Numeričke metode (Fizika) / Numerička analiza (C smjer)
Ogledni primjeri za Prvi kolokvijum

Za Prvi kolokvijum (30 poena) oblasti: Interpolacija, Numerička integracija i Numeričke metode algebre. Dolazi jedno ili dva pitanja iz teorije i tri ili četiri zadatka. Dozvoljena je upotreba digitrona.

U nastavku:

- Pitanja iz teorije
- Odgovori na neka pitanja
- Zadaci (postavke zadataka)
- Formule i uputstva za rješavanje zadataka
- Primjeri kako bi mogao da izgleda kolokvijum

Numeričke metode / Numerička analiza
Pitanja iz teorije

$\bowtie$ Interpolacija

1. Najbolja aproksimacija pomoću prave linije $y = ax + b$ (metoda najmanjih kvadrata).

2. Dokazati postojanje i jedinstvenost Lagranžovog interpolacionog polinoma (Lagrange) – gdje se pojavljuje Vandermondeova determinanta.

3. Izvesti eksplicitni izraz za Lagranžov interpolacioni polinom – preko tzv. Lagranžovih koeficijenata $\Phi_i(x)$.

4. Ocjena greške za Lagranžov interpolacioni polinom.

5. Definicija konačnih razlika unaprijed Δy_i, $\Delta^2 y_i$, ... i kako glasi lema o njihovom prikazivanju preko y_i.

6. Kako glasi I Njutnov interpolacioni polinom sa konačnim razlikama (Newton) i kako glasi odgovarajući izraz za grešku.

7. Dokazati tvrđenje: ako je (realna) kvadratna matrica A dijagonalno dominantna onda je $\det A \neq 0$ – iz naslova o splajnu.

8. Formula za prvi izvod u čvoru, tj. tzv. jednostrana formula – iz naslova numeričko diferenciranje.

9. Kako se aproksimira $y''(x_1)$ na osnovu y_0, y_1, y_2 i kako glasi odgovarajući izraz za grešku – iz naslova numeričko diferenciranje.

10. Pojmovi greška i relativna greška približnog broja. Granice greške. Značajna i sigurna cifra.

11. Greška funkcije A i linearna ocjena za grešku funkcije L u slučaju funkcije od jedne promjenljive $y = y(x)$.

12. Neka je $x_1, x_2 \geq 0$ i $y = x_1 x_2$. Kakva relacija postoji između relativne greške proizvoda y i relativnih grešaka činilaca x_1 i x_2?

$\bowtie$ Numerička integracija

13. Kako glasi osnovna trapezna formula i kako se izvodi njen izraz za grešku.

14. Kako glasi sastavljena trapezna formula i kako se izvodi njen izraz za grešku.

15. Kako glasi osnovna Simpsonova formula i koliki je red veličine greške (po h). Kako glasi sastavljena Simpsonova formula i koliki je red veličine greške (po h).

16. U glavnim crtama o Rungeovom pravilu za praktičnu ocjenu greške u slučaju trapezne formule.

17. Kako glase Njutn–Kotesove formule (Newton–Cotes) za određeni integral $\int_a^b y(x)dx$ u slučajevima $n=3$ i $n=4$, gdje n označava broj malih intervala.

18. Navedite osnovne pojmove koji se odnose na niz Ležandrovih polinoma $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ (Legendre).

⋈ Numeričke metode algebre

19. Gaussova metoda eliminacije za sistem linearnih jednačina (kada se ne vrši izbor glavnog elementa).

20. Algoritam za Gaussovu metodu eliminacije sa izborom glavnog elementa.

21. Pojam mjere uslovljenosti matrice i jedno elementarno svojstvo.

22. Norma vektora i norma matrice u prostoru R^n. Posebno $\|\cdot\|_p$ kada je $p=1$, $p=2$, $p=\infty$.

23. Teorema o dovoljnim uslovima za konvergenciju prilikom rješavanja sistema linearnih jednačina po metodi proste iteracije ($\|B\|<1$).

24. Jakobijeva metoda (Jacobi) za sistem linearnih jednačina: numerički algoritam i teorema o dovoljnim uslovima za konvergenciju (A dijagonalno dominantna).

Numeričke metode / Numerička analiza
Odgovori na neka pitanja

⋈ Interpolacija

⋈ Numerička integracija

16 U glavnim crtama o Rungeovom pravilu za praktičnu ocjenu greške u slučaju trapezne formule.

Polazimo od poznatog izraza za grešku trapezne formule: $r = Ch^2 + O(h^4)$, $h \to 0$, gdje je $C = -\frac{1}{12}\int_a^b y''(x)dx$. Mi govorimo o određenom integralu $I = \int_a^b y(x)dx$ i koristimo obične oznake $nh = b-a$, gdje je n broj malih intervala. Možemo pisati $r \sim Ch^2$. Isto tako, $r = O(h^2)$.

Neka je $n \geq 1$. Označimo sa I_1 približnu vrijednost za I po trapeznoj formuli sa korakom $h = \frac{b-a}{n}$, $I_1 = h\left(\frac{1}{2}y(a) + \sum_{i=1}^{n-1} y(a+ih) + \frac{1}{2}y(b)\right)$, tzv. pomoćna vrijednost. Sada ćemo prepoloviti h, odnosno broj malih intervala postaće $2n$. Označimo sa I_2 približnu vrijednost za I po trapeznoj formuli sa korakom $\frac{h}{2} = \frac{b-a}{2n}$, $I_2 = \frac{h}{2}\left(\frac{1}{2}y(a) + \sum_{i=1}^{2n-1} y(a+\frac{ih}{2}) + \frac{1}{2}y(b)\right)$, numerički odgovor. Neka je $r_1 = I - I_1$, greška pomoćne vrijednosti, $r_2 = I - I_2$, greška numeričkog odgovora i želimo da procijenimo r_2.

Imamo $r_1 = I - I_1 = Ch^2 + O(h^4)$ i $r_2 = I - I_2 = \frac{1}{4}Ch^2 + O(h^4)$. Oduzimanjem $I_2 - I_1 = \frac{3}{4}Ch^2 + O(h^4)$ i zatim $\frac{1}{3}(I_2 - I_1) = \frac{1}{4}Ch^2 + O(h^4)$. Ako $C \neq 0$ onda $\lim_{h\to 0} \frac{r_2}{\frac{1}{3}(I_2-I_1)} = 1$, odnosno $r_2 \sim \frac{1}{3}(I_2 - I_1)$ kad $h \to 0$ i zato $r_2 \approx \frac{1}{3}(I_2 - I_1)$ za male h, čime smo našli željenu procjenu.

Za Rungeovu ocjenu greške kaže se da je "praktična" zato što je efektivno ostvarljiva (njena dobra strana) i zato što je nedovoljno pouzdana (njena loša strana).

Rungeov princip za ocjenu greške može da se primijeni i na druge numeričke metode, na druge kvadraturne formule. U slučaju Simpsonove formule važi relacija $r_2 \approx \frac{1}{15}(I_2 - I_1)$, budući da je kod nje $r = O(h^4)$.

(18) Navedite osnovne pojmove koji se odnose na niz Ležandrovih polinoma $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ (Legendre).

Neka je $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ i neka važi rekurentna relacija $(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$ za $n \geq 1$. Time je definisan niz tzv. Ležandrovih polinoma $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, gdje je $P_n(x)$ polinom stepena n. Lako je izračunati da je npr. $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, $P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$, $P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^2 + \frac{3}{8}$. Kao alternativa, naši polinomi mogu da budu definisani relacijom $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$, gdje $\frac{d^n}{dx^n}$ znači n–ti izvod.

Važi relacija $\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0$ ako je $m \neq n$. Zato se kaže da je $P_m \perp P_n$ ako je $m \neq n$. Da pojasnimo, skalarni proizvod dva polinoma (dvije funkcije) označava se kao (P_m, P_n) i definiše se u razmatranom slučaju sa $(P_m, P_n) = \int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx$. Komentar: znamo da je pogodno da se neki vektor razloži po ortogonalnoj bazi, a isto tako je pogodno da se neka funkcija razlaže po elementima ortogonalnog sistema.

Zanimljivo je da jednačina $P_n(x) = 0$ ima n rješenja i da sva rješenja pripadaju intervalu $-1 < x < 1$.

Po Gaussovoj kvadraturnoj formuli, kao aproksimacija za određeni integral $\int_{-1}^{1} y(x)dx$ služi veličina $I = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$, gdje je uvedena oznaka $y_i = y(x_i)$. Zanimljivo je da su čvorovi kvadraturne formule x_i rješenja jednačine $P_n(x) = 0$, dok se njeni koeficijenti c_i dobijaju po tzv. metodi neodređenih koeficijenata.

$\bowtie$ Numeričke metode algebre

(22) Norma vektora i norma matrice u prostoru R^n. Posebno $\|\cdot\|_p$ kada je $p = 1$, $p = 2$, $p = \infty$.

