(x) = 1$.

Neka je $n \geq 1$. Neka $x_i \in R$ za $0 \leq i \leq n$ i $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$. Razmotrimo funkciju $f\colon R \to R$ i stavimo $f_i = f(x_i)$. L. i. p. $L_n = L_n(x)$ za podatke $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^{n}$ je jedan polinom stepena $\leq n$. Ako je f polinom stepena $\leq n$ onda važi $f(x) \equiv L_n(x)$. Zaista, $r(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\xi)$ (izraz za grešku) i $f^{(n+1)}(\xi) \equiv 0$.

Posmatrajmo interpolacioni polinom za funkciju $f(x) = 1$, ona predstavlja polinom nultog stepena. Očito je $f_i = f(x_i) = 1$. Imamo:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \ell_i(x) = \sum_{i=0}^{n} \ell_i(x) \quad \text{i} \quad L_n(x) \equiv f(x) = 1, \quad \text{dokazano.}$$

4 $\sum_{i=0}^{n} (x - x_i)^k \ell_i(x) = 0$.

Pogledajmo u slučaju $k = 2$:

$$(x - x_0)^2 \ell_0(x) + \ldots + (x - x_n)^2 \ell_n(x) =$$

$$(x^2 - 2x x_0 + x_0^2)\ell_0(x) + \ldots + (x^2 - 2x x_n + x_n^2)\ell_n(x) =$$

$$x^2 \underbrace{(\ell_0(x) + \ldots + \ell_n(x))}_{\substack{\text{L. i. p. za } f(x)=1 \\ \text{funkcija i polinom se poklapaju}}} - 2x \underbrace{(x_0\ell_0(x) + \ldots + x_n\ell_n(x))}_{\substack{\text{L. i. p. za } f(x)=x \\ \text{funkcija i polinom se poklapaju}}} + \underbrace{(x_0^2\ell_0(x) + \ldots + x_n^2\ell_n(x))}_{\substack{\text{L. i. p. za } f(x)=x^2 \\ \text{funkcija i polinom se poklapaju}}} =$$

$$= x^2 \cdot 1 - 2x \cdot x + x^2 = (x - x)^2 = 0, \quad \text{dokazano.}$$

Smatrali smo da je $n \geq 2$.

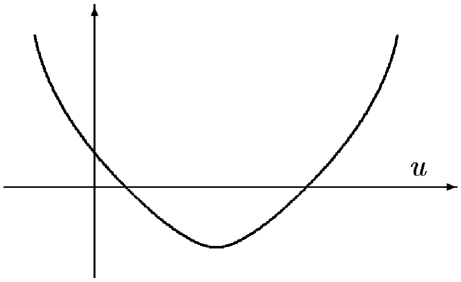
Slično se radi u opštem slučaju $1 \leq k \leq n$.

5 $|r| \leq \frac{3}{128} h^4 \max_{t \in [a,b]} |f^{IV}(t)|$.

Znamo da je po opštoj formuli $|r| \leq \frac{1}{4!}|\omega_4(x)| M_4$, gdje je $\omega_4(x) = (x - x_0) \ldots (x - x_3)$ i $M_4 = \max_{t \in [a,b]} |f^{IV}(t)|$. Tako da treba dokazati da je $\frac{1}{4!}|\omega_4(x)| \leq \frac{3}{128} h^4$ kad $x \in (x_1, x_2)$. Dato je $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, $x_3 = x_0 + 3h$. Stavimo $t = x - x_0 - \frac{3}{2}h$, tako da $t \in (-\frac{h}{2}, \frac{h}{2})$. Imamo:

$$\omega_4(x) = \left(t + \frac{3}{2}h\right)\left(t + \frac{1}{2}h\right)\left(t - \frac{1}{2}h\right)\left(t - \frac{3}{2}h\right) = \left(t^2 - \frac{9}{4}h^2\right)\left(t^2 - \frac{1}{4}h^2\right).$$

Stavimo $t^2 = u$. Posmatrajmo parabolu $(u - \frac{9}{4}h^2)(u - \frac{1}{4}h^2)$ za $0 \leq u < \frac{h^2}{4}$. Okrenuta je nadolje, ima nule $u = \frac{1}{4}h^2$ i $u = \frac{9}{4}h^2$, ima tjeme za $u = \frac{5}{4}h^2$ (minimum), ima negativnu vrijednost u tjemenu. Ako posmatramo za $0 \leq u < \frac{h^2}{4}$: parabola je pozitivna i ima najveću vrijednost za $u = 0$,



$$0 \leq u < \frac{h^2}{4} \qquad \left|\left(u - \frac{1}{4}h^2\right)\left(u - \frac{9}{4}h^2\right)\right| \leq \frac{1}{4}h^2\frac{9}{4}h^2,$$

$$-\frac{h}{2} < t < \frac{h}{2} \qquad \left|\left(t^2 - \frac{1}{4}h^2\right)\left(t^2 - \frac{9}{4}h^2\right)\right| \leq \frac{1}{4}h^2\frac{9}{4}h^2,$$

$$x_1 < x < x_2 \qquad \frac{1}{4!}|\omega_4(x)| \leq \frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{4}h^2\frac{9}{4}h^2 = \frac{3}{128}h^4, \quad \text{dokazano.}$$

15 $y = \frac{1}{x}$.

$$y - y^* = y(1 - xy^*), \qquad y - y^* = (y - y^* + y^*)(1 - xy^*),$$

$$|y - y^*| = |y - y^* + y^*| \cdot |1 - xy^*|, \qquad |y - y^*| \leq (|y - y^*| + |y^*|)|1 - xy^*|,$$

$$|y - y^*| \leq (|y - y^*| + 100) \cdot 0{,}02, \qquad |y - y^*| \leq \frac{100 \cdot 0{,}02}{1 - 0{,}02} = \frac{2}{0{,}98}.$$

Odgovor: $|y - y^*| \leq 2{,}041$.

