Numeričke metode (Fizika) / Numerička analiza (C smjer)
Ogledni primjeri za Završni ispit

Za Završni ispit (30 poena) oblasti: Rješavanje sistema nelinearnih jednačina, Numeričke metode za rješavanje Košijevog zadatka za obične diferencijalne jednačine i Numeričke metode za rješavanje graničnog zadatka za obične diferencijalne jednačine. Dolazi jedno ili dva pitanja iz teorije i tri ili četiri zadatka. Dozvoljena je upotreba digitrona.

U nastavku:

- Pitanja iz teorije
- Odgovori na neka pitanja
- Zadaci (postavke zadataka)
- Formule i uputstva za rješavanje zadataka
- Primjeri kako bi mogao da izgleda završni ispit

Numeričke metode / Numerička analiza
Pitanja iz teorije

⋈ Rješavanje sistema nelinearnih jednačina

1. Algoritam za metodu polovljenja.
2. Ocjena greške u slučaju metode polovljenja.
3. Dokazati teoremu o dovoljnim uslovima za konvergenciju metode proste iteracije u slučaju jedne nelinearne jednačine.
4. Dokazati prvu formulu za ocjenu greške u slučaju primjene metode proste iteracije (gdje piše $q^n/(1-q)$).
5. Dokazati drugu formulu za ocjenu greške u slučaju primjene metode proste iteracije (gdje piše $q/(1-q)$).
6. Metoda proste iteracije u slučaju jedne nelinearne jednačine: kako postići da uslov kontrakcije bude ispunjen (λ–postupak).
7. Dokazati teoremu o dovoljnim uslovima za konvergenciju metode tangente ili svejedno Newtonove metode u slučaju jedne nelinearne jednačine.
8. Dokazati teoremu o ocjeni greške u slučaju metode tangente.

⋈ Numeričke metode za rješavanje Košijevog zadatka za obične diferencijalne jednačine

9. Lema o dva rješenja diferencijalne jednačine.
10. Izvođenje Ojlerove metode (Euler) i njen izraz za lokalnu grešku.
11. Ocjena greške Ojlerove metode.
12. Modifikovana (ili poboljšana) Ojlerova metoda.
13. Numerički algoritam zasnovan na metodi Runge–Kuta (Runge–Kutta): praktični postupak da se ocijeni greška i podešavanje koraka.
14. Kako glase formule za metodu Runge–Kuta četvrtog reda (RK4).

15. Kako glasi Adamsova prediktor–korektor metoda IV reda i kako se procjenjuje njena lokalna greška (1/14).

16. Milnova metoda (Milne): kako glasi formula i kako se procjenjuje lokalna greška (1/29).

$\bowtie$ Numeričke metode za rješavanje graničnog zadatka za obične diferencijalne jednačine

17. Metoda konačnih razlika (za rješavanje graničnog zadatka): numerički algoritam tj. formule koje su dovoljne da se napiše program za računar. Ukratko objasniti.

18. Dokazati relacije $\lim h \to 0 \Big(y(x+h)-2y(x)+y(x-h)\Big)\Big/h^2 = y''(x)$ i $\lim_{h\to 0} \Big(y(x+h)-y(x-h)\Big)\Big/2h = y'(x)$, gdje se pretpostavlja da je funkcija $y = y(x)$ dovoljno glatka. Znamo da se na ovim relacijama zasniva metoda konačnih razlika.

Numeričke metode / Numerička analiza
Odgovori na neka pitanja

$\bowtie$ Rješavanje sistema nelinearnih jednačina

3 Dokazati teoremu o dovoljnim uslovima za konvergenciju metode proste iteracije u slučaju jedne nelinearne jednačine.

Metoda proste iteracije služi za numeričko rješavanje jednačine oblika $x = \varphi(x)$.

Neka je φ realna funkcija definisana na jednom segmentu realne ose $[a,b]$. Za funkciju $\varphi = \varphi(x)$ kaže se da je kontrakcija ako ona ispunjava sljedeći uslov: $(\exists q < 1)$ $(\forall x_1, x_2 \in [a,b])$ $|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)| \le q|x_2 - x_1|$.

Teorema. Razmotrimo funkciju $\varphi \in C^1[a,b]$ (neprekidno diferencijabilna). Neka su ispunjeni uslovi: (1) ako je $a \le x \le b$ onda je $a \le \varphi(x) \le b$ i (2) postoji q takav da je $|\varphi'(x)| \le q < 1$ za $a \le x \le b$. Definišimo niz brojeva $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ sa $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ za $n \ge 0$, gdje $x_0 \in [a,b]$. Tada važi: (1) jednačina $x = \varphi(x)$ ima jedinstveno rješenje na segmentu $[a,b[$ (označimo ga sa ξ) i (2) $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$.

Dokaz teoreme. Po Lagranžovoj teoremi (po teoremi o srednjoj vrijednosti) $\varphi(\alpha_2)-\varphi(\alpha_1) = \varphi'(\beta)(\alpha_2-\alpha_1)$ gdje je $\alpha_1 < \beta < \alpha_2 \Rightarrow |\varphi(\alpha_2)-\varphi(\alpha_1)| = |\varphi'(\beta)|\cdot|\alpha_2-\alpha_1| \le q|\alpha_2-\alpha_1|$.

Kako φ: $[a,b] \to [a,b]$ i $x_0 \in [a,b]$ to $x_n \in [a,b]$ za svako n.