U skupu R^n, norma vektora x u oznaci $\|x\|$ može da bude uvedena na razne načine; neka $\|x\|$ označava jednu moguću normu za koju smo se opredijelili. Znamo da važi $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, nejednakost trougla. Neka je $A \in R^{n\times n}$ kvadratna matrica oblika $n \times n$ ili neka je A: $R^n \to R^n$ linearni operator u prostoru R^n. Neka $\|A\|$ označava normu linearnog operatora A koja je saglasna sa uvedenom normom vektora (koja odgovara uvedenoj normi vektora), a definiše se relacijom $\|A\| = \sup_{x\neq 0} \|Ax\|/\|x\|$; tzv. indukovana norma. Vidimo da važi nejednakost $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$. Označimo jediničnu matricu kao $I \in R^{n\times n}$; važi $\|I\| = 1$. Ako $A \in R^{n\times n}$ i $B \in R^{n\times n}$ onda važi $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ i $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Tri norme u prostoru R^n koje se često koriste označavaju se kao $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ i $\|\ \|_\infty$ a definišu se sa

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \quad \text{i} \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|,$$

gdje je $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$. Znamo da su prva i druga norma specijalni slučajevi norme $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}$, gdje je $p \geq 1$. Isto tako znamo da važi $\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Razmotrimo matricu $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n} \in R^{n\times n}$. Relacija $\|A\| = \sup_{x\neq 0}\|Ax\|/\|x\|$ definiše normu matrice A koja je indukovana normom vektora $x \in R^n$ u istoj oznaci $\|x\|$. Za tri uobičajene norme u R^n imamo sljedeće eksplicitne izraze za odgovarajuće norme matrice:

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right), \quad \|A\|_2 = \sqrt{\max_{1\leq i\leq n}\lambda_i(A^TA)} \quad \text{i} \quad \|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right);$$

trebalo bi ovo dokazati; A^T je transponovana matrica matrice A, a $\lambda_i(A^TA)$ su svojstvene vrijednosti matrice A^TA. Ako je matrica A simetrična ($A = A^T$) onda važi $\|A\|_2 = \max_{1\leq i\leq n}|\lambda_i(A)|$, gdje su sa $\lambda_i(A)$ označene svojstvene vrijednosti matrice A.

23 Teorema o dovoljnim uslovima za konvergenciju prilikom rješavanja sistema linearnih jednačina po metodi proste iteracije ($\|B\| < 1$).

Sljedeća teorema predstavlja ustvari Banahovu teoremu o mepokretnoj tački u slučaju preslikavanja φ koje djeluje u prostoru R^n i koje je afino: $\varphi(x) = Bx + c$. Fiksirajmo u R^n jednu normu $\|\ \ \|$ i sa $\|B\|$ označimo naravno saglasnu normu matrice B.

Teorema o dovoljnim uslovima za konvergenciju metode proste iteracije. Ako je $\|B\| < 1$ onda: a) sistem $x = Bx + c$ ima jedinstveno rješenje x, b) iterativni niz $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ za $k = 0, 1, 2, \ldots$ konvergira ka x za bilo koju početnu aproksimaciju $x^{(0)} \in R^n$ i c) postoje konstante $\gamma > 0$ i $0 < q < 1$ takve da je $\|x^{(k)} - x\| \leq \gamma q^k$ za svako $k \geq 0$.

Dokaz teoreme. Po uslovu $\|B\| < 1$ i po Banahovoj lemi iz prethodnog naslova slijedi da je matrica $I - B$ invertibilna. Znači da sistem $(I - B)x = c$ ima jedinstveno rješenje, čime je a) dokazano. Uvedimo oznaku $r^{(k)}$ za grešku k–te aproksimacije tj. stavimo $r^{(k)} = x - x^{(k)}$. Imamo redom:

$$x = Bx + c \ \text{ i } \ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c \quad\Rightarrow\quad x - x^{(k+1)} = Bx - Bx^{(k)}, \ \ r^{(k+1)} = Br^{(k)}$$

$$r^{(1)} = Br^{(0)}, \ \ r^{(2)} = Br^{(1)}, \ \ \ldots \quad\Rightarrow\quad r^{(k)} = B^k r^{(0)}$$

$$\|r^{(k)}\| = \|B^k r^{(0)}\| \leq \|B^k\|\cdot\|r^{(0)}\| \leq \|B\|^k\cdot\|r^{(0)}\|, \quad \lim_{k\to\infty} r^{(k)} = 0$$

Dakle, dobili smo da je $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$, čime je dokazano b). Vidimo da je i c) već dokazano, sa $\gamma = \|r^{(0)}\| = \|x - x^{(0)}\|$ i $q = \|B\| < 1$. Teorema je dokazana.

Analiza teoreme. Može se desiti da je po nekoj normi $\|B\| < 1$ a po nekoj drugoj normi da nije $\|B\| < 1$. Dovoljno je da po jednoj normi bude $\|B\| < 1$, da bi iterativni niz konvergirao ka rješenju.

Ako je $\|B\| \leq q$ i $\varphi(x) = Bx + c$ onda očito $\|\varphi(y) - \varphi(x)\| = \|By + c - Bx - c\| = \|B(y - x)\| \leq \|B\|\cdot\|y - x\| \leq q\|y - x\|$. Znači, φ je kontrakcija ako je $q < 1$.

Umjesto Banahova teorema o nepokretnoj tački (Banach) kaže se i Banahova teorema o fiksnoj tački. Isto tako, kaže se i princip kontrakcije.

Numeričke metode / Numerička analiza
Zadaci (postavke zadataka)

⋈ Interpolacija

1. a) Traži se približna vrijednost broja $\sin 0{,}1$. U tom cilju, napišite Maclaurinov polinom trećeg stepena $p_3(x)$ za funkciju $y = \sin x$ i izračunajte $p_3(0{,}1)$. b) $\cos 0{,}2$ $p_4(x)$ $y = \cos x$ c) $e^{0{,}2}$ $p_2(x)$ $y = e^x$ d) $\ln 1{,}2$ $p_3(x)$ $y = \ln(1+x)$ e) $1/1{,}2$ $p_4(x)$ $y = 1/(1+x)$ f) $\sqrt{1{,}2}$ $p_2(x)$ $y = \sqrt{1+x}$.

2. Razmotrimo sljedeću tabelu podataka

x	0	1	2
y	-1	1	3

Napišite sistem linearnih jednačina za određivanje koeficijenata odgovarajućeg interpolacionog polinoma $p(x)$. Riješite sistem jednačina i napišite kako glasi interpolacioni polinom.

3. Razmotrimo sljedeću tabelu podataka

x	-1	0	1	2
y	0	0	1	3

Odredite polinom $p(x)$ stepena 3 (ili manje) koji interpolira vrijednosti date u tabeli.

4. Napišite izraz za kvadratne polinome koji za $x = -1$ i $x = 1$ uzimaju vrijednost $y = 1$.

5. a) Aproksimirati $\log 4$ posredstvom linearne interpolacije na osnovu podataka $\log 3 = 0{,}4771$, $\log 5 = 0{,}6990$. b) Aproksimirati $\log 4$ posredstvom paraboličke (kvadratne) interpolacije na osnovu vrijednosti od maloprije i još $\log 4{,}5 = 0{,}6532$.

6. Data je tabela

x	-2	-1	0	1
y	1	4	11	16

a treba izračunati približnu vrijednost za $y(2)$ primjenom aparata interpolacije.

7. Da li se interpolacioni polinom $p(x)$ koji odgovara tabeli

x	0	1	2
y	1	-2	-3

poklapa sa interpolacionim polinomom $q(x)$ koji odgovara tabeli

x	-1	0	1	2
y	6	1	-2	-3

?

8. Razmotrimo sljedeću tabelu podataka

x	1	2	3	5	6
y	4,75	4	5,25	19,75	36

Izračunajte približnu vrijednost za $y(3{,}5)$ preko interpolacionog polinoma drugog stepena, uzimajući u obzir tri najbliža čvora.

9. Na osnovu raspoloživih podataka

x	1	2	4	6
f	0	2	12	32

treba izračunati približnu vrijednost za $f(3)$ primjenom kvadratne interpolacije, uzimajući u obzir tri najbliže tačke.

10. Razmotrimo vrijednosti

x	0	1
y	1	2
y'	1	-1

Formirati sistem linearnih jednačina za određivanje koeficijenata polinoma stepena 3 (ili manje) koji interpolira vrijednosti iz tabele. Riješiti sistem jednačina i napisati izraz za polinom.

11. Izračunati interpolacioni polinom $H(x)$ (Hermite) za tabelu

x	0	1
y	1	3
y'	0	-1

i izračunati $H(0{,}5)$ – služi kao približna vrijednost za $y(0{,}5)$.