$\bowtie$ Numerička integracija

17 $$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx c_1 f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + c_2 f(0) + c_3 f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$f(x) = 1 \quad I(f) = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{(smjena)} \quad = 2\int_0^{\pi/2} \frac{d\sin t}{\cos t} = \pi$$

$$S(f) = c_1 + c_2 + c_3 \quad I(f) = S(f) \quad c_1 + c_2 + c_3 = \pi,$$

$$f(x) = x \quad I(f) = \int_{-1}^{1} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad \text{(neparna)}$$

$$S(f) = -\frac{\sqrt{3}}{2}c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_3 \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_3 = 0 \quad c_3 = c_1,$$

$$f(x) = x^2 \quad I(f) = \int_{-1}^{1} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t d\sin t}{\cos t} = 2\int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt =$$

$$2\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2t}{2}dt \quad \text{(kada se izračuna)} \quad = \frac{\pi}{2} \quad S(f) = \frac{3}{4}c_1 + \frac{3}{4}c_3 \quad \frac{3}{4}c_1 + \frac{3}{4}c_3 = \frac{\pi}{2}.$$

Rješenje: $c_1 = \frac{\pi}{3}, \ c_2 = \frac{\pi}{3}, \ c_3 = \frac{\pi}{3}.$

Vidimo da se radi o specijalnom slučaju Gausove kvadraturne formule po težinskoj funkciji $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (tzv. Hermitova formula) kada je $n = 3$. Znamo da je $T_3(x) = \cos(3\arccos x)$, odnosno $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, Čebiševljev polinom trećeg stepena i da su njegove nule x_1, x_2, x_3 – čvorovi kvadraturne formule. Znamo da u razmatranom specijalnom slučaju $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ važi $c_i = \frac{\pi}{n}$ za $1 \le i \le n$.

Navedena kvadraturna formula $I(f) \approx S(f)$ ima algebarski stepen tačnosti $a = 2n - 1 = 5$. To znači da važi $I(f) = S(f)$ i kada je $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$, $f(x) = x^5$.

18 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2).$

Rezultat glasi $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Predstavlja specijalan slučaj Gausove kvadraturne formule po težinskoj funkciji $p(x) \equiv 1$ kada je $n = 2$. Čvorovi su nule Ležandrovog polinoma drugog stepena $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

Algebarski stepen tačnosti kvadraturne formule iznosi $a = 2n - 1 = 3$.

19 Ležandr, $P_m \perp P_n$ za $m \neq n$ i $\|P_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$ za $n \geq 0$.

Ako je $u(x) = x^n$ onda je $u(0) = u'(0) = \ldots = u^{(n-1)}(0) = 0$. Ako je $u(x) = (x-1)^n$ onda je $u^{(k)}(1) = 0$ za $0 \le k \le n-1$. Ako je $u(x) = (x^2-1)^n$ onda je $u^{(k)}(-1) = u^{(k)}(1) = 0$ za $0 \le k \le n-1$.

Neka je $u(x) = (x^2-1)^m$, $v(x) = (x^2-1)^n$, $m \ge 0$, $n \ge 0$, $m > n$, $c_n = \frac{1}{2^n n!}$. Imamo

$$\langle P_m, P_n \rangle = \int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = c_m c_n \int_{-1}^{1} u^{(m)}(x)v^{(n)}(x)dx, \qquad \text{parcijalna integracija:}$$

$$\int_{-1}^{1} u^{(m)}(x)v^{(n)}(x)dx = \int_{-1}^{1} v^{(n)}(x)du^{(m-1)}(x) = v^{(n)}(x)u^{(m-1)}(x)\Big|_{x=-1}^{x=1} - \int_{-1}^{1} u^{(m-1)}(x)dv^{(n)}(x) =$$

$$-\int_{-1}^{1} u^{(m-1)}(x)v^{(n+1)}(x)dx = \int_{-1}^{1} u^{(m-2)}(x)v^{(n+2)}(x)dx = \ldots =$$

$$(-1)^n \int_{-1}^{1} u^{(m-n)}(x)v^{(2n)}(x)dx = (-1)^n \int_{-1}^{1} u^{(m-n)}(x)c\,dx =$$

$$(-1)^n u^{(m-n-1)}(x)c\Big|_{x=-1}^{x=1} = 0.$$

Pokazali smo da je $\langle P_m, P_n \rangle = 0$.

Neka je $u(x) = (x^2-1)^n$, $c_n = \frac{1}{2^n n!}$, $n \ge 0$. Imamo redom

$$\|P_n\|^2 = \langle P_n, P_n \rangle = c_n^2 \int_{-1}^{1} u^{(n)}(x)u^{(n)}(x)dx =$$

$$c_n^2(-1)^n \int_{-1}^{1} u^{(2n)}(x)u(x)dx = c_n^2(-1)^n(2n)\ldots 1 \int_{-1}^{1} u(x)dx;$$

$$I_n = \int_{-1}^{1} u(x)dx = \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx = (x^2-1)^n x\Big|_{x=-1}^{x=1} - \int_{-1}^{1} x d(x^2-1)^n =$$

$$-2n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^{n-1}x^2dx = -2n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^{n-1}(x^2-1+1)dx = -2n(I_n+I_{n-1}),$$

$$I_n = \frac{-2n}{2n+1}I_{n-1} = (-1)^n\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}I_0 = (-1)^n\frac{2n\cdot\ldots\cdot 2}{(2n+1)\cdot\ldots\cdot 3}\cdot 2 \qquad (I_0=2);$$

$$\|P_n\|^2 = \frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{1}{2^n n!}(-1)^n(2n)\ldots 1(-1)^n\frac{2n\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 2}{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdot\ldots\cdot 3}\cdot 2 = \frac{2}{2n+1}.$$

Pokazali smo da je $\|P_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$.