Dokažimo da je $\{x_n\}$ Košijev niz. Imamo $|x_{n+1}-x_n| = |\varphi(x_n)-\varphi(x_{n-1})| \le q|x_n - x_{n-1}|$. Slično $|x_{n+2}-x_{n+1}| = |\varphi(x_{n+1})-\varphi(x_n)| \le q|x_{n+1}-x_n| \le q^2|x_n - x_{n-1}|$. Itd. Isto tako $|x_{n+p}-x_{n+p-1}| \le q^p|x_n - x_{n-1}|$. Na isti način se dokazuje i $|x_n - x_{n-1}| \le q^{n-1}|x_1 - x_0|$. Ukupno

$$|x_{n+p}-x_n| = |x_{n+p}-x_{n+p-1}+\ldots+x_{n+2}-x_{n+1}+x_{n+1}-x_n| \le$$

$$|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+\ldots+|x_{n+2}-x_{n+1}|+|x_{n+1}-x_n| \le (q^p+\ldots+q^2+q)|x_n-x_{n-1}| \le$$

$$(q+q^2+\ldots)|x_n-x_{n-1}| = \frac{q}{1-q}|x_n-x_{n-1}| \le \frac{q^n}{1-q}|x_1-x_0| \to 0 \text{ kad } n\to\infty$$

bez obzira na $p \ge 1$. Znači da $|x_{n+p}-x_n| \to 0$, razmatrani niz je Košijev.

Niz $\{x_n\}$ je Košijev $\Rightarrow$ niz $\{x_n\}$ je i konvergentan i odmah uvodimo oznaku $X = \lim_{n\to\infty} x_n$. Iz $a \le x_n \le b$ za svako $n \Rightarrow a \le X \le b$. Iz $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ slijedi $X = \lim_{n\to\infty}\varphi(x_n)$ i dalje slijedi (budući da je φ neprekidna funkcija) $X = \varphi(X)$. Znači $X = \xi$. Ne mogu postojati dva rješenja ξ_1 i ξ_2 jer bi tada bilo $\varphi(\xi_1) = \xi_1$, $\varphi(\xi_2) = \xi_2$ i (za neko β) $|\xi_2 - \xi_1| = |\varphi(\xi_2) - \varphi(\xi_1)| = |\varphi'(\beta)| \cdot |\xi_2 - \xi_1| \leq q|\xi_2 - \xi_1|$ a znamo da je $q < 1$. Dokaz je završen.

Primjer: funkcija $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$ ispunjava sve uslove teoreme na segmentu $[1, 2]$.

4 Dokazati prvu formulu za ocjenu greške u slučaju primjene metode proste iteracije (gdje piše $q^n/(1-q)$).

Razmotrimo funkciju $\varphi \in C^1[a,b]$ koja ispunjava $\varphi\colon [a,b] \to [a,b]$ i $|\varphi'(x)| \leq q < 1$. Definišimo niz brojeva $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ sa $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ za $n \geq 0$ i $x_0 \in [a,b]$ i označimo sa ξ rješenje jednačine $x = \varphi(x)$.

Tada za svako n važi nejednakost $|x_n - \xi| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$.

Treba da dokažemo nejednakost. S jedne strane, $|x_n - x_{n-1}| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_{n-2})| \leq q|x_{n-1} - x_{n-2}| = q|\varphi(x_{n-2}) - \varphi(x_{n-3})| \leq \ldots \leq q^{n-1}|x_1 - x_0|$, prepišimo $|x_n - x_{n-1}| \leq q^{n-1}|x_1 - x_0|$. S druge strane $x_n - \xi = x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - \xi$ pa po aksiomi trougla imamo $|x_n - \xi| \leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - \xi|$ i dalje

$$|x_n - \xi| \leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - \xi| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_n)| + |\varphi(x_n) - \varphi(\xi)| \leq$$

$$q|x_{n-1} - x_n| + q|x_n - \xi| \quad \Rightarrow \quad (1-q)|x_n - \xi| \leq q|x_{n-1} - x_n| \quad \Rightarrow$$

$$|x_n - \xi| \leq \frac{q}{1-q}|x_{n-1} - x_n|.$$

Ukupno,

$$|x_n - \xi| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{q}{1-q} \cdot q^{n-1}|x_1 - x_0| = \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|, \text{ što je i trebalo.}$$

Jasno, po Lagranžovoj imamo $\varphi(\alpha_2) - \varphi(\alpha_1) = \varphi'(\beta)(\alpha_2 - \alpha_1)$ gdje je $\beta = \alpha_1 + \theta(\alpha_2 - \alpha_1)$ za neko $0 < \theta < 1 \Rightarrow |\varphi(\alpha_2) - \varphi(\alpha_1)| \leq q|\alpha_2 - \alpha_1|$ za bilo koje $\alpha_1, \alpha_2 \in [a,b]$.

5 Dokazati drugu formulu za ocjenu greške u slučaju primjene metode proste iteracije (gdje piše $q/(1-q)$).

Razmotrimo funkciju $\varphi \in C^1[a,b]$ koja ispunjava $\varphi\colon [a,b] \to [a,b]$ i $|\varphi'(x)| \leq q < 1$. Definišimo niz brojeva $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ sa $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ za $n \geq 0$ i $x_0 \in [a,b]$ i označimo sa ξ rješenje jednačine $x = \varphi(x)$.

Tada za svako n važi nejednakost $|x_n - \xi| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$.

Treba da dokažemo nejednakost. Iz $x_n - \xi = x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - \xi$ pa po aksiomi trougla imamo $|x_n - \xi| \leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - \xi|$ i dalje

$$|x_n - \xi| \leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - \xi| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_n)| + |\varphi(x_n) - \varphi(\xi)| \leq$$

$$q|x_{n-1} - x_n| + q|x_n - \xi|, \text{ prepišimo } |x_n - \xi| \leq q|x_{n-1} - x_n| + q|x_n - \xi| \quad \Rightarrow$$

$$(1-q)|x_n - \xi| \leq q|x_{n-1} - x_n| \ \Big/ : (1-q)$$

Dobili smo $|x_n - \xi| \leq \frac{q}{1-q}|x_{n-1} - x_n|$, što je i trebalo.