12. Razmotrimo poziciju (u metrima) materijalne tačke i njenu brzinu (u m/s) u trenucima $t = 4s$ i $t = 5s$:

t	4	5
$e(t)$	40	65
$v(t)$	1	-1

Treba procijeniti $e(4{,}5)$ – njenu poziciju kada je $t = 4{,}5s$.

13. Neka je $x = x(t)$ pozicija mobilnog objekta u trenutku t. Razmotrimo sljedeće podatke

t (s)	2	3	4	5	6
x (m)	8	34	67	115	146

Treba modelirati poziciju u obliku

$x(t) = \begin{cases} p(t), & 2 \le t \le 4 \\ q(t), & 4 \le t \le 6 \end{cases}$ gdje su $p(t)$ i $q(t)$ kvadratni polinomi.

14. Izračunati interpolacioni polinom $p(x)$ (Lagrange) funkcije $f(x) = 1/x$ ako mrežu čine čvorovi $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

15. Na osnovu prikazane tabele vrijednosti funkcije, napisati tabelu njenih konačnih razlika prvog, drugog i trećeg reda Δy, $\Delta^2 y$ i $\Delta^3 y$.

x	y
0	-5
1	1
2	9
3	25
4	55
5	105

16. Po metodi najmanjih kvadrata, procijeniti vrijednost funkcije kada je $x = 3$, ako je data tabela njenih vrijednosti:

x	0	1	2	5
y	2	3	5	5

(linearna aproksimacija $y = ax + b$, fitovanje).

17. Data je tabela vrijednosti funkcije $y = \sqrt{x}$:

x	y
1	1
1,1	1,0488
1,2	1,0954
1,3	1,1402
1,4	1,1832
1,5	1,2247

a) Formirati tabelu konačnih razlika prvog reda Δy i drugog reda $\Delta^2 y$. b) Koristeći kvadratni interpolacioni polinom u Newtonovom obliku, izvršiti procjenu vrijednosti $\sqrt{1{,}05}$.

18. a) Primjenom linearne interpolacije, procijeniti vrijednost funkcije $y = 1/x$ u tački $x = 1{,}75$ kada su date vrijednosti funkcije kako slijedi:

x	1	2
y	1	0,5

b) Procijeniti grešku mumeričkog odgovora od maloprije – pomoću formule za ocjenu greăke interpolacije.

19. a) Zaokružiti broj 22,548 na dvije decimale; zaokružiti ga na jednu decimalu. b) Neka je tačna vrijednost nekog broja $x = 198$ i neka raspolažemo sa njenom približnom vrijednošću $x^* = 200$. Kolika je apsolutna greška date približne vrijednosti; kolika je njena relativna greška? c) Znamo da je $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$. Neka kao prib;ižna vrijednost za $x = \sqrt{2}$ služi $x^* = 1{,}4$. Naći granicu apsolutne greške (naći neku ocjenu sa gornje strane za $|x - x^*|$); naći granicu relativne greške (naći neku ocjenu sa gornje strane za $|x - x^*|/|x^*|$). d) Data je približna vrijednost $x^* = 23{,}5611$. Znamo da za njenu apsolutnu grešku $\Delta = x - x^*$ važi ocjena $|\Delta| \le 0{,}002$. Koliko sigurnih cifara u užem smislu ima x^*?

20. Neka je $x_1 = 9 \pm 0{,}02$, $x_2 = 7 \pm 0{,}01$. Neka je $y = 4x_1 + 2x_2$. Uzmimo da $y^* = 50$ služi kao približna vrijednost za y. Naći granicu greške (naći neku ocjenu sa gornje strane za $|y - y^*|$) i naći granicu relativne greške (naći neku ocjenu sa gornje strane za $|y - y^*|/|y^*|$).

21. Numeričko diferenciranje, prvi izvod. Razmotrimo sljedeću tabelu vrijednosti funkcije $y = \sqrt{x}$:

x	y
1	1
1,1	1,0488
1,2	1,0954

u smislu

x	y
x_0	y_0
x_1	y_1
x_2	y_2

a) Na osnovu datih podataka, treba naći približnu vrijednost izvoda y' u tački $x = 1$. Uputstvo: $y'(x) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2}\Delta^2 y_0\right)$, gdje je $t = \frac{x-x_0}{h}$. b) Naći približnu vrijednost za $y'(1{,}05)$. c) Procijeniti $y'(1{,}1)$.

22. Numeričko diferenciranje, drugi izvod u sredini. Razmotrimo tablicu vrijednosti funkcije $y = \sqrt{x}$ sa korakom $h = 0{,}1$:

x	1	1,1	1,2
y	1	1,0488	1,0954

Na osnovu datih podataka, procijeniti $y''(1{,}1)$. Uputstvo: poznata je formula $y''(x_1) \approx \frac{1}{h^2}(y_2 - 2y_1 + y_0)$.

23. Neka su o funkciji $y = y(x)$ dati podaci

x	0	1	2
y	2	3	5

Naći najbolju aproksimaciju oblika $y = ax + b$ (po metodi najmanjih kvadrata). Uputstvo:

$$\begin{bmatrix} (x,x) & (x,1) \\ (x,1) & (1,1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y,x) \\ (y,1) \end{bmatrix}$$

24. Neka su o funkciji $y = y(x)$ dati podaci

x	0	1	2
y	2	3	6

Naći najbolju aproksimaciju oblika $y = ax + b$ (po metodi najmanjih kvadrata).

$\bowtie$ Numerička integracija

25. Razmotrimo integral $\int_1^2 \ln x dx$. Izračunati njegovu približnu vrijednost primjenom osnovne trapezne formule. Takođe, izračunati i grešku numeričkog odgovora, jednostavnim oduzimanjem tačne i približne vrijednosti. Pomoću kalkulatora $\ln 2 = 0{,}693$.

26. Razmotrimo integral $\int_1^2 \ln x dx$. Izračunati njegovu približnu vrijednost primjenom osnovne Simpsonove formule. Takođe, izračunati i grešku numeričkog odgovora, jednostavnim oduzimanjem tačne i približne vrijednosti. Pomoću kalkulatora $\ln 1{,}5 = 0{,}405$, $\ln 2 = 0{,}693$.

27. Razmotrimo integral $\int_1^2 x \ln x dx$. Izračunati njegovu približnu vrijednost primjenom trapezne formule sa $n = 4$. To znači da ima n malih intervala, odnosno $n + 1$ čvorova. Takođe, izračunati i grešku numeričkog odgovora, jednostavnim oduzimanjem tačne i približne vrijednosti. Kalkulator $\ln 1{,}25 = 0{,}223$, $\ln 1{,}5 = 0{,}405$, $\ln 1{,}75 = 0{,}560$, $\ln 2 = 0{,}693$.

Korisno je da se potrebne vrijednosti podintegralne funkcije prikažu u obliku tabele:

x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
y	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4

28. Razmotrimo integral $\int_1^2 x \ln x dx$. Izračunati njegovu približnu vrijednost primjenom Simpsonove formule sa $n = 4$. To znači da ima $n + 1$ čvorova. Takođe, izračunati i grešku numeričkog odgovora, jednostavnim oduzimanjem tačne i približne vrijednosti. Kalkulator $\ln 1{,}25 = 0{,}223$, $\ln 1{,}5 = 0{,}405$, $\ln 1{,}75 = 0{,}560$, $\ln 2 = 0{,}693$.

Korisno je da se potrebne vrijednosti podintegralne funkcije prikažu u obliku tabele:

x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
y	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4

Treba računati na tri decimale.

29. Ekstrapolacija po Richardsonu za $\int_a^b y(x)dx$. Razmotrimo integral $\int_1^2 x^2 \ln x dx$. Neka je I_1 njegova približna vrijednost dobijena primjenom trapezne formule sa recimo $n = 4$; broj malih intervala. Neka je I_2 približna vrijednost dobijena opet primjenom trapezne formule,

ovog puta sa $n = 8$; broj malih intervala je udvostručen. Tada se lako može dobiti približna vrijednost u oznaci I čija je greška znatno manja, upravo $I = I_2 + \frac{1}{3}(I_2 - I_1)$ ili svejedno $I = \frac{4}{3}I_2 - \frac{1}{3}I_1$. U tom slučaju, kažemo da je broj I nastao popravljanjem broja I_2. Isto tako, kažemo da je izvršena ekstrapolacija po Ričardsonu.

Izračunati I_1, I_2, I. Jasno, I predstavlja numerički odgovor.

30. Neka je $y(x) = 1/x$ i razmotrimo integral $\int_1^2 \frac{dx}{x}$. Treba izračunati njegovu približnu vrijednost primjenom Newton–Cotesove kvadraturne formule sa $n = 3$. To znači da ima n malih intervala, odnosno $n+1$ čvorova. Takođe, treba izračunati i grešku numeričkog odgovora, jednostavnim oduzimanjem tačne i približne vrijednosti.