22 Čebišev $T_n(x) = \cos(n\arccos x)$, treba dokazati $T_{n+2}(x) - 2xT_{n+1}(x) + T_n(x) = 0$, $n \geq 0$.
Smjena: $\arccos x = \alpha$, odnosno $x = \cos\alpha$.
Treba dokazati $\cos(n+2)\alpha - 2\cos\alpha\cos(n+1)\alpha + \cos n\alpha = 0$. Po adicionim formulama:

$$\cos(n+2)\alpha - 2\cos\alpha\cos(n+1)\alpha + \cos n\alpha =$$

$$\cos n\alpha\cos 2\alpha - \sin n\alpha\sin 2\alpha - 2\cos\alpha(\cos n\alpha\cos\alpha - \sin n\alpha\sin\alpha) + \cos n\alpha =$$

$$\cos n\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - \sin n\alpha\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos n\alpha\cos^2\alpha + 2\sin n\alpha\sin\alpha\cos\alpha + \cos n\alpha =$$

$$\cos n\alpha\Big(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha + 1\Big) + \sin n\alpha\Big(-2\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha\Big) =$$

$$\cos n\alpha\Big(-\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + 1\Big) = 0, \quad \text{dokazano.}$$

$\bowtie$ Numeričke metode algebre

23 $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|$.

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}|x_i| \qquad \|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right\}$$

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \operatorname{cond}(A)\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \qquad \begin{cases} 9x_1+8x_2+7x_3=3\\ 8x_1+7x_2+6x_3=3\\ 7x_1+6x_2+4x_3=4\end{cases} \qquad x_1=2,\ \ x_2=-1,\ \ x_3=-1$$

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7\\ 8 & 7 & 6\\ 7 & 6 & 4\end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 10 & -1\\ 10 & -13 & 2\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3\\ 3\\ 4\end{bmatrix}$$

$$\|A\| = 24 \qquad \|A^{-1}\| = 25 \qquad \operatorname{cond}(A) = \|A\|\cdot\|A^{-1}\| = 600$$

$$\|\mathbf{b}\| = \max_{1\leq i\leq 3}|b_i| = 4 \qquad \text{dato je } |b_i - b_i^*| \leq 0{,}001 \qquad \|\delta\mathbf{b}\| = 0{,}001$$

$$\mathbf{x} = (2,-1,-1) \qquad \|\mathbf{x}\| = 2$$

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{2} \leq 600\cdot\frac{0{,}001}{4} \qquad \|\delta\mathbf{x}\| \leq 0{,}3 \qquad \text{Odgovor:}\ \ x_1 = 2\pm 0{,}3,\ \ x_2 = -1\pm 0{,}3,\ \ x_3 = -1\pm 0{,}3.$$

(Teorema: relativna greška $\mathbf{x} \le \text{cond}(A) \cdot$ relativna greška vektora slobodnih članova. Sa $\text{cond}(A)$ označava se mjera uslovljenosti matrice sistema.)

(25) $\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{c}$.

Teorema o dovoljnim uslovima za konvergenciju niza $\mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$: dovoljno je da bude $\|B\| < 1$. U tom slučaju, $\mathbf{x}^{(k)}$ konvergira ka rješenju sistema $\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{c}$ kad $k \to \infty$.

Ako je matrica B simetrična onda je $\|B\|_2 = \max_{1\le i \le n} |\lambda_i|$. Znamo da se svojstvene vrijednosti $\lambda_i = \lambda_i(B)$ matrice B mogu definisati kao rješenja jednačine $\det(\lambda I - B) = 0$, gdje je I jedinična matrica dimenzije $n \times n$. Imamo

$$B = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & -0{,}6 \end{bmatrix} \qquad B = B^T \qquad \|B\|_2 = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i(B)| \qquad \lambda I - B = \begin{bmatrix} \lambda - 0{,}6 & -0{,}6 \\ -0{,}6 & \lambda + 0{,}6 \end{bmatrix}$$

$\det(\lambda I - B) = \lambda^2 - 0{,}36 - 0{,}36 = \lambda^2 - 0{,}72$, $\det(\lambda I - B) = 0$, $\lambda^2 - 0{,}72 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{0{,}72}$. Ispunjeno je $|\lambda_1| < 1$ i $|\lambda_2| < 1$. Dokazali smo da niz $\mathbf{x}^{(k)}$ konvergira kad $k \to \infty$. Dalje

$$\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{c} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & -0{,}6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} x_1 = 0{,}6x_1 + 0{,}6x_2 \\ x_2 = 0{,}6x_1 - 0{,}6x_2 + 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} 0{,}4x_1 - 0{,}6x_2 = 0 \\ -0{,}6x_1 + 1{,}6x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad 1{,}4x_1 = 3 \quad 1{,}4x_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{15}{7} \quad x_2 = \frac{10}{7}$$

Odgovor: $\mathbf{X} = \left(\frac{15}{7}, \frac{10}{7}\right)$.

(Izbor početne aproksimacije $\mathbf{x}^{(0)}$ ne utiče na konvergenciju i na limes.)

(26) Da li postoji r.

Teorema o potrebnim i dovoljnim uslovima za konvergenciju niza $\mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$ (metoda proste iteracije za rješavanje sistema linearnih jednačina): potrebno je i dovoljno da bude $|\lambda_i(B)| < 1$ za $1 \le i \le n$. Misli se: da bi konvergirao bez obzira na izbor $\mathbf{x}^{(0)} \in R^n$.