Jasno, po Lagranžovoj imamo $\varphi(\alpha_2) - \varphi(\alpha_1) = \varphi'(\beta)(\alpha_2 - \alpha_1)$ gdje je $\beta = \alpha_1 + \theta(\alpha_2 - \alpha_1)$ za neko $0 < \theta < 1 \Rightarrow |\varphi(\alpha_2) - \varphi(\alpha_1)| \leq q|\alpha_2 - \alpha_1|$ za bilo koje $\alpha_1, \alpha_2 \in [a,b]$.

7 Dokazati teoremu o dovoljnim uslovima za konvergenciju metode tangente ili svejedno Newtonove metode u slučaju jedne nelinearne jednačine.

Metoda tangente služi za numeričko rješavanje jednačine oblika $F(x) = 0$ na jednom segmentu realne ose $[a, b]$.

Polazimo od grube aproksimacije x_0. Posmatrajmo grafik funkcije $y = F(x)$ i uočimo na grafiku tačku čija je apscisa $x = x_0$, njene koordinate su $(x, y) = (x_0, F(x_0))$. U toj tački, prislonimo tangentu na grafik. Jednačina tangente? Kao prava kroz jednu tačku $y - F(x_0) = k(x - x_0)$ ili $y - F(x_0) = F'(x_0)(x - x_0)$, na bazi geometrijske interpretacije prvog izvoda. Presječna tačka tangente i x–ose predstavlja bolju aproksimaciju od x_0. Apscisa presječne tačke? Iz $y = 0$ i $y - F(x_0) = F'(x_0)(x - x_0)$ imamo $-F(x_0) = F'(x_0)(x - x_0)$ zatim $-F(x_0)/F'(x_0) = x - x_0$ i definitivno $x = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}$. Stavlja se $x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}$. Slično x_2 na bazi x_1, itd. Da li niz $\{x_n\}$ konvergira ka rješenju jednačine?

Teorema (o dovoljnim uslovima za konvergenciju metode tangente). Neka su ispunjeni sljedeći uslovi: $F \in C^2[a, b]$, $F(a)F(b) < 0$, $F'(x)$ je stalnog znaka na $[a, b]$ (to znači: $F'(x) > 0$ za svako $x \in [a, b]$ ili $F'(x) < 0$ za svako $x \in [a, b]$), $F''(x)$ je stalnog znaka na $[a, b]$, tačka $x_0 \in [a, b]$ izabrana je tako da važi $F(x_0)F''(x_0) > 0$. Neka je niz brojeva $\{x_n\}$ definisan sa $x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$ za $n \geq 0$. Tada jednačina $F(x) = 0$ ima jedinstveno rješenje na segmentu $[a, b]$ (označimo ga sa X) i važi $\lim_{n\to\infty} x_n = X$.

Dokaz teoreme. Iz $F(a)F(b) < 0$ i $F'(x)$ je stalnog znaka slijedi postojanje i jedinstvenost rješenja X. U zavisnosti od toga kakvog su znaka $F'(x)$ i $F''(x)$ moguća su četiri slučaja i to: 1) $F' > 0$, $F'' > 0$, 2) $F' > 0$, $F'' < 0$, 3) $F' < 0$, $F'' > 0$, 4) $F' < 0$, $F'' < 0$. Mi ćemo sprovesti dokaz za prvi slučaj. Za ostale slučajeve dokaz je sličan.

Prvo. Važi $x_n > X$ za svako n; zapaziti odmah da je ovaj uslov ekvivalentan sa $F(x_n) > 0$. Dokazuje se mat. indukcijom. Imamo da je $x_0 > X$ jer je $F''(x) > 0$ i $F(x_0)F''(x_0) > 0$. Ako je $x_n > X$ onda je i $x_{n+1} > X$. Zaista, po Taylorovoj formuli:

$$F(X) = F(x_n) + F'(x_n)(X - x_n) + \frac{1}{2}F''(\alpha)(X - x_n)^2 \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = X + \frac{F''(\alpha)(X - x_n)^2}{2F'(x_n)} > X.$$

Drugo. Niz $\{x_n\}$ je opadajući tj. važi $x_{n+1} < x_n$ za $n \geq 0$. Zaista, $x_{n+1} - x_n = -F(x_n)/F'(x_n) < 0$ zato što je $F(x_n) > 0$ kako je maločas pokazano i takođe $F'(x_n) > 0$ po definicionom uslovu prvog slučaja.

Treće. Razmatrani niz je konvergentan, budući da je monoton i ograničen (svi njegovi elementi su veći od X). Označimo sa ξ graničnu vrijednost niza: neka je $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$.

Još četvrto. Na relaciju $x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$ treba primijrniti operaciju $\lim_{n\to\infty}$ čime se dobija $\xi = \xi - \frac{F(\xi)}{F'(\xi)}$; zapaziti da je $F'(\xi) \neq 0$ budući da $\xi \in [a, b]$. Dakle, $F(\xi) = 0$. Znači da je $\xi = X$. Dokaz je završen.

Metoda tangente ima kvadratni tempo konvergencije, što znači da se elementi niza vrlo brzo približavaju rješenju jednačine.

⋈ Numeričke metode za rješavanje Košijevog zadatka za obične diferencijalne jednačine

10 Izvođenje Ojlerove metode (Euler) i njen izraz za lokalnu grešku.

Razmotrimo problem inicijalnih vrijednosti $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Neka su fiksirane veličine $h > 0$ i $n \in N$. Mrežu čvorova čine tačke $x_i = x_0 + ih$ $(0 \leq i \leq n)$. Mi tražimo približno rješenje razmatranog problema. Sa y_i označava se približna vrijednost u tački $x = x_i$ $(0 \le i \le n)$. Greška u pojedinoj tački definiše se kao $R_i = y(x_i) - y_i$ $(0 \le i \le n)$.