Korisno je da se potrebne vrijednosti funkcije prikažu u obliku tabele:

x	x_0	x_1	x_2	x_3
y	y_0	y_1	y_2	y_3

znači

x	1	1,333	1,667	2
y	1	0,75	0,6	0,5

31. Razmotrimo kvadraturnu formulu $\int_0^1 f(x)dx \approx F(f)$ gdje je $F(f) = \alpha_1 f(a) + \alpha_2 f(1)$. Odredite α_1, α_2 i a tako da kvadraturna formula ima najveći mogući stepen preciznosti.

32. Razmotrimo integral $\int_1^2 x^2 \ln x dx$. Izračunati njegovu približnu vrijednost u oznaci I primjenom trapezne formule sa $n = 4$. To znači da ima n malih intervala. Takođe, izračunati i ocjenu greške numeričkog odgovora I, primjenom formule za ocjenu greške u slučaju trapezne formule.

33. Ležandrovi polinomi $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ (Legendre). Neka je $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}((2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x))$. a) Napišite eksplicitne izraze za $P_n(x)$ kada je $n = 2, 3, 4$. b) Riješite jednačinu $P_n(x) = 0$ kada je $n = 2, 3, 4$. Time se uvjeravamo da sva rješenja pripadaju intervalu $-1 < x < 1$. c) Neposrednim računanjem integrala, dokažite da važi relacija $\int_{-1}^1 P_2(x)P_3(x)dx = 0$. Ta relacija se drukčije zapisuje kao $(P_2, P_3) = 0$; skalarni proizvod. Zato se kaže $P_2 \perp P_3$; "ortogonalno na".

34. Izračunati približnu vrijednost određenog integrala $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$ primjenom Gaussove kvadraturne formule sa $n = 2$ (broj čvorova). Takođe, izračunati i tačnu vrijednost razmatranog integrala.

35. Izračunati približnu vrijednost određenog integrala $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$ primjenom Gaussove kvadraturne formule sa $n = 3$ (broj čvorova). Takođe, izračunati i tačnu vrijednost razmatranog integrala.

36. Polinomi Čebiševa $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Neka je

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

a) Napišite eksplicitne izraze za $T_n(x)$ kada je $n = 2, 3, 4$. b) Riješite jednačinu $T_n(x) = 0$ kada je $n = 2, 3, 4$. Time se uvjeravamo da sva rješenja razmatrane jednačine pripadaju intervalu $-1 < x < 1$.

$\bowtie$ Numeričke metode algebre

37. Inverzna matrica. Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Naći njenu inverznu matricu A^{-1}.

38. Norma vektora. a) Dat je vektor $x = (-2, -3, 6)$. Izračunati $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ i $\|x\|_\infty$. Za normu vektora $\|x\|_2$ kaže se da je Euklidova norma. b) Izračunati $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ i $\|x\|_\infty$, ako je $x = (5, 10, -1, -1)$.

39. Norma matrice. a) Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Izračunati $\|A\|_1$ i $\|A\|_\infty$. b) Izračunati $\|A\|_1$ i $\|A\|_\infty$, ako je $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 10 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

40. Kondicija matrice (mjera uslovljenosti matrice). Dato je $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$. Izračunajte cond$(A)$ po normi $\|\cdot\|_\infty$.

41. Svojstvene vrijednosti (sopstvene vrijednosti) matrice. Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Naći njene svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2.

42. Svojstveni vektori (sopstveni vektori) matrice. Razmotrimo matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ i njene svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 3$. Izračunajte odgovarajuće svojstvene vektore e_1 i e_2. Treba $Ae_i = \lambda_i e_i$, $e_i \neq (0,0)$, $i = 1,2$.

Znamo da ulogu vektora e_i može da preuzme vektor ce_i $(c \neq 0)$.

43. Razlaganje vektora po bazi $\{e_1, e_2\}$. Razmotrimo matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ i njene svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = -1$ kojoj odgovara svojstveni vektor $e_1 = (-1,1)$ i $\lambda_2 = 3$ kojoj odgovara svojstveni vektor $e_2 = (1,1)$. Dat je vektor $v = (1,9)$. Odredite brojeve $c_1, c_2 \in R$ takve da važi relacija $v = c_1e_1 + c_2e_2$; razlaganje.

Iz opšte teorije znamo da su koeficijenti razlaganja c_i (jednog fiksiranog vektora v) uvijek jednoznačno određeni.

44. Metoda proste iteracije za sistem linearnih jednačina oblika $x = Bx + c$. Dato je

$$B = \begin{bmatrix} 0{,}4 & -0{,}4 \\ 0{,}7 & -0{,}2 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i neka je $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ za $k \geq 0$. Na ovaj način definisan je niz vektora $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ čiji elementi pripadaju prostoru R^2. Dokazati da niz konvergira i odrediti $X = \lim_{k\to\infty} x^{(k)}$.

Uputstvo. Dovoljan uslov za konvergenciju niza glasi $\|B\| < 1$, u bar jednoj normi. Možda je $\|B\|_\infty < 1$. Ako niz konvergira onda važi jednakost $X = BX + c$.

45. Metoda proste iteracije za rješavanje sistema linearnih jednačina oblika $x = Bx + c$. Neka je

$$B = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & -0{,}6 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

i stavimo $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ za $k \geq 0$. Na ovaj način definisan je niz vektora $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ čiji elementi pripadaju prostoru R^2. Dokazati da niz konvergira i odrediti $X = \lim_{k\to\infty} x^{(k)}$.

Uputstvo. Neophodan i dovoljan uslov za konvergenciju niza glasi: za svako i, $|\lambda_i(B)| < 1$. Sa $\lambda_i(B)$ označili smo svojstvene vrijednosti matrice B.

46. Jakobijeva metoda (Jacobi). Razmotrimo sistem linearnih jednačina $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases}$ (ili $Ax = b$). a) Konstruisati iterativni proces oblika $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$, $k \geq 0$, za dobijanje približne vrijednosti tačnog rješenja sistema $x = (x_1, x_2)$, po Jakobijevoj metodi. b) Dokazati da maločas konstruisani iterativni proces konvergira ka x, tj. $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$, gdje je $x^{(k)} =$

$(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$. c) Izaberimo $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = (1,1)$ kao početnu aproksimaciju. Izračunati $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}$.

47. Jakobijeva metoda (Jacobi). Razmotrimo sistem linearnih jednačina

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

(ili $Ax = b$). a) Konstruisati iterativni proces oblika $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$, $k \geq 0$, za dobijanje približne vrijednosti tačnog rješenja sistema, po Jakobijevoj metodi. b) Dokazati da maločas konstruisani iterativni niz konvergira ka $x = (x_1, x_2, x_3)$, konvergira ka tačnom rješenju sistema. c) Izaberimo $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (1,1,1)$ kao početnu aproksimaciju. Izračunati aproksimacije $x^{(1)}, x^{(2)}$.

48. Metoda skalarnog proizvoda ili svejedno metoda stepena, engl. power method. Razmotrimo matricu $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Želimo da po metodi skalarnog proizvoda približno odredimo njenu dominantnu svojstvenu vrijednost λ. U tom cilju, izaberite proizvoljno početni vektor $v^{(0)} \neq (0,0)$. Treba izračunati prve dvije aproksimacije μ_1, μ_2. Tako da μ_2 predstavlja odgovor.

Numeričke metode / Numerička analiza
Formule i uputstva za rješavanje zadataka

⋈ Interpolacija

1 a) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$, $x \in R$; $p_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$

b) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$, $x \in R$; $p_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

c) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$, $x \in R$; $p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

d) $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$, $-1 < x \leq 1$; $p_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

e) $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \ldots$, $-1 < x < 1$; $p_4(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$

f) $\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \ldots$, $-1 < x < 1$; $p_2(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$.

2 Dato je

x	x_0	x_1	x_2
y	y_0	y_1	y_2

Polazimo od $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, gdje treba odrediti a_0, a_1, a_2. Mi pišemo $p(x_0) = y_0$, $p(x_1) = y_1$, $p(x_2) = y_2$.

3 Dato je

x	x_0	x_1	x_2	x_3
y	y_0	y_1	y_2	y_3

Lagrangeov interpolacioni polinom glasi $p(x) = \ell_0(x)y_0 + \ldots + \ell_3(x)y_3$, gdje su $\ell_0(x), \ldots, \ell_3(x)$ tzv. Lagrangeovi koeficijenti:

$\ell_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$, $\ell_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$, $\ell_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$, $\ell_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$.

4 Polazimo od opšteg oblika $y(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ gdje $a_0, a_1, a_2 \in R$. Postavljena su dva uslova $y(-1) = 1$, $y(1) = 1$.

5 a) Na osnovu podataka

x	x_0	x_1
y	y_0	y_1

može se vršiti linearna interpolacija. U tabeli su date vrijednosti funkcije $y = y(x)$. Uvedimo oznaku $h = x_1 - x_0$. Dalje, neka $x \in R$ i neka se traži približna vrijednost za $y(x)$. Uvedimo smjenu $t = \frac{x-x_0}{h}$. Numerički odgovor glasi $y(x) \approx p_1(x)$ gdje je $p_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$ ili svejedno $p_1(x) = p_1(x_0+ht) = (1-t)y_0 + ty_1$.