Dato je $B = I - rA$, gdje $r \in R$. Poznato je: ako se članovi matrice pomnože nekim brojem onda se i njene svojstvene vrijednosti pomnože sa tim istim brojem. Zaista, $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow (cA)\mathbf{x} = (c\lambda)\mathbf{x}$, isti svojstveni vektor $\mathbf{x}$. Slično: ako se matrica uveća za I onda se svojstvene vrijednosti uvećaju za 1. Zaista, $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow (A + I)\mathbf{x} = (\lambda + 1)\mathbf{x}$, ostaje isti svojstveni vektor $\mathbf{x} \ne 0$. U zadatku je $n = 2$, tako da je $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Dato je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Mi računamo

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 \qquad \begin{array}{l} \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \\ \lambda = -1, \ \ \lambda = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \lambda \text{ matrice } -rA \text{ su } r,\ -3r \\ \lambda_i(B) \text{ su } 1 + r,\ 1 - 3r \end{array} \qquad \begin{cases} \text{ako je } r = 0 \text{ onda nije ispunjeno } |\lambda_i(B)| < 1 \\ \text{ako je } r > 0 \text{ onda je } 1 + r > 1 \\ \text{ako je } r < 0 \text{ onda je } 1 - 3r > 1 \end{cases}$$

Odgovor: ne može se izabrati $r \in R$.

(27) Jakobijeva metoda ($n = 2$).

Znamo da dovoljan uslov za konvergenciju Jakobijeve metode glasi: matrica A je dijagonalno dominantna, ali vidimo da u zadatku uslov nije ispunjen (nije ispunjen kada je $n > 2$).

Oslanjamo se na teoremu o neophodnim i dovoljnim uslovima za konvergenciju metode proste iteracije, uslov glasi $|\lambda_i(B)| < 1$ za $1 \le i \le n$. Treba ispitati svojstvene vrijednosti matrice B.

Pogledajmo prvo specijalan slučaj $n = 2$:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 = b_1 \\ -x_1 + 2x_2 = b_2 \end{cases} \quad \text{Jakobijeva} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}b_1 \\ \frac{1}{2}b_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad \det(\lambda I - B) = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{4} \qquad \det(\lambda I - B) = 0$$

$$\lambda^2 - \frac{1}{4} = 0, \qquad \lambda = \pm\frac{1}{2}, \qquad |\lambda_i| < 1 \text{ za } i = 1, 2, \qquad \text{uslov je ispunjen, dokazano.}$$

(Jakobijeva metoda: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, iz i–te jednačine izraziti x_i za $1 \le i \le n$, tako $\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{c}$, zatim $\mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$ za $k \ge 0$.)

28 Pogledajmo sada specijalan slučaj $n = 3$ (Jakobijeva):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad \det(\lambda I - B) = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda$$

$$\lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda = 0, \qquad \lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \text{ispunjen je uslov } |\lambda_i| < 1, \text{ dokazano.}$$

29 Na redu je opšti slučaj (Jakobijeva).

Dobiće se $\lambda_1 = \cos\frac{\pi}{n+1}$, $\lambda_2 =, \cos\frac{2\pi}{n+1}$, $\ldots$, $\lambda_n = \cos\frac{n\pi}{n+1}$.

Neka je matrica B dimenzije $n \times n$. Neka je $x_n = \det(\lambda I - B)$. Imamo $x_0 = 1$, $x_1 = \lambda$, $x_2 = \lambda^2 - \frac{1}{4}$, $x_3 = \lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda$. Razvoj po elementima prve vrste. Na primjer:

$$x_5 = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda x_4 + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda x_4 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) x_3,$$

$x_5 - \lambda x_4 + \frac{1}{4}x_3 = 0$. Slično, u opštem slučaju $x_n - \lambda x_{n-1} + \frac{1}{4}x_{n-2} = 0$ $(n \ge 2)$, linearna diferencna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima po nepoznatoj $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$. Karakteristična jednačina glasi $X^2 - \lambda X + \frac{1}{4} = 0$. Njeni korijeni su $X = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 1}}{2}$. Opšte rješenje $x_n = c_1 \left(\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2-1}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2-1}}{2}\right)^n$. Tražimo c_1 i c_2 iz uslova $x_0 = 1$, $x_1 = \lambda$. Dobija se $c_1 = \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2-1}}{2\sqrt{\lambda^2-1}}$, $c_2 = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2-1}}{2\sqrt{\lambda^2-1}}$. Tako da je $x_n = \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{\lambda^2-1}} \left(-(\lambda - \sqrt{\lambda^2-1})^{n+1} + (\lambda + \sqrt{\lambda^2-1})^{n+1}\right)$.

Prelazimo na rješavanje jednačine $x_n = 0$ po nepoznatoj λ. Neka je $\lambda = \cos\varphi$ (smjena):

$$x_n = \frac{1}{2^{n+1} i \sin\varphi}\left(-(\cos\varphi - i\sin\varphi)^{n+1} + (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{n+1}\right) =$$

$$\frac{1}{2^{n+1} i \sin\varphi}\Big(-(\cos(n+1)\varphi - i\sin(n+1)\varphi) + \cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi\Big) =$$

$$\frac{1}{2^{n+1} i \sin\varphi} \cdot 2i \sin(n+1)\varphi = \frac{\sin(n+1)\varphi}{2^n \sin\varphi}, \qquad \text{zapaziti da je} \quad \lim_{\varphi\to 0} \frac{\sin(n+1)\varphi}{2^n \sin\varphi} = \frac{n+1}{2^n} \neq 0,$$

$$x_n = 0, \qquad \frac{\sin(n+1)\varphi}{2^n \sin\varphi} = 0, \qquad \sin(n+1)\varphi = 0,$$

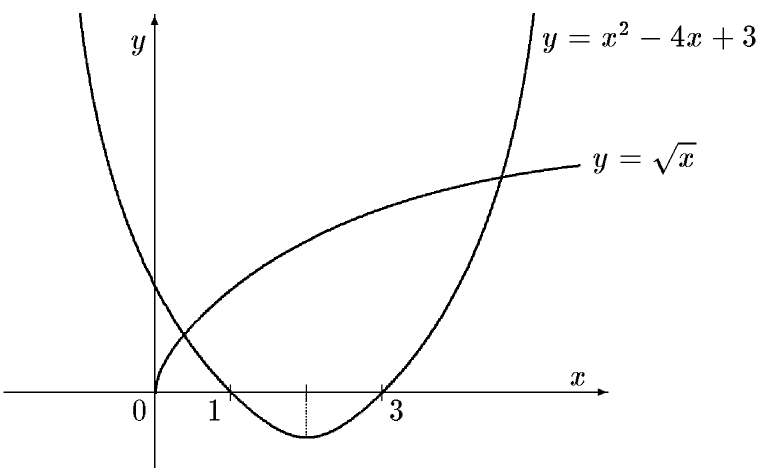
$$(n+1)\varphi = k\pi, \;\; k \in Z, \qquad \varphi = \frac{k\pi}{n+1}, \qquad \text{(bila je smjena)} \;\; \lambda = \cos\varphi = \cos\frac{k\pi}{n+1}.$$