Prelazimo na izvođenje Ojlerove metode. Napišimo Tejlorovu formulu:

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 y''(\alpha) \text{ ili } y(x_1) = y_0 + hf(x_0, y_0) + \frac{1}{2}h^2 y''(\alpha)$$

gdje je $x_0 < \alpha < x_0 + h$. Uzimamo da $y_0 + hf(x_0, y_0)$ predstavlja približnu vrijednost i (samim tim) $\frac{1}{2}h^2 y''(\alpha)$ predstavljaće grešku. Prema tome, stavlja se $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$. Pored toga, stavlja se $r_1 = \frac{1}{2}h^2 y''(\alpha)$, ovo je tzv. lokalna greška. Kaže se lokalna greška ili greška na (jednom) koraku.

Slično se dobija y_2 na bazi y_1, itd. Dakle, formula za Ojlerovu metodu ili šema za računanje Ojlerove metode glasi $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$ za $0 \le i \le n - 1$.

Slično se definišu i ostale lokalne greške $r_2, \ldots, r_n$ i važi relacija $r_i = \frac{1}{2}h^2 y''(\alpha)$ gdje je $x_{i-1} < \alpha < x_i$ $(1 \le i \le n)$. U zaključku, lokalna greška Ojlerove metode iznosi $r_i = O(h^2)$. Lako se pokazuje da važi sljedeće izvođenje (kada je y rješenje jednačine):

$$y' = f(x, y) \;\Rightarrow\; \frac{d}{dx}y' = \frac{d}{dx}f(x, y) \;\Rightarrow\; y'' = f'_x + f'_y y' \;\Rightarrow\; y'' = f'_x + f'_y f.$$

11 Ocjena greške Ojlerove metode

Razmotrimo problem inicijalnih vrijednosti $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Neka su fiksirane veličine $h > 0$ i $n \in N$. Mrežu čvorova čine tačke $x_i = x_0 + ih$ $(0 \le i \le n)$. Mi tražimo približno rješenje razmatranog problema. Sa y_i označava se približna vrijednost u tački $x = x_i$ $(0 \le i \le n)$. Tako da je $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$, Ojlerova metoda. Greška u pojedinoj tački definiše se kao $R_i = y(x_i) - y_i$ $(0 \le i \le n)$.

U cilju ocjene greške, uvedimo potrebne oznake. Naravno, $y = y(x)$ je analitičko rješenje razmatranog problema. Stavimo $y_0(x) = y(x)$. Neka je $y_i = y_i(x)$ funkcija koja zadovoljava diferencijalnu jednačinu $y' = f(x, y)$ i uslov $y_i(x_i) = y_i$ za $1 \le i \le n$. Lokalna greška r_i definiše se kao $r_i = y_{i-1}(x_i) - y_i(x_i)$ i za nju važi relacija $r_i = \frac{1}{2}h^2 y''_{i-1}(\alpha_i)$ gdje je $x_{i-1} < \alpha_i < x_i$.

Prelazimo na ocjenu greške R_n. Po lemi o dva rješenja diferencijalne jednačine važi

$$y_{i-1}(x_n) - y_i(x_n) = (y_{i-1}(x_i) - y_i(x_i)) \exp \int_{x_i}^{x_n} f'_y(x, \overline{y}_i(x))dx$$

gdje je recimo $y_{i-1}(x) < \overline{y}_i(x) < y_i(x)$. Ova relacija pokazuje da razlika $y_{i-1}(x) - y_i(x)$ u tački $x = x_n$ može da bude veća od one u tački $x = x_i$. Drugim riječima, tokom napredovanja po x–osi dolazi do dodatnog razilaženja dva rješenja, uopšte uzev. Imamo da je

$$R_n = y(x_n) - y_n = y_0(x_n) - y_n(x_n) = \sum_{i=1}^{n}(y_{i-1}(x_n) - y_i(x_n)) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_{i-1}(x_i) - y_i(x_i)) \exp \int_{x_i}^{x_n} f'_y(x, \overline{y}_i(x))dx \text{ slijedi}$$

$$|R_n| \le \sum_{i=1}^{n} |y_{i-1}(x_i) - y_i(x_i)| \exp \int_{x_i}^{x_n} |f'_y(x, \overline{y}_i(x))|dx \le$$

$$\sum_{i=1}^{n} |r_i| \exp \int_{x_i}^{x_n} L dx = \sum_{i=1}^{n} |r_i| \exp\{L(x_n - x_i)\}$$

gdje je uvedena oznaka $L = \sup |f'_y(x,y)|$.

Dobili smo definitivno $|R_n| \leq \sum_{i=1}^{n} |r_i| \exp\{L(x_n - x_i)\}$ ili $|R_n| \leq \sum_{i=1}^{n} |r_i| \exp\{LX\}$, stavili smo $X = nh$. Budući da je $|r_i| = O(h^2)$ slijedi $|R_n| = O(h)$. Takođe važi $|R_i| = O(h)$ za ostale i. Zaključak: greška Ojlerove metode je reda h ili $|R_n| \leq Ch$ za neku konstantu C. Pisali smo $\exp x$ umjesto e^x.

⋈ Numeričke metode za rješavanje graničnog zadatka za obične diferencijalne jednačine

Numeričke metode / Numerička analiza
Zadaci (postavke zadataka)

⋈ Rješavanje sistema nelinearnih jednačina

1. Metodom proste iteracije ili Newtonovom metodom naći približnu vrijednost jednog rješenja jednačine $\sqrt{x} = x^2 - 4x + 3$ na pet tačnih decimala. To znači da greška približne vrijednosti može da iznosi do (najviše) $\frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$ ili eventualno do (najviše) 10^{-5}. Računa se dok se x_{n-1} i x_n ne poklope na pet decimala.