Dakle, treba izračunati $p_1(x)$.

b) Na osnovu podataka

x	x_0	x_1	x_2
y	y_0	y_1	y_2

može se vršiti kvadratna interpolacija. Lagrangeov interpolacioni polinom. Kao približna vrijednost za broj $y(x)$ služi
$p_2(x) = \ell_0(x)y_0 + \ell_1(x)y_1 + \ell_2(x)y_2 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$.

6 Dato je

x	x_0	x_1	x_2	x_3
y	y_0	y_1	y_2	y_3

Budući da je mreža ekvidistantna, $h = 1$, može se koristiti I Newtonov interpolacioni polinom $p_3(x)$, trećeg stepena. Dato je $x = 2$. Uvedimo smjenu nezavisno promjenljive kao $x = x_0 + ht$, tako da treba $t = 4$.

Treba izračunati brojnu vrijednost $p_3(x)$ i to predstavlja odgovor.

Ako računamo preko promjenljive x onda

$$p_3(x) = y_0 + \frac{1}{h}(x-x_0)\Delta y_0 + \frac{1}{2h^2}(x-x_0)(x-x_1)\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3!h^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\Delta^3 y_0.$$

A ako računamo preko promjenljive t (svejedno) onda

$$p_3(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{1}{2}t(t-1)\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3!}t(t-1)(t-2)\Delta^3 y_0.$$

7 Prva tabela ima oblik

x	x_0	x_1	x_2
y	y_0	y_1	y_2

Ako se prvi polinom $p(x)$ računa preko I Newtonove interpolacione formule onda imamo

$$p(x) = y_0 + \frac{1}{h}(x-x_0)\Delta y_0 + \frac{1}{2h^2}(x-x_0)(x-x_1)\Delta^2 y_0.$$

8 Biraju se čvorovi koji su najbliži tački $x = 3{,}5$ za koju se interpolacija vrši. Stepen interpolacionog polinoma je za jedan manji od broja čvorova.

9 Samo tri čvora ulaze u račun, to su čvorovi koji su najbliži tački $x = 3$. Kod interpolacije, stepen polinoma je za jedan manji od broja čvorova.

10 Vidimo da je riječ o interpolaciji sa višestrukim čvorovima. Data su dva čvora $x_0 = 0$ i $x_1 = 1$. Dato je $y(0) = 1$, $y(1) = 2$, $y'(0) = 1$, $y'(1) = -1$, oba čvora su dvostruki. Za aproksimaciju funkcije $y = y(x)$ služiće polinom trećeg stepena $p_3 = p_3(x)$, budući da je ukupan broj datih uslova 4.

Opšti izraz za polinom trećeg stepena $p_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, gdje treba odrediti $a_0, \ldots, a_3$.

Imamo $p_3'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$. Uslovi $p_3(0) = 1$, $p_3(1) = 2$, $p_3'(0) = 1$, $p_3'(1) = -1$ daju sistem od 4 linearne jednačine po nepoznatim $a_0, \ldots, a_3$. Treba riješiti sistem i dati odgovor "$p_3(x) = \ldots$".

11 $H(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, gdje se pojavljuju 4 neodređene veličine a_i. Zatim $H'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$. Dalje $H(x_0) = y_0$, $H(x_1) = y_1$, $H'(x_0) = y_0'$, $H'(x_1) = y_1'$. Treba riješiti linearni sistem oblika 4×4. Odgovor ima oblik "$H(x) = \ldots$". Osim toga, treba izračunati $H(0{,}5)$ za drugi dio odgovora.

12 Hermite, dva dvostruka čvora, $H(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Na kraju, izračunati $H(4{,}5)$, predstavlja aproksimaciju za $e(4{,}5)$, predstavlja numerički odgovor.

(13) Vidimo da se $x = x(t)$ aproksimira pomoću dio–po–dio polinoma drugog stepena. Za $p(t)$ služe čvorovi $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$. Za $q(t)$ služe čvorovi $x = 4$, $x = 5$, $x = 6$.

(14)

x	1	2	3
f	1	1/2	1/3

(15) Ako raspolažemo sa $y_0, \ldots, y_n$ onda važi $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ $(0 \le i \le n-1)$, $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ $(0 \le i \le n-2)$, $\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i$ $(0 \le i \le n-3)$. U našem zadatku je $n = 5$.

Dato je

x	y
x_0	y_0
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
x_4	y_4
x_5	y_5

Odgovor treba prikazati u ob;iku

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$	
x_4	y_4	Δy_4		
x_5	y_5			

(16) Treba formirati i riješiti linearni sistem po nepoznatim a i b:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) b = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) a + nb = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

gdje raspoloživi podaci imaju oblik (u zadatku je $n = 4$):

x	x_1	x_2	x_3	x_4
y	y_1	y_2	y_3	y_4

(17) a) Očito $x_0 = 1, \ldots, x_5 = 1{,}5$. Imamo redom $\Delta y_0 = y_1 - y_0, \ldots, \Delta y_4 = y_5 - y_4$; $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \ldots, \Delta^2 y_3 = \Delta y_4 - \Delta y_3$.

b) Očito $h = 0{,}1$. Treba staviti $x = 1{,}05$ i treba izračunati

$$p_2(x) = y_0 + \frac{1}{h}(x - x_0) + \frac{1}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1)\Delta^2 y_0.$$

Odgovor ima oblik $y(1{,}05) \approx p_2(1{,}05)$.

(18) a) Tabela ima oblik

x	x_0	x_1
y	y_0	y_1

jasno $h = x_1 - x_0$. Približna vrijednost je jednaka $p_1(x) = (1-t)y_0 + ty_1$ gdje je $t = \frac{x - x_0}{h}$, u postavci je dato x.

b) Formula za ocjenu greške u slučaju linearne interpolacije glasi

$$|y(x) - p_1(x)| \le \frac{1}{2!}|(x - x_0)(x - x_1)| \cdot M_2,$$

gdje je $M_2 = \max_{x \in [a,b]} |y''(x)|$. Imamo $a = x_0$, $b = x_1$. Sada $y = 1/x$, $y' = -1/x^2$. Treba y'', M_2, $\frac{1}{2}M_2|(x - x_0)(x - x_1)|$.

(19) a) Ako se odbacuje tačno 5 onda posljednju sačuvanu decimalu treba zaokružiti na najbližu parnu cifru (manju ili veću od nje).

b) Greška ili svejedno apsolutna greška definiše se kao $x - x^*$, a relativna greška kao $\frac{x - x^*}{|x^*|}$, po pravilu.

c) Granice $|x - x^*| \le A$ i $\frac{|x - x^*|}{|x^*|} \le R$.

d) Razmotrimo približan broj x^* i razmotrimo njegovu značajnu cifru koja se nalazi na k–toj decimali (težina pozicije je 10^{-k}). Za tu cifru kažemo da je sigurna u užem smislu ako važi relacija $|\Delta| \le \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}$. Cifri desetinki odgovara $k = 1$, cifri stotih djelova odgovara $k = 2$ i slično. Uopšte, $k \in Z$.

(20) $y = x_1 + x_1 + x_1 + x_1 + x_2 + x_2$. Greška zbira jednaka je zbiru grešaka sabiraka.

(21) a) Komentar. Ako bismo imali jedan podatak manje onda bismo $y'(x)$ procjenjivali kao $p_1'(x) = \frac{1}{h}\Delta y_0$. U našem slučaju kao $p_2'(x) = \frac{1}{h}(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2}\Delta^2 y_0)$. Ako bismo imali jednu tačku više onda bismo pisali $p_3'(x) = \frac{1}{h}(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3t^2-6t+2}{6}\Delta^3 y_0)$. Kada je $t = 0$ onda se maločas napisane formule svode na $y'(x_0) \approx \frac{1}{h}\Delta y_0$, odnosno $y'(x_0) \approx \frac{1}{h}(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0)$, odnosno $y'(x_0) \approx \frac{1}{h}(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0)$.

(22) Komentar. Važi tvrđenje $y''(x_1) = \frac{1}{h^2}(y_2 - 2y_1 + y_0) + O(h^2)$, greška je reda h^2.

(23) Ako raspoloživi podaci imaju oblik

x	x_1	$\ldots$	x_n
y	y_1	$\ldots$	y_n

onda treba formirati i riješiti sistem jednačina po nepoznatim a i b: $\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{bmatrix}$

(24) Treba formirati i riješiti sistem jednačina po nepoznatim a i b. Oznake $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $1 = (1, \ldots, 1)$.