Dovoljno je $k = 0, \ldots, 2n+1$ zbog periodičnosti cos. Dovoljno je $k = 0, \ldots, n$ da se ne bi dvaput računalo. Treba samo $k = 1, \ldots, n$ zbog $\lim_{\varphi\to 0} \frac{\sin(n+1)\varphi}{2^n \sin\varphi} \neq 0$.

Mi smo pokazali da je $\lambda_k(B) = \cos\frac{k\pi}{n+1}$, gdje je $1 \le k \le n$. Vidimo da je $|\lambda_k(B)| < 1$ za $1 \le k \le n$. Dokazali smo da iterativni postupak konvergira.

$\bowtie$ Rješavanje sistema nelinearnih jednačina

(34) Metodom proste iteracije ili Njutnovom metodom naći približnu vrijednost jednog rješenja jednačine $\sqrt{x} = x^2 - 4x + 3$ na pet decimala. (Računa se dok se x_{n-1} i x_n ne poklope na pet decimala.)



Njutnova metoda (metoda tangente) $f(x) = 0$, $f(x) = \sqrt{x} - x^2 + 4x - 3$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2x + 4$, $f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} - 2$. Interval: neka je $a = \frac{1}{4}$, $f(a) = -\frac{25}{16} < 0$, $b = 1$, $f(b) = 1 > 0$. Uslovi teoreme: $f \in C^2[a,b]$, $f(a)f(b) < 0$, $f'(x) \ge f'(1) = \frac{3}{2}$, f' je stalnog znaka na $[a,b]$ $(f' > 0)$, $f''(x) \le -2$, f'' je stalnog znaka na $[a,b]$ $(f'' < 0)$, svi uslovi su ispunjeni. Kao x_0 biramo bilo koju tačku iz skupa $[a,b] = [\frac{1}{4}, 1]$ takvu da je $f(x_0)f''(x_0) > 0$. Neka je $x_0 = \frac{1}{4}$. Neka je $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Sigurno je $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$, gdje je $\frac{1}{4} < \xi < 1$ rješenje jednačine $f(x) = 0$,

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	0,25	−1,5625	4,5
1	0,597222	−0,194984	3,452552
2	0,653698	−0,004015	3,311022
3	0,654910	−0,000002	3,308024
4	0,654911		

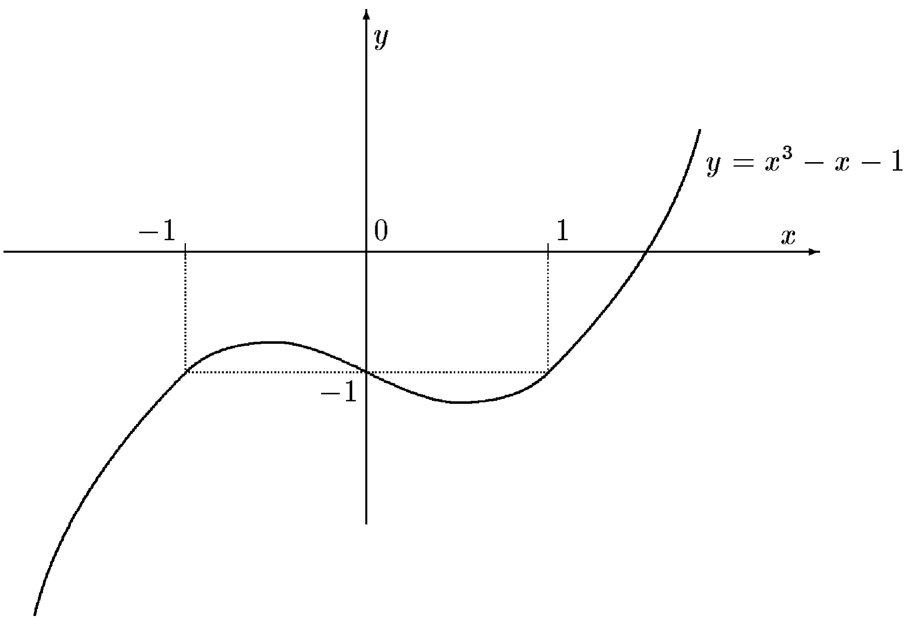
Odgovor: $x = 0{,}654911$.

(39) Metodom proste iteracije ili Njutnovom metodom naći približnu vrijednost jednog rješenja jednačine $x^3 - x - 1 = 0$ na pet decimala.

Metoda proste iteracije $x = \varphi(x)$. Neka je $\varphi(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $a = 1$, $b = 2$. Zatim $\varphi(1) = \sqrt[3]{2} = 1{,}26$, $\varphi(2) = \sqrt[3]{3} = 1{,}44$, φ je rastuća na $[a, b]$. Dalje $\varphi'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}$, $1 \le x \le 2 \Rightarrow |\varphi'(x)| \le \frac{1}{3}$. Uslovi teoreme: φ preslikava interval $[a, b]$ u taj isti interval i $|\varphi'(x)| \le q < 1$ za $x \in [a, b]$, oba uslova su ispunjena. Izaberimo x_0 – bilo koju tačku skupa $[a, b]$. Neka je $x_0 = 1$. Neka je $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. Sigurno je $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$, gdje je $x = \xi$ rješenje jednačine $x = \sqrt[3]{1+x}$.