2. Metodom proste iteracije ili Newtonovom metodom naći približnu vrijednost rješenja jednačine $x^3 - x - 1 = 0$ na pet tačnih decimala. Računa se dok se x_{n-1} i x_n ne poklope na pet decimala.

3. $x - \sin x = 0{,}25$.

4. $x + \ln x = 0{,}5$.

5. Newtonovim postupkom, sa tačnošću 10^{-4}, odrediti realno rješenje jednačine $x^3 - 2x - 5 = 0$.

6. Metodom proste iteracije riješiti jednačinu $x^2 = e^x + 2$ sa greškom manjom od 10^{-4}.

7. Postupkom po izboru odrediti približno najmanji pozitivni korijen jednačine $x \sin x = 1/2$.

8. Neka je $a > 0$. Konstruisati postupak za izračunavanje $1/\sqrt{a}$ zasnovan na Newtonovoj metodi. Ispitati konvergenciju maločas konstruisanog postupka.

9. Neka je $a > 1$. Konstruisati postupak za izračunavanje $\sqrt{a}$ zasnovan na Newtonovoj metodi. Ispitati konvergenciju maločas konstruisanog postupka. U okviru toga, o izboru početne aproksimacije x_0.

Uputstvo: $x^2 - a = 0$. Praktično, treba izvesti Heronov obrazac za računanje kvadratnog korijena (Heronovu metodu za računanje kvadratnog korijena).

10. Aproksimirati vrijednost broja $\sqrt{41}$ na šest tačnih decimala upotrebom Newtonove metode.

11. Kada je dat broj $c > 1$, možemo izračunati njegovu recipročnu vrijednost $x = \frac{1}{c}$ rješavajući jednačinu $\frac{1}{x} - c = 0$. Pokažite da, aplikacijom Newtonove metode, možemo izračunati recipročnu vrijednost broja bez izvođenja dijeljenja.

12. Aproksimirati vrijednost broja $1/9$ na šest tačnih decimala upotrebom Newtonove metode bez izvođenja dijeljenja. Zapazite da inicijalna vrijednost x_0 mora biti blizu rješenja, da bi metoda konvergirala.

13. Projektil mase 2 grama lansiran je u vazduhu vertikalno uvis i zatim pada, dostižući svoju terminalnu brzinu. Za terminalnu brzinu v u m/s može se, nakon evaluacije svih konstanti, pisati $0{,}002\cdot 9{,}81 = 1{,}4\cdot 10^{-5}v^{1{,}5} + 1{,}15\cdot 10^{-5}v^2$. Prvi sabirak na desnoj strani predstavlja silu trenja, a drugi predstavlja silu pritiska.

Gruba procjena govori da je terminalna brzina v nekih 30 m/s. Odredite da li interval $[20,30]$ ili $[30,40]$ sadrži jedan korijen (jedno rješenje).

14. Kritična masa za jedan nuklearni reaktor određuje se rješavanjem njegove tzv. kritične jednačine. Jedan jednostavni primjer kritične jednačine glasi $\operatorname{tg}(0{,}1x) = 9{,}2e^{-x}$, gdje je fizički značajan najmanji pozitivni korijen (rješenje). Iz iskustva je poznato da se rješenje nalazi u intervalu $[3,4]$.

Pokažite da jednačina zaista ima rješenja u $[3,4]$ i da je takvo rješenje jedinstveno.

15. $x = e^{-x}$ u blizini $x = 0{,}5$.

16. $\ln x = \frac{1}{x}$ u intervalu $[1,2]$.

17. $\ln x = e^{-x}$ u intervalu $[1,2]$.

18. Treba riješiti kritičnu jednačinu $\operatorname{tg}(0{,}1x) = 9{,}2e^{-x}$ primjenom Newtonove metode sa inicijalnom vrijednošću $x_0 = 3{,}5$. Izračunajte rješenje sa 5 tačnih decimala.

19. Razmotrimo jednačinu $x = \cos x$. Pokažite da je oblik $x = \frac{x+\cos x}{2}$ adekvatan za rješavanje metodom proste iteracije za sve inicijalne vrijednosti x_0 iz intervala $[0,1]$.

Objašnjenje: Jednačina $x = \cos x$ ekvivalentna je sa $x = \frac{x+\cos x}{2}$, kao uostalom i sa $x = \frac{x+\lambda\cos x}{1+\lambda}$ (za bilo koje $\lambda \neq -1$).

20. Razmotrimo jednačinu $x = e^{-x}$. Pokažite da je oblik $x = \frac{x+e^{-x}}{2}$ pogodan za rješavanje metodom proste iteracije za sve inicijalne vrijednosti x_0 iz intervala $[\frac{1}{2},1]$.

21. Razmotrimo jednačinu $x = e^{-x}$. Treba da skicirate grafike i da se time uvjerite da jednačina ima rješenje u intervalu $[0,1]$, kao i da je rješenje jedinstveno.

22. Jednačina $x = e^{-x}$ ima jedinstveno rješenje kada je $0 \le x \le 1$. Neka se data jednačina rješava numerički, metodom polovljenja intervala. Koliko će nam iteracija biti dovoljno da obezbijedimo 5 tačnih decimala?

Objašnjenje: Neka r_n označava grešku n–te aproksimacije x_n. Imamo $|r_0| = b - a = 1$ i $|r_n| = 2^{-n}|r_0|$. Treba naći n za koje važi $|r_n| \le \frac{1}{2}\cdot 10^{-5}$.