$\bowtie$ Numerička integracija

(25) Približna vrijednost za integral $\int_a^b y(x)dx$ po osnovnoj trapeznoj formuli glasi $I = \frac{h}{2}(y(a) + y(b))$, gdje je $h = b - a$. Grešku r definišemo kao $r = \int_a^b y(x)dx - I$. Tačna vrijednost iznosi $\int_1^2 \ln x dx = (x \ln x - x)|_{x=1}^{x=2} = 2\ln 2 - 1 = 0{,}386$.

(26) Približna vrijednost određenog integrala $\int_a^b y(x)dx$ po osnovnoj Simpsonovoj formuli glasi $I = \frac{h}{3}(y(a) + 4y(\frac{a+b}{2}) + y(b))$, tj. $I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$, gdje je $h = \frac{b-a}{2}$. Grešku r definišemo kao $r = \int_a^b y(x)dx - I$. Tačna vrijednost integrala iznosi $\int_1^2 \ln x dx = (x\ln x - x)|_{x=1}^{x=2} = 2\ln 2 - 1 = 0{,}386$.

(27) Neka je $n \geq 1$. Približna vrijednost integrala $\int_a^b y(x)dx$ po trapeznoj formuli glasi $I = h(\frac{1}{2}y_0 + \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{1}{2}y_n)$ ili svejedno $I = h(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n)$, gdje je $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih = x_0 + ih$, $y_i = y(x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Greška r definiše se kao $r = \int_a^b y(x)dx - I$. Tačna vrijednost integrala iznosi $\int_1^2 x \ln x dx = \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right)\Big|_{x=1}^{x=2} = 2\ln 2 - \frac{3}{4} = 0{,}636$.

(28) Neka je n paran broj. Približna vrijednost integrala $\int_a^b y(x)dx$ po Simpsonovoj formuli glasi $I = \frac{h}{3}(y_0 + 4\sum_{i=1}^n y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_{2i} + y_n)$ ili svejedno $I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \ldots + 4y_{n-1} + y_n)$, gdje je $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih = x_0 + ih$, $y_i = y(x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Greška r definiše se kao $r = \int_a^b y(x)dx - I$. Tačna vrijednost integrala iznosi $\int_1^2 x\ln x dx = \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right)\Big|_{x=1}^{x=2} = 2\ln 2 - \frac{3}{4} = 0{,}636$.

(29) Komentar. Za broj $\frac{1}{3}(I_2 - I_1)$ kaže se da predstavlja iznos popravke. Kao alternativa, iznos popravke mogao bi da posluži kao praktična procjena greške približnog broja I_2 – v. Rungeovo pravilo za praktičnu ocjenu greške.

(30) Njutn–Kotesove formule (Newton–Cotes) izvode se tako što se izračuna integral od interpolacionog polinoma podintegralne funkcije $y = y(x)$, pri čemu je mreža čvorova ravnomjerna i dvije krajnje tačke $x = a$ i $x = b$ pripadaju mreži. Ako govorimo o integralu $\int_a^b y(x)dx$ onda u slučaju $n = 3$ imamo $h = \frac{b-a}{3}$, $x_i = a + ih = x_0 + ih$, $y_i = y(x_i)$ $(0 \leq i \leq 3)$. Tada, kao približna vrijednost integrala, kao numerički odgovor služi veličina $I = \frac{b-a}{8}(y(a) + 3y(\frac{2a+b}{3}) + 3y(\frac{a+2b}{3}) + y(b))$ ili svejedno $I = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)$. Ovo je tzv. tri–osminska formula, 3/8. Greška r definiše se kao $r = \int_a^b y(x)dx - I$. Tačna vrijednost integrala iznosi $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x|_{x=1}^{x=2} = \ln 2 = 0{,}693$.

(31) Postavljeni zadatak rješava se tzv. metodom neodređenih koeficijenata. Mi tražimo da greška bude jednaka nuli $(r = 0)$ kada je podintegralna funkcija $f = f(x)$ polinom. Konkretno,

napišite uslov $\int_0^1 f(x)dx = \alpha_1 f(a) + \alpha_2 f(1)$ u slučaju da je $f(x) = 1$. Slično, napišite uslove kada je $f(x) = x$ odnosno $f(x) = x^2$. Time se dobija sistem jednačina oblika 3×3 po nepoznatim α_1, α_2, a. Ostaje da se sistem riješi.

32 Formula za ocjenu greške u slučaju trapezne formule glasi $|r| \le \frac{b-a}{12} M_2 h^2$, gdje je $M_2 = \max_{x \in [a,b]} |y''(x)|$. Obične oznake: $r = \int_a^b y(x)dx - I$, $h = \frac{b-a}{n}$.

33 Legendre. a) Dato je $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$. Lako se izračuna $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, $P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$, $P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^2 + \frac{3}{8}$.

34 Razmotrimo funkciju $y = y(x)$ i razmotrimo integral $\int_{-1}^1 y(x)dx$. Njegova približna vrijednost glasi $I = y(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + y(\frac{1}{\sqrt{3}})$, Gauss, $n = 2$. Vidimo da kvadraturna formula ima oblik $I = c_1 y(x_1) + c_2 y(x_2)$, gdje su x_1 i x_2 rješenja jednačine $P_2(x) = 0$; Legendreov polinom drugog stepena. Tačna vrijednost integrala iznosi $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x|_{x=-1}^{x=1} = \frac{\pi}{2} = 1{,}5708$.

35 Razmotrimo funkciju $y = y(x)$ i razmotrimo integral $\int_{-1}^1 y(x)dx$. Njegova približna vrijednost glasi $I = \frac{5}{9}y(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{8}{9}y(0) + \frac{5}{9}y(\sqrt{\frac{3}{5}})$, Gauss, $n = 3$. Vidimo da kvadraturna formula ima oblik $I = c_1 y(x_1) + c_2 y(x_2) + c_3 y(x_3)$, gdje su x_1–x_3 rješenja jednačine $P_3(x) = 0$; Legendre. Tačna vrijednost integrala je $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x|_{x=-1}^{x=1} = \frac{\pi}{2} = 1{,}5708$.

36 Čebišev. a) Dato je $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$. Lako se izračuna $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$.

Samo se napominje da takođe važi relacija $T_m \perp T_n$ $(m \ne n)$, ali u jednom modifikovanom smislu.

$\bowtie$ Numeričke metode algebre

37 Neka $a_{ij} \in R$ $(1 \le i, j \le 2)$ i razmotrimo matricu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Tada je njena inverzna matrica $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$, $\det A \ne 0$, gdje je $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Važi $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, jedinična matrica $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Prema tome, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 \\ -0{,}05 & 0{,}35 \end{bmatrix}$.

38 a) Neka je $n \ge 1$, $x_i \in R$ $(1 \le i \le n)$ i razmotrimo vektor $x = (x_1, \dots, x_n)$. Tada je po definiciji $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$, $\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$; norma vektora x.

Prema tome, u slučaju $x = (-2, -3, 6)$, imamo $\|x\|_1 = 11$, $\|x\|_2 = 7$, $\|x\|_\infty = 6$.

39 a) Neka je $n \ge 1$, $a_{ij} \in R$ $(i, j = 1, \dots, n)$ i razmotrimo matricu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$. Tada je po teoremi $\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} (\sum_{i=1}^n |a_{ij}|)$, $\|A\|_2 = \dots$, $\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\right)$; norma matrice A. U specijalnom slučaju $n = 2$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, važi $\|A\|_1 = \max\{|a_{11}| + |a_{21}|, |a_{12}| + |a_{22}|\}$, $\|A\|_\infty = \max\{|a_{11}| + |a_{12}|, |a_{21}| + |a_{22}|\}$.

Prema tome, u slučaju $A = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ imamo $\|A\|_1 = 9$, $\|A\|_\infty = 14$.

b) U specijalnom slučaju $n = 3$, $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^3$, imamo $\|A\|_1 = \max\{|a_{11}| + \dots + |a_{31}|, \dots, |a_{13}| + \dots + |a_{33}|\}$, $\|A\|_\infty = \max\{|a_{11}| + \dots + |a_{13}|, \dots, |a_{31}| + \dots + |a_{33}|\}$.

40 Definicija. Neka je $n \geq 1$, neka je $A = [a_{ij}]$ realna kvadratna matrica oblika $n \times n$, takva da je $\det A \neq 0$. Pored toga, neka je $\|\cdot\|$ jedna matrična norma. Tada stavljamo $\mathrm{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$; mjera uslovljenosti matrice A.

Dakle, treba kazati koja je matrična norma izabrana. U našem zadatku, izabrana je norma sa indeksom $p = 1$.

41 Neka je $n \geq 1$ i neka je A realna kvadratna matrica oblika $n \times n$. Po teoremi, broj $\lambda \in C$ predstavlja svojstvenu vrijednost matrice A ako zadovoljava jednačinu $\det(\lambda I - A) = 0$. Sa I je označena jedinična matrica oblika $n \times n$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$.

Izrada:

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda - 1)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3,$$

$$\det(\lambda I - A) = 0, \quad \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}, \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3.$$

Odgovor: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$.