$x_1 = 1{,}259921$ $\quad x_2 = 1{,}312294$ $\quad x_3 = 1{,}322354$ $\quad x_4 = 1{,}324269$
$x_5 = 1{,}324633$ $\quad x_6 = 1{,}324702$ $\quad x_7 = 1{,}324715$ $\quad x_8 = 1{,}324717$
$x_9 = 1{,}324718$

Odgovor: $x = 1{,}324718$.



(45) Neka je $a > 0$. Odredite realne brojeve p, q i r tako da iterativni niz $x_{n+1} = px_n + \dfrac{qa}{x_n^2} + \dfrac{ra^2}{x_n^5}$ može da posluži za računanje $\sqrt[3]{a}$ i da ima što je moguće viši red konvergencije.

$$\varphi(x) = px + \frac{qa}{x^2} + \frac{ra^2}{x^5} \qquad \xi = \sqrt[3]{a} \qquad \varphi(\xi) = \xi \qquad p\xi + \frac{qa}{\xi^2} + \frac{ra^2}{\xi^5} = \xi \;\Big/ : \xi \qquad p + q + r = 1,$$

$$\varphi'(x) = p - \frac{2qa}{x^3} - \frac{5ra^2}{x^6} \qquad \varphi'(\xi) = 0 \qquad p - \frac{2qa}{\xi^3} - \frac{5ra^2}{\xi^6} = 0 \qquad p - 2q - 5r = 0,$$

$$\varphi''(x) = \frac{6qa}{x^4} + \frac{30ra^2}{x^7} \qquad \varphi''(\xi) = 0 \qquad \frac{6qa}{\xi^4} + \frac{30ra^2}{\xi^7} = 0 \;\Big/ \cdot \xi \qquad q + 5r = 0 \qquad q = -5r,$$

$$\begin{matrix} p - 5r + r = 1 \\ p + 10r - 5r = 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} p - 4r = 1 \\ p + 5r = 0 \end{matrix} \qquad p = \frac{5}{9} \quad r = -\frac{1}{9} \qquad \text{Odgovor: } p = \frac{5}{9},\ q = \frac{5}{9},\ r = -\frac{1}{9}.$$

(46) Pokazati da iterativni proces $x_{n+1} = x_n \dfrac{x_n^3 + 2a}{2x_n^3 + a}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ za nalaženje rješenja jednačine $x^3 - a = 0$ $(a \neq 0)$ ima red konvergencije $r = 3$. Uputstvo. Definicija. Kaže se da

iterativni niz $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ za $n \geq 0$ služi za nalaženje približnog rješenja jednačine $x = \varphi(x)$ i da ima red konvergencije r ako važi $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ i $x_{n+1} - \xi \sim c(x_n - \xi)^r$, gdje ξ označava tačno rješenje jednačine. Teorema. Dovoljan uslov glasi $\varphi(\xi) = \xi$ i $\varphi'(\xi) = 0, \ldots, \varphi^{(r-1)}(\xi) = 0$, $\varphi^{(r)}(\xi) \neq 0$.

$$\varphi(x) = x \cdot \frac{x^3 + 2a}{2x^3 + a}, \qquad \varphi(\sqrt[3]{a}) = \sqrt[3]{a} \cdot \frac{a + 2a}{2a + a},$$

$$\varphi'(x) = \frac{x^3 + 2a}{2x^3 + a} + x\left(\frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}a}{2x^3 + a}\right)' = \frac{x^3 + 2a}{2x^3 + a} - x \cdot \frac{3}{2}a \cdot \frac{6x^2}{(2x^3 + a)^2} = \frac{x^3 + 2a}{2x^3 + a} - \frac{9ax^3}{(2x^3 + a)^2},$$

$$\varphi'(\sqrt[3]{a}) = 0,$$

$$\varphi''(x) = \frac{-9ax^2}{(2x^3 + a)^2} - 9a\frac{(2x^3 + a)^2 - x^3 \cdot 2(2x^3 + a) \cdot 2}{(2x^3 + a)^4} \cdot 3x^2 = \frac{-9ax^2}{(2x^3 + a)^2} - 9a\frac{-2x^3 + a}{(2x^3 + a)^3} \cdot 3x^2,$$

$$\varphi''(\sqrt[3]{a}) = 0, \qquad \varphi''(x) = -9a\frac{-4x^5 + 4ax^2}{(2x^3 + a)^3} = 36a\frac{x^5 - ax^2}{(2x^3 + a)^3},$$

$$\varphi'''(x) = 36a\frac{(5x^4 - 2ax)(2x^3 + a) - 3(x^5 - ax^2) \cdot 6x^2}{(2x^3 + a)^4} =$$

$$\frac{36a}{(2x^3 + a)^4}(-8x^7 + 19ax^4 - 2a^2x), \qquad \varphi'''(\sqrt[3]{a}) = \frac{36a \cdot 9a^2}{(3a)^4}\sqrt[3]{a} = \frac{4\sqrt[3]{a}}{a} \neq 0.$$

$\bowtie$ Numeričke metode za rješavanje Košijevog zadatka za obične diferencijalne jednačine

54 Za nalaženje približnog rješenja jednačine $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ u tačkama $x_k = x_0 + kh$ koristi se formula $y_{k+3} = y_{k+1} + \frac{h}{3}\big(7y'_{k+2} - 2y'_{k+1} + y'_k\big)$. Odredite red veličine lokalne greške predložene diferencne šeme.