$\bowtie$ Numeričke metode za rješavanje Košijevog zadatka za obične diferencijalne jednačine

23. Jednačina koja razdvaja promjenljive. a) Riješite diferencijalnu jednačinu $y' = 6xy$.

b) $y' = ky$ c) $y' = \frac{1}{y}$ d) $y' = \frac{2xy}{x^2+1}$ e) $y' = ky\left(1 - \frac{y}{2}\right)$ f) $2ydy = (x^2+1)dx$ g) $\sin y dy = -x\cos x dx$ h) $\frac{dy}{dx} = \frac{x(e^{x^2}+2)}{6y^2}$ i) $(x^2-1)y^3dx + x^2dy = 0$ j) $xydx - (x^2+1)dy = 0$ k) $\frac{dr}{d\theta} = -r\operatorname{tg}\theta$ l) $\frac{dy}{dx} = \sin 5x$ m) $dx + e^{3x}dy = 0$ n) $(x+1)\frac{dy}{dx} = x + 6$ o) $xy' = 4y$ p) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{x^2}$.

24. Početni zadatak (početni problem). a) Treba odrediti rješenje problema inicijalnih vrijednosti $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+1}{2y}$, $y(-2) = -1$.

b) $(e^{-y}+1)\sin x dx = (1+\cos x)dy$, $y(0) = 0$, c) $ydy = 4x\sqrt{x^2+1}dx$, $y(0) = 1$, d) $x^2y' = y - xy$, $y(-1) = -1$.

25. Linearna jednačina. a) Riješite diferencijalnu jednačinu $y' + 3x^2y = x^2$.

b) $\frac{dy}{dx} = 5y$ c) $\frac{dy}{dx} + y = e^{3x}$ d) $x^2y' + xy = 1$ e) $x\frac{dy}{dx} - y = x^2\sin x$ f) $x\frac{dy}{dx} + 4y = x^3 - x$ g) $x^2y' + x(x+2)y = e^x$ h) $\frac{dy}{dx} = 9{,}8 - 0{,}196y$ i) $xy' + 2y = x^2 - x + 1$ j) $2y' - y = 4\sin(3x)$ k) $y' + (\operatorname{tg} x)y = \cos^2 x$ l) $y' + 4xy = x$ m) $xy' + y = x^2 + 1$ n) $\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$.

26. Početni zadatak (početni problem). a) Treba odrediti rješenje problema inicijalnih vrijednosti $x^2y' + xy = 1$, $x > 0$, $y(1) = 2$.

b) $xy' + y = e^x$, $y(1) = 2$, c) $(x+1)\frac{dy}{dx} + y = \ln x$, $y(1) = 10$, $x > 0$.

27. Električno kolo $L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$. Treba riješiti diferencijalnu jednačinu $4\frac{dI}{dt} + 12I = 60$ (treba naći opšte rješenje). Odredite i partikularno rješenje koje zadovoljava početni uslov $I(0) = 0$.

`Rezultat:` $I(t) = 5 + Ce^{-3t}$, $I(t) = 5(1 - e^{-3t})$.

28. Električno kolo. Treba riješiti diferencijalnu jednačinu $4\frac{dI}{dt} + 12I = 60\sin 30t$ (treba naći opšte rješenje). Odredite i partikularno rješenje koje zadovoljava početni uslov $I(0) = 0$.

`Rezultat:` $I(t) = \frac{5}{101}(\sin 30t - 10\cos 30t) + Ce^{-3t}$, $I(t) = \frac{5}{101}(\sin 30t - 10\cos 30t) + \frac{50}{101}e^{-3t}$.

29. a) Riješite diferencijalnu jednačinu $y' + 2y = 2e^x$.

`Rezultat:` $y = \frac{2}{5}e^x + Ce^{-2x}$.

b) $y' = x + 5y$ `Rezultat:` $y = Ce^{5x} + \frac{x}{5} + \frac{1}{25}$

c) $xy' - 2y = x^2$ `Rezultat:` $y = x^2\ln|x| + Cx^2$

d) $x^2y' + 2xy = \cos^2 x$ `Rezultat:` $y = \frac{1}{x^2}(C + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x)$

e) $xy' + y = \sqrt{x}$ `Rezultat:` $y = \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{C}{x}$

f) $e^x + y = y'$ `Rezultat:` $y = e^x(C + x)$

30. Riješiti problrm inicijalnih vrijednosti $y' = x + y$, $y(0) = 2$.

`Rezultat:` $y = -x - 1 + 3e^x$.

31. Linearna jednačina – homogeni slučaj. a) Riješite diferencijalnu jednačinu $y' + 5y = 0$.

b) $y' - 2y = 0$ c) $y' + \frac{y}{1+x^2} = 0$ d) $y' + x^2y = 0$.

32. Početni zadatak (početni problem). a) Treba odrediti rješenje problema inicijalnih vrijednosti $y' + y\cos x = 0$, $y(0) = \frac{1}{2}$.

b) $y' + \frac{3}{x}y = 0$, $y(1) = 2$, c) $y' + y = 0$, $y(0) = 4$, d) $y' - 3y = 0$, $y(1) = -2$, e) $y' + y\sin x = 0$, $y(\pi) = 1$, f) $y' + e^xy = 0$, $y(0) = e$, g) $y' - 2y = 0$, $y(1) = 4$, h) $x^2y' + y = 0$, $y(1) = 2$, $x > 0$.

33. Linearna jednačina – jedan jednostavni slučaj. Riješite diferencijalnu jednačinu $y' - 2y = x^2 + 1$.

34. Početni zadatak (početni problem). Treba odrediti rješenje problema inicijalnih vrijednosti $y' + y = x$, $y(0) = 1$.

35. Razmotrimo problem inicijalne vrijednosti $y' = x/y$, $y(0) = 1$. Treba odrediti njegovo približno rješenje u intervalu $0 \le x \le 0{,}4$ sa korakom $h = 0{,}1$. Primijenite Ojlerovu metodu (Euler).