42 Definicija. Neka je $n \geq 1$ i neka je A realna kvadratna matrica oblika $n \times n$. Za broj $\lambda \in C$ kaže se da je njena svojstvena vrijednost a za vektor $e \in R^n$ ili $e \in C^n$ kaže se da je odgovarajući svojstveni vektor ako važi relacija $Ae = \lambda e$, ako važi relacija $(\lambda I - A)e = 0$ (nula–vektor), pod uslovom da je $e \neq (0, \ldots, 0)$.

Kako teče izrada. Za $\lambda_1 = -1$. Uvedimo oznaku $e_1 = (x, y)$. Treba formirati homogeni sistem linearnih jednačina $Ae_1 = \lambda_1 e_1$ po nepoznatim x, y: $x + 2y = -x$, $2x + y = -y$ Treba naći jedno netrivijalno rješenje tog sistema. To je na primjer $x = -1$, $y = 1$, tako $e_1 = (-1, 1)$.

Slično za $\lambda_2 = 3$. Uvedimo oznaku $e_2 = (x, y)$. Treba formirati homogeni sistem linearnih jednačina $Ae_2 = \lambda_2 e_2$ po nepoznatim x, y. Treba naći jedno netrivijalno rješenje tog sistema. To je na primjer $x = 1$, $y = 1$, tako $e_2 = (1, 1)$.

Odgovor: $e_1 = (-1, 1)$, $e_2 = (1, 1)$.

Zapaža se da je A simetrična kao i $\lambda_i \in R$ i $e_i \perp e_j$ $(i \neq j)$.

Napomena o oznakama. Neka je $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $v = (x, y)$. Umjesto $Av = \lambda v$ (umjesto $(\lambda I - A)v = 0$) može se svejedno pisati $\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y = \lambda x \\ a_{21}x + a_{22}y = \lambda y \end{array} \right.$.

43 Iz linearne algebre je poznata sljedeća teorema. Neka je $n \geq 1$ i neka je A realna kvadratna matrica oblika $n \times n$. Pretpostavimo da je matrica A simetrična $(a_{ij} = a_{ji})$. Neka su λ_i njene svojstvene vrijednosti i neka su e_i odgovarajući svojstveni vektori, $Ae_i = \lambda_i e_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Tada važi: $\forall i = 1, \ldots, n$ $\lambda_i \in R$; s. v. su realni brojevi. Pored toga, za svojstvene vektore $e_1, \ldots, e_n \in R^n$ važi: $e_i \perp e_j$ za $i \neq j$; "ortogonalno na"; skalarni proizvod $= 0$.

Nastavak prethodne teoreme: vektori $e_1, \ldots, e_n$ čine bazu prostora R^n.

Što se tiče našeg zadatka, on se lako rješava na osnovu oznaka uvedenih u samoj njegovoj postavci: baza $e_1 = (-1, 1)$, $e_2 = (1, 1)$, dati vektor $v = (1, 9)$, traži se njegovo razlaganje $v = c_1 e_1 + c_2 e_2$, odnosno traže se c_1 i c_2.

Mi pišemo $c_1(-1,1)+c_2(1,1)=(1,9) \Rightarrow -c_1+c_2=1,\ c_1+c_2=9 \Rightarrow c_1=4,\ c_2=5.$

$$v=4e_1+5e_2$$

(44) Izrada. Teorema o dovoljnim uslovima za konvergenciju niza $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+c$: dovoljno je da bude $\|B\|<1$. U tom slučaju, $x^{(k)}$ konvergira ka rješenju sistema $x=Bx+c$ kad $k\to\infty$.

Da izračunamo $\|B\|_\infty$. U opštem slučaju $\|B\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^n |b_{ij}|\right)$. U slučaju $n=2$: $\|B\|_\infty=\max\{|b_{11}|+|b_{12}|,|b_{21}|+|b_{22}|\}$. U našem zadatku $\|B\|_\infty=\max\{0{,}8;0{,}9\}=0{,}9$. Ispunjeno je $\|B\|_\infty<1$. Dokazali smo da niz $x^{(k)}$ konvergira kad $k\to\infty$.

Još ostaje da se izračuna rješenje sistema $x=Bx+c$:

$$\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0{,}4 & -0{,}4\\ 0{,}7 & -0{,}3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0\\ 1\end{bmatrix}\qquad \begin{array}{r} x_1=0{,}4x_1-0{,}4x_2\\ x_2=0{,}7x_1-0{,}2x_2+1\end{array}$$

$$\begin{cases} 0{,}6x_1+0{,}4x_2=0\\ -0{,}7x_1+1{,}2x_2=1\end{cases}\qquad \begin{array}{c} -2{,}5x_1=1\\ 10x_2=6\end{array}\qquad x_1=-\frac{2}{5}\quad x_2=\frac{3}{5}$$

Odgovor: $X=\left(-\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)$.

(izbor početne aproksimacije $x^{(0)}$ ne utiče na konvergenciju i na limes)

(45) Izrada. Teorema o neophodnim i dovoljnim uslovima za konvergenciju niza $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+c$ (metoda proste iteracije za rješavanje sistema linearnih jednačina oblika $x=Bx+c$): neophodno je i dovoljno da bude $|\lambda_i(B)|<1$ za $1\le i\le n$. Misli se: da bi niz konvergirao bez obzira na izbor $x^{(0)}\in R^n$.

U našem zadatku je $n=2$. Da izračunamo $\lambda_1(B)$ i $\lambda_2(B)$. U opštem slučaju, to su rješenja jednačine $\det(\lambda I-B)=0$. U našem zadatku:

$$B=\begin{bmatrix} 0{,}6 & 0.6\\ 0{,}6 & -0{,}6\end{bmatrix}\qquad \lambda I-B=\begin{bmatrix} \lambda-0{,}6 & -0{,}6\\ -0{,}6 & \lambda+0{,}6\end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I-B)=\lambda^2-0{,}36-0{,}36=\lambda^2-0{,}72$$

$$\det(\lambda I-B)=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_{1,2}=\pm\sqrt{0{,}72}$$

Ispunjeno je $|\lambda_1(B)|<1$ i $|\lambda_2(B)|<1$. Dokazali smo da niz $x^{(k)}$ konvergira kad $k\to\infty$.

Još ostaje da se izračuna rješenje sistema $x=Bx+c$:

$$\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}6\\ 0{,}6 & -0{,}6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0\\ 1\end{bmatrix}\qquad \begin{array}{r} x_1=0{,}6x_1+0{,}6x_2\\ x_2=0{,}6x_1-0{,}6x_2+1\end{array}$$

$$\begin{cases} 0{,}4x_1-0{,}6x_2=0\\ -0{,}6x_1+1{,}6x_2=1\end{cases}\qquad \begin{array}{c} 1{,}4x_1=3\\ 1{,}4x_2=2\end{array}\qquad x_1=\frac{15}{7}\quad x_2=\frac{10}{7}$$

Odgovor: $X=\left(\frac{15}{7},\frac{10}{7}\right)$.

(umjesto "metoda proste iteracije" takođe se kaže i "metoda fiksne tačke", engl. fixed point)

(46) Jacobi.

Dato je $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ ili u opštim oznakama $\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$.

a) Kako se konstruiše Jakobijev iterativni proces (iterativni niz $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots$)? Prvo, iz i–te jednačine sistema treba izraziti x_i, za $i = 1, \ldots, n$, čime se dobija

$$\begin{cases} x_1 = -(a_{12}/a_{11})x_2 - \ldots - (a_{1n}/a_{11})x_n + b_1/a_{11} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_n = -(a_{n1}/a_{nn})x_1 - \ldots - (a_{n,n-1}/a_{nn})x_{n-1} + b_n/a_{nn} \end{cases} \quad \text{ili kao } x = Bx + c \text{ gdje je}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & \ldots & -a_{1n}/a_{11} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Zatim se elementi niza (uzastopne aproksimacije) računaju redom po formuli: $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$, $k \geq 0$. U našem zadatku:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(-x_2 + 1) \\ x_2 = \frac{1}{4}(x_1 + 5) \end{cases} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 5/4 \end{bmatrix}$$

$$x = Bx + c, \quad x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(-x_2^{(k)} + 1\right) \\ x_2^{(k)} = \frac{1}{4}\left(x_1^{(k)} + 5\right) \end{cases}$$

b) Kako glasi teorema o dovoljnim uslovima za konvergenciju Jakobijeve metode? Ako je matrica A `dijagonalno dominantna` onda iterativni niz $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots$ konvergira ka rješenju sistema $Ax = b$, konvergira ka rješenju sistema $x = Bx + c$.

Šta znači da je matrica $A \in R^{n\times n}$ dijagonalno dominantna, po definiciji? To znači da za svako $i = 1, \ldots, n$ važi relacija $|a_{ii}| > \sum_{j=1\ j\neq i}^{n} |a_{ij}|$. Drukčije zapisano $|a_{ii}| > |a_{i1}| + \ldots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \ldots + |a_{in}|$.