Taylor, $y = y(x)$, $y' = y'(x)$, $x = x_k$:

$$L = y_{k+3} = y(x_k) + 3hy'(x_k) + \frac{1}{2}(3h)^2y''(x_k) + \frac{1}{6}(3h)^3y'''(x_k) + \frac{1}{24}(3h)^4y^{IV}(x_k) + O(h^5),$$

$$R = y_{k+1} + \frac{h}{3}(7y'_{k+2} - 2y'_{k+1} + y'_k) = y(x_k) + hy'(x_k) + \frac{h^2}{2}y''(x_k) + \frac{h^3}{6}y'''(x_k) + \frac{h^4}{24}y^{IV}(x_k) + O(h^5) +$$

$$\frac{h}{3}\Big(7y'(x_k) + 7 \cdot 2hy''(x_k) + 7\frac{(2h)^2}{2}y'''(x_k) + 7\frac{(2h)^3}{6}y^{IV}(x_k) + O(h^4) -$$

$$2y'(x_k) - 2hy''(x_k) - 2\frac{h^2}{2}y'''(x_k) - 2\frac{h^3}{6}y^{IV}(x_k) + O(h^4) + y'(x_k)\Big) =$$

$$y(x_k) + hy'(x_k) + \frac{h^2}{2}y''(x_k) + \frac{h^3}{6}y'''(x_k) + \frac{h^4}{24}y^{IV}(x_k) + \frac{h}{3}\times$$

$$\Big(6y'(x_k) + 12hy''(x_k) + 13h^2y'''(x_k) + 9h^3y^{IV}(x_k)\Big) + O(h^5) =$$

$$y(x_k) + 3hy'(x_k) + \frac{9}{2}h^2y''(x_k) + \frac{9}{2}h^3y'''(x_k) + \frac{73}{24}h^4y^{IV}(x_k) + O(h^5),$$

lokalna greška $\rho = L - R = \dfrac{8}{24}h^4y^{IV}(x_k) + O(h^5), \qquad \rho = O(h^4).$ Odgovor: četvrti.

55 Za rješavanje početnog zadatka $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ koristi se diferencna šema $y_n = 5y_{n-2} - 4y_{n-1} + h\Big(\alpha f(x_{n-2}, y_{n-2}) + \beta f(x_{n-1}, y_{n-1})\Big)$ za $n \geq 2$, gdje je $x_n = x_0 + nh$ za $n \geq 0$ i $h > 0$, pri čemu su α i β zasad neodređeni koeficijenti. Izaberite α i β tako da lokalna greška šeme iznosi $O(h^4)$.

Uvedimo skraćenice $y_n = y(x_n)$, $y'_n = y'(x_n)$, ..., neka ρ označava lokalnu grešku,

(računamo razliku lijeve i desne strane) $\quad \rho = L - R =$

$$y_n - 5\Big(y_n - 2hy'_n + \frac{(2h)^2}{2}y''_n - \frac{(2h)^3}{6}y'''_n + \frac{(2h)^4}{24}y^{IV}_n\Big) + 4\Big(y_n - hy'_n + \frac{h^2}{2}y''_n - \frac{h^3}{6}y'''_n + \frac{h^4}{24}y^{IV}_n\Big) -$$

$$\alpha h\Big(y'_n - 2hy''_n + \frac{(2h)^2}{2}y'''_n - \frac{(2h)^3}{6}y^{IV}_n\Big) - \beta h\Big(y'_n - hy''_n + \frac{h^2}{2}y'''_n - \frac{h^3}{6}y^{IV}_n\Big) + O(h^5) =$$

$$\underbrace{\Big(6 - \alpha - \beta\Big)}_{=0} hy'_n + \underbrace{\Big(-8 + 2\alpha - \beta\Big)}_{=0} h^2y''_n + \underbrace{\Big(6 - 2\alpha - \frac{\beta}{2}\Big)}_{=0} h^3y'''_n + \Big(-\frac{19}{6} + \frac{4\alpha}{3} + \frac{\beta}{6}\Big)h^4y^{IV}_n + O(h^5).$$

Tako $\alpha = 2$, $\beta = 4$, $\qquad \rho = \Big(-\dfrac{19}{6} + \dfrac{4\alpha}{3} + \dfrac{\beta}{6}\Big)h^4y^{IV}_n + O(h^5),$

$\rho \sim \frac{1}{6}y^{IV}(x_n)h^4$ kad $h \to 0$. Odgovor: $\alpha = 2$, $\beta = 4$.

⋈ Numeričke metode za rješavanje graničnog zadatka za obične diferencijalne jednačine

60 Dat je granični zadatak $y'' + xy' + x^3y = e^x$, $0 < x < 3$, $y(0) = 1$, $y(3) = 3$. Odredite približnu vrijednost rješenja $y = y(x)$ pomoću standardne diferencne metode (pomoću metode konačnih razlika) uzimajući korak $h = 1$.

Oznake $[a,b] = [x_0, x_0 + X] = [x_0, x_N]$, $h = X/N$, mreža je ekvidistantna. Znamo da je

$$y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + O(h^2), \qquad y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + O(h^2).$$

Prema tome $\quad \begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ y(a) = A, \quad y(b) = B \end{cases} \quad \Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2}(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + p(x_n)\frac{1}{2h}(y_{n+1} - y_{n-1}) + q(x_n)y_n = f(x_n), \quad 1 \leq n \leq N-1 & (*) \\ y_0 = A, \quad y_N = B & (**) \end{cases}$$

Vidimo da ima $N+1$ uslova i $N+1$ nepoznatih $y_0, y_1, \ldots, y_N$ ($N-1$ uslova i $N-1$ nepoznatih $y_1, \ldots, y_{N-1}$). U našem zadatku $[a,b] = [0,3]$, $N = 3$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$:

$$x = 2: \qquad 3 - 2y_2 + y_1 + 3 - y_1 + 8y_2 = e^2, \qquad 6y_2 = e^2 - 6 \qquad y_2 = \frac{1}{6}e^2 - 1,$$

$$x = 1: \qquad y_2 - 2y_1 + 1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2} + y_1 = e, \qquad \frac{3}{2}y_2 - \frac{3}{2}y_1 = e - \frac{1}{2} \qquad y_2 - y_1 = \frac{2}{3}e - \frac{1}{3}$$

$y_1 = y_2 - \dfrac{2}{3}e + \dfrac{1}{3}.$ Poznato $e = 2{,}71$ $\ e^2 = 7{,}39.$ Tako $y_2 = 0{,}23$ $\ y_1 = -1{,}25.$

Odgovor:

x	0	1	2	3
y	1	$-1{,}25$	$0{,}23$	3

.