Poznato je i tačno rješenje (analitičko rješenje) datog problema $y = \sqrt{1 + x^2}$. Treba izračunati i grešku približnog rješenja u pojedinoj tački x_i, jednostavnim oduzimanjem tačne i približne vrijednosti.

36. Razmotrimo problem inicijalnih vrijednosti $y' = x^2 - y$, $y(0) = 1$. Treba odrediti njegovo približno rješenje u intervalu $0 \le x \le 1$ sa korakom $h = 0{,}25$. Primijenite poboljšanu Ojlerovu metodu.

Poznato je i tačno rješenje (analitičko rješenje) problema $y = x^2 - 2x + 2 - e^{-x}$. Treba izračunati i grešku približnog rješenja u pojedinoj tački x_i, jednostavnim oduzimanjem tačne i približne vrijednosti.

37. Razmotrimo problem inicijalnih vrijednosti $y' = \frac{2y}{x} + x$, $y(1) = 1$. Treba odrediti njegovo približno rješenje u intervalu $1 \le x \le 1{,}4$ sa korakom $h = 0{,}1$. Primijenite metodu Runge–Kuta drugog reda (Runge–Kutta).

Poznato je i tačno rješenje (analitičko rješenje) datog problema $y = x^2(1 + \ln x)$. Treba izračunati i grešku približnog rješenja u pojedinoj tački x_i, jednostavnim oduzimanjem tačne i približne vrijednosti.

38. Razmotrimo problem inicijalnih vrijednosti $y' = x + y$, $y(0) = 1$. Treba odrediti njegovo približno rješenje u intervalu $0 \leq x \leq 2$ sa korakom $h = 0{,}2$. Primijenite metodu Runge–Kuta četvrtog reda (RK4).

Poznato je i tačno rješenje datog problema $y = 2e^x - x - 1$. Treba izr. i grešku približnog rješenja u pojedinoj tački x_i, jednostavnim oduzimanjem tačne i približne vrijednosti.

$\bowtie$ Numeričke metode za rješavanje graničnog zadatka za obične diferencijalne jednačine

39. Diferencijalna jednačina drugog reda. a) Naći opšte rješenje diferencijalne jednačine $y'' + 4y' + 3y = 0$.

`Rezultat:` $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x}$.

b) $y'' - 4y = 0$. `Rezultat:` $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$.

c) $y'' + 2y' + 5y = 0$. `Rezultat:` $y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) e^{-x}$.

d) $y'' + y = 0$. `Rezultat:` $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

e) $y'' - 4y' + 4y = 0$. `Rezultat:` $y = e^{2x}(C_1 x + C_2)$.

f) $y'' + y' = 0$. `Rezultat:` $y = C_1 + C_2 e^{-x}$.

40. Harmonijski oscilator. a) Prostom harmonijskom oscilatoru odgovara jednačina $y'' = -k^2 y$ čije je rješenje $y = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx)$.

Treba riješiti jednačinu $y'' = -2y$.

b) Prigušeni harmonijski oscilator ima jednačinu $y'' + \frac{b}{m} y' + \omega_0^2 y = 0$. Uvedimo oznaku $\omega = \frac{b}{2m}$ i posnatrajmo slučaj $|\omega| < |\omega_0|$, tzv. slučaj slabog prigušenja. Tada rješenje glasi $y = (C_1 \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}\, x) + C_2 \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}\, x)) e^{-\omega x}$.

Treba riješiti jednačinu $y'' + 4y' + 20y = 0$.

41. Jedan jednostavni slučaj nehomogene jednačine. a) Naći opšte rješenje diferencijalne jednačine $y'' - 4y = 1$.

`Rezultat:` $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{4}$.

b) $y'' + 2y' + 5y = x^2$. `Rezultat:` $y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) e^{-x} + \frac{1}{5} x^2 - \frac{4}{25} x - \frac{2}{125}$.

42. Granični zadatak (granični problem). a) Naći rješenje zadatka o graničnim vrijednostima $y'' + 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

b) $y'' + y = 0$, $y'(0) = 1$, $y'(\frac{\pi}{2}) = -1$.

43. Metoda konačnih razlika (diferencna metoda). Razmotrimo problem graničnih vrijednosti $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y(2) = 2$. Primjenom standardne metode konačnih razlika, odredite njegovo približno rješenje sa $n = 4$ (znači $h = 0{,}5$). Drugim riječima, treba formirati sistem diferencnih jednačina i zatim riješiti taj sistem.

44. Metoda konačnih razlika (diferencna metoda). Razmotrimo problem graničnih vrijednosti $y'' + 4y = 1$, $y(0) = 1$, $y(1) = 2$. Primjenom standardne metode konačnih razlika, odredite njegovo približno rješenje sa $n = 4$ (znači $h = 0{,}25$). Drugim riječima, treba formirati sistem diferencnih jednačina i zatim riješiti taj sistem.

45. Metoda konačnih razlika, i dalje slučaj graničnih uslova prve vrste. Razmotrimo problem graničnih vrijednosti $y'' + 2xy' - x^2 y = x^2$, $y(0) = 1$, $y(1) = 0$. Primjenom metode konačnih razlika, želimo da odredimo njegovo približno rješenje sa $n = 4$ (znači $h = 0{,}25$). U tom cilju, treba formirati sistem diferencnih jednačina po nepoznatim $y_0, \ldots, y_n$. Samo treba postaviti uslove (postaviti jednačine). Drukčije kazano, samo treba formirati sistem diferencnih jednačina, ne treba ga rješavati.

46. Metoda konačnih razlika, granični uslovi druge vrste. Razmotrimo problem graničnih vrijednosti $y'' + 2xy' - x^2y = x^2$, $y'(0) = 1$, $y'(1) = 0$. Primjenom metode konačnih razlika, želimo da odredimo njegovo približno rješenje sa $n = 10$ (znači $h = 0{,}1$). U tom cilju, treba formirati sistem diferencnih jednačina po nepoznatim $y_0, \ldots, y_n$. Samo treba formirati sistem diferencnih jednačina, ne treba ga rješavati.

47. Jednačina provođenja toplote. Razmotrimo tanki metalni štap dužine 1 metar koji je postavljen po x–osi od $x = 0$ do $x = 1$. Razmatrana pojava odvija se saglasno Fourierovom zakonu. Zanima nas raspored temperatura u pojedinim tačkama $0 \le x \le 1$. Nakon dovoljno vremena, proces hlađenja (zagrijavanja) štapa dolazi u stacionarnu fazu, kada se temperatura u pojedinoj tački x više ne mijenja sa protokom vremena (temperatura ne zavisi od vremena). Tada, označimo sa $y = y(x)$ temperaturu u pojedinoj tački sa x–ose, $0 \le x \le 1$. Važi jednačina $\frac{d}{dx}(k(x)\frac{dy}{dx}) = q(x)$. U jednačini, $k = k(x)$ je koeficijent toplotne provodljivosti. U jednačini, $q = q(x)$ odnosi se na unutrašnji izvor toplote.

Granični uslovi glase $y(0) = y_0$, $y(1) = y_1$ gdje $y_0, y_1 \in R$ ako je temperatura u krajnjim tačkama $x = 0$ i $x = 1$ unaprijed definisana. Druga mogućnost za granične uslove bila bi $y'(0) = y_0'$, $y'(1) = y_1'$ gdje $y_0', y_1' \in R$ ako je poznat temperaturni fluks u dvije krajnje tačke. Specijalno, može biti $y'(0) = 0$, $y'(1) = 0$ kada su krajevi toplotno izolovani.

Nema zadatka, ništa se ne traži, samo se navodi kao primjer jednačine.

48. Jednačina provođenja toplote. Ako je koeficijent toplotne provodljivosti $k(x)$ konstantan (ne zavisi od tačke) i iznosi $k \in R$ onda se jednačina provođenja toplote pojednostavljuje i postaje $ky'' = q(x)$.

Riješite granični zadatak $y'' = 6x + 6$, $y(0) = 10$, $y(1) = 20$.

49. Legendreova jednačina glasi $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$.

Poznato je sljedeće tvrđenje: ako $n \in N$ onda Legendreov polinom n–tog stepena $P_n = P_n(x)$ zadovoljava gornju jednačinu. Neposrednim računom, uvjerite se da tvrđenje važi u slučaju $n = 2$. Znamo da je $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

50. Besselova jednačina glasi $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$.

Nema zadatka, ništa se ne traži, samo se navodi kao primjer jednačine.

51. Granični zadatak $y'' + y = 1$, $y'(0) = 1$, $y'(\pi/2) = -1$ ima analitičko rješenje $y(x) = \sin x + \cos x + 1$ i može da posluži za vježbu o numeričkim metodama.

52. Granični zadatak $(x - 1)y'' - xy' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y(0{,}5) = 0{,}5 + \sqrt{e}$, analitičko rješenje $y(x) = x + e^x$.

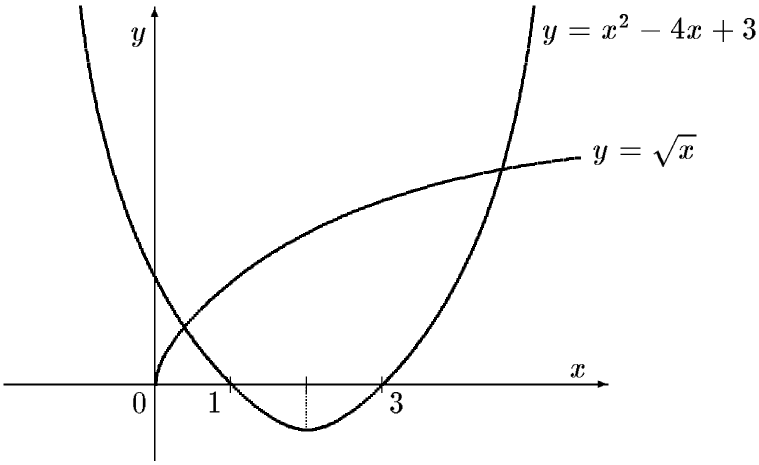
53. Granični zadatak $(x^2 + 1)y'' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = 3 + \pi/2$, analitičko rješenje $y(x) = x^2 + 1 + x + (x^2 + 1)\,\mathrm{arctg}\, x$.

54. Granični zadatak $y'' - y = 2x$, $y(0) = 0$, $y(1) = -1$, analitičko rješenje $y(x) = \sinh x/\sinh 1 - 2x$.

Numeričke metode / Numerička analiza
Formule i uputstva za rješavanje zadataka

$\bowtie$ Rješavanje sistema nelinearnih jednačina

1 Izrada $\sqrt{x} = x^2 - 4x + 3$.



Njutnova metoda (metoda tangente) $f(x) = 0$, $f(x) = \sqrt{x} - x^2 + 4x - 3$. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2x + 4$, $f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} - 2$. Interval: neka je $a = \frac{1}{4}$, $f(a) = -\frac{25}{16} < 0$, $b = 1$, $f(b) = 1 > 0$. Uslovi teoreme: $f \in C^2[a,b]$ (dvaput neprekidno diferencijabilna), $f(a)f(b) < 0$, $f'(x) \geq f'(1) = \frac{3}{2}$, f' je stalnog znaka na $[a,b]$ $(f' > 0)$, $f''(x) \leq -