Data matrica A jeste dijagonalno dominantna, budući da su relacije $2 > 1$ i $4 > 1$ očito tačne; u smislu $|a_{11}| > |a_{12}|$, $|a_{22}| > |a_{21}|$.

c) Elementi niza definisani su relacijom $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ za $k = 0, 1, \ldots$. Data je početna aproksimacija $x^{(0)} = (1, 1)$. Neposrednim računom $x^{(1)} = (0, \frac{3}{2})$. Na osnovu toga dobijamo sljedeću aproksimaciju $x^{(2)} = (-\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$. Slično $x^{(3)} = (-\frac{1}{8}, \frac{19}{16})$. Na kraju $x^{(4)} = (-\frac{3}{32}, \frac{39}{32})$. Drukčije zapisano

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1{,}5 \end{bmatrix} \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} -0{,}25 \\ 1{,}25 \end{bmatrix} \quad x^{(3)} = \begin{bmatrix} -0{,}12 \\ 1{,}19 \end{bmatrix} \quad x^{(4)} = \begin{bmatrix} -0{,}09 \\ 1{,}22 \end{bmatrix}$$

Tačno rješenje $x = (-\frac{1}{9}, \frac{11}{9})$.

47 a) Jacobi, $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1/8 & -1/8 \\ -2/5 & 0 & -1/5 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 4/8 \\ 3/5 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

b) Data matrica A je dijagonalno dominantna. Stvarno, istinite su relacije $8 > 2$, $5 > 3$, $4 > 2$ u smislu $|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}|$, $|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}|$, $|a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}|$.

48 Metoda skalarnog proizvoda primjenjuje se u slučaju `simetrične` matrice A.

Metoda skalarnog proizvoda služi za dobijanje približne vrijednosti `dominantne` svojstvene vrijednosti (sopstvene vrijednosti) matrice. Za svojstvenu vrijednost λ matrice A kaže se da je dominantna ako važi relacija $|\lambda| > |\lambda'|$, gdje je λ' bilo koja druga svojstvena vrijednost te matrice $A \in R^{n\times n}$ $(n \geq 1)$.

Tokom rada numeričke metode, konstruiše se niz $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ koji ima svojstvo $\lim_{k\to\infty} \mu_k = \lambda$ (pod određenim uslovima). To je `niz aproksimacija`.

Kako se računaju uzastopne aproksimacije $\mu_k \in R$? Prethodno, treba izabrati na proizvoljan način `početni vektor` $x^{(0)} \in R^n$, $x^{(0)} \neq (0, \ldots, 0)$. Proces računanja odvija se po formulama:

$$x^{(1)} = Ax^{(0)},\ \mu_1 = \frac{(x^{(1)}, x^{(0)})}{(x^{(0)}, x^{(0)})},\ \ldots,\ \ x^{(k)} = Ax^{(k-1)},\ \mu_k = \frac{(x^{(k)}, x^{(k-1)})}{(x^{(k-1)}, x^{(k-1)})},\ \ldots$$

Kao numerički odgovor, kao približna vrijednost za λ poslužiće zadnji izračunati element niza μ_k.

Skalarni proizvod u prostoru R^n: ako je $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ onda je $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$.

U našem zadatku je dato $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Izaberimo $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Realizacija algoritma:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mu_1 = \frac{3}{1} = 3 \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \mu_2 = \frac{35}{10} = 3{,}5$$

Odgovor: $\lambda \approx 3{,}5$.

Dalje bi se računalo:

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 35 \\ -20 \end{bmatrix} \quad \mu_3 = \frac{450}{125} = 3{,}6 \quad x^{(4)} = \begin{bmatrix} 125 \\ -75 \end{bmatrix} \quad \mu_4 = \frac{5875}{1625} = 3{,}615$$

Tačno rješenje iznosi $\lambda = \frac{5+\sqrt{5}}{2} = 3{,}618$ (dominantna s. v. matrice A).

Numeričke metode / Numerička analiza
Primjeri kako bi mogao da izgleda kolokvijum

`Primjer broj 1`

1. Pojmovi greška i relativna greška približnog broja. Granice greške. Značajna i sigurna cifra.

2. Traži se približna vrijednost broja $\sqrt{1{,}2}$. U tom cilju, napišite Maclaurinov polinom drugog stepena $p_2(x)$ za funkciju $y = \sqrt{1+x}$ i izračunajte $p_2(0{,}2)$.

3. Na osnovu prikazane tabele vrijednosti funkcije, napisati tabelu njenih konačnih razlika prvog, drugog i trećeg reda Δy, $\Delta^2 y$ i $\Delta^3 y$.

x	y
0	-5
1	1
2	9
3	25
4	55
5	105

4. Razmotrimo integral $\int_1^2 \ln x dx$. Izračunati njegovu približnu vrijednost primjenom osnovne trapezne formule. Takođe, izračunati i grešku numeričkog odgovora, jednostavnim oduzimanjem tačne i približne vrijednosti. Pomoću digitrona $\ln 2 = 0{,}693$. Treba računati na tri decimale.

5. Svojstvene vrijednosti (sopstvene vrijednosti) matrice. Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Naći njene svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2.

`Primjer broj 2`

1. Kako glasi osnovna trapezna formula i kako se izvodi njen izraz za grešku.

2. Razmotrimo sljedeću tabelu podataka

x	0	1	2
y	-1	1	3

Napišite sistem linearnih jednačina za određivanje koeficijenata odgovarajućeg interpolacionog polinoma $p(x)$. Riješite sistem jednačina i napišite kako glasi interpolacioni polinom.

3. Data je tabela vrijednosti funkcije $y = \sqrt{x}$ i njenih konačnih razlika prvog i drugog reda Δy i $\Delta^2 y$:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
1	1	0,0488	$-0{,}0022$
1,1	1,0488	0,0466	
1,2	1,0954		

Koristeći kvadratni interpolacioni polinom u Newtonovom obliku, izvršiti procjenu vrijednosti $\sqrt{1{,}05}$.

4. Razmotrimo integral $\int_1^2 \ln x dx$. Izračunati njegovu približnu vrijednost primjenom osnovne Simpsonove formule. Takođe, izračunati i grešku numeričkog odgovora, jednostavnim oduzimanjem tačne i približne vrijednosti. Pomoću digitrona $\ln 1{,}5 = 0{,}405$, $\ln 2 = 0{,}693$. Treba računati na tri decimale.

5. Kondicija matrice (mjera uslovljenosti matrice). Dato je $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$. Izračunajte $\mathrm{cond}(A)$ po normi $\|\cdot\|_\infty$.

`Primjer broj 3`

1. U glavnim crtama o Rungeovom pravilu za praktičnu ocjenu greške u slučaju trapezne formule.

2. Aproksimirati $\log 3{,}5$ posredstvom linearne interpolacije na osnovu podataka $\log 3 = 0{,}4771$, $\log 5 = 0{,}6990$.

3. Neka je tačna vrijednost nekog broja $x = 198$ i neka raspolažemo sa približnom vrijednošću $x^* = 200$. Kolika je apsolutna greška date približne vrijednosti; kolika je njena relativna greška?

4. Neka je $y(x) = 1/x$ i razmotrimo integral $\int_1^2 \frac{dx}{x}$. Treba izračunati njegovu približnu vrijednost primjenom Newton–Cotesove kvadraturne formule sa $n = 3$. To znači da ima n malih intervala, odnosno $n+1$ čvorova. Takođe, treba izračunati i grešku numeričkog odgovora, jednostavnim oduzimanjem tačne i približne vrijednosti. Treba računati na tri decimale.

5. Norma matrice. Izračunati $\|A\|_1$ i $\|A\|_\infty$, ako je $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 10 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

`Primjer broj 4`

1. Navedite osnovne pojmove koji se odnose na niz Ležandrovih polinoma $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ (Legendre).

2. Na osnovu raspoloživih podataka

x	1	2	4	6
f	0	2	12	32

treba izračunati približnu vrijednost za $f(3)$ primjenom kvadratne interpolacije, uzimajući u obzir tri najbliža čvora.

3. Neka su o funkciji $y = y(x)$ dati podaci

x	0	1	2
y	60	90	150

Naći najbolju aproksimaciju oblika $y = ax + b$ (po metodi najmanjih kvadrata).

4. Polinomi Čebiševa $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Neka je $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$. Izvedite eksplicitne izraze za $T_n(x)$ kada je $n = 2, 3, 4$. Riješite jednačinu $T_n(x) = 0$ kada je $n = 2, 3, 4$. Time se uvjeravamo da sva rješenja razmatrane jednačine pripadaju intervalu $-1 < x < 1$.

5. Norma vektora. Dat je vektor $x = (-2, -3, 6)$. Izračunati $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ i $\|x\|_\infty$.