62 Dokažite da diferencni izraz $M(y,h) = \dfrac{1}{h^2}\Big[(1-h)y_{n-1} - 2y_n + (1+h)y_{n+1}\Big]$ aproksimira diferencijalni izraz $L(y) = y''(x) + 2y'(x)$ u tački $x = x_n$ i odredite red (po h) te aproksimacije. Pretpostavlja se da je funkcija $y = y(x)$ dovoljno glatka.

Dato je $L = y'' + 2y'$, $M = \frac{1}{h^2}\Big((1-h)y(x-h) - 2y(x) + (1+h)y(x+h)\Big)$, uvedimo skraćenice $y = y(x_n)$, $y' = y'(x_n)$, $\ldots$, vršimo razvoj po Taylorovoj formuli po stepenima $x - x_n$ (zatim stavljamo $x = x_{n-1}$ i $x = x_{n+1}$):

$$M = \frac{1}{h^2}\Big((1-h)\Big(y - hy' + \frac{h^2}{2}y'' - \frac{h^3}{6}y''' + \frac{h^4}{24}y^{IV} + O(h^5)\Big) - 2y + (1+h)\times$$

$$\Big(y + hy' + \frac{h^2}{2}y'' + \frac{h^3}{6}y''' + \frac{h^4}{24}y^{IV} + O(h^5)\Big)\Big) =$$

$$\frac{1}{h^2}\Big(2h^2y' + h^2y'' + \frac{h^4}{3}y''' + \frac{h^4}{12}y^{IV} + O(h^5)\Big) = 2y' + y'' + \frac{h^2}{3}y''' + \frac{h^2}{12}y^{IV} + O(h^3).$$

Za grešku aproksimacije $\rho = \rho(h)$ imamo $\rho = L - M = -\frac{h^2}{3}y''' - \frac{h^2}{12}y^{IV} + O(h^3)$, $\rho \sim Ch^2$.

Vidimo da je $\lim_{h\to 0}\rho = 0$ tako da zaista aproksimira. Odgovor: aproksimacija je drugog reda (drugog stepena).

63 Nastavak prethodnog zadatka. Upotrebite približnu formulu od maločas $L(y) \approx M(y,h)$ za određivanje približne vrijednosti rješenja $y = y(x)$ graničnog zadatka $(0 \le x \le 1)$:

$$y'' + 2y' = x, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(1) = 1$$

uzimajući da je korak mreže $h = \dfrac{1}{3}$, tj. uzimajući da mrežu čvorova čine $x_n = nh$, $0 \le n \le 3$.

Dato je $y'' + 2y' \approx \frac{1}{h^2}\Big((1-h)y(x-h) - 2y(x) + (1+h)y(x+h)\Big)$. Neka je $h = \frac{1}{3}$, neka je $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = 1$, neka su y_0, y_1, y_2, y_3 odgovarajuće približne vrijednosti rješenja. Tako da je ustvari dato $y''(x_n) + 2y'(x_n) \approx \frac{1}{h^2}\Big((1-h)y_{n-1} - 2y_n + (1+h)y_{n+1}\Big)$, što će biti upotrebljeno kada je $n = 1$ i $n = 2$.

Iz $y(0) = 1$ slijedi $y_0 = 1$, iz $y'(1) = 1$ slijedi $\frac{y_3 - y_2}{h} = 1 \quad y_3 - y_2 = \frac{1}{3} \quad y_3 = y_2 + \frac{1}{3}$, iz $y'' + 2y' = x$ $(0 < x < 1)$ slijedi

$$x = \frac{1}{3}: \qquad \frac{2}{3}y_0 - 2y_1 + \frac{4}{3}y_2 = \frac{1}{27}, \qquad -2y_1 + \frac{4}{3}y_2 = -\frac{17}{27} \qquad -6y_1 + 4y_2 = -\frac{17}{9},$$

$$x = \frac{2}{3}: \qquad \frac{2}{3}y_1 - 2y_2 + \frac{4}{3}y_3 = \frac{2}{27}, \qquad 2y_1 - 6y_2 + 4y_3 = \frac{2}{9} \qquad 2y_1 - 2y_2 = -\frac{10}{9}.$$

Odgovor $\quad y_0 = 1,\ \ y_1 = \dfrac{37}{18},\ \ y_2 = \dfrac{47}{18},\ \ y_3 = \dfrac{53}{18}.$

(Analitičko rješenje $y = -\frac{3}{8}e^{-2x+2} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + 1 + \frac{3}{8}e^2$. Tabela: tačke $x_0, \ldots, x_3$ 0 0,33333 0,66667 1, analitičko rješenje $y(x_0), \ldots, y(x_3)$ 1 2,29 2,98 3,40, numeričko rješenje $y_0, \ldots, y_3$ 1 2,06 2,61 2,94, razlike $r_0, \ldots, r_3$ 0 0,23 0,37 0,46.)

Dato je $[a,b] = [0,1]$. Praktično, u unutrašnjim tačkama x_1 i x_2, rađeno je po formulama $(*)$.

64—65 Za unutrašnje čvorove ($N - 1$ tačaka), primijenite formule $(*)$. Modeliranje graničnih uslova (dvije tačke): ako $y(a) = A \Rightarrow y_0 = A$, $y(b) = B \Rightarrow y_N = B$, u slučaju $y'(a) = A \Rightarrow \frac{1}{h}(y_1 - y_0) = A$, $y'(b) = B \Rightarrow \frac{1}{h}(y_N - y_{N-1}) = B$, slično $A_0y(a) + A_1y'(a) = A \Rightarrow A_0y_0 + A_1\frac{1}{h}(y_1 - y_0) = A$, $B_0y(b) + B_1y'(b) = B \Rightarrow B_0y_N + B_1\frac{1}{h}(y_N - y_{N-1}) = B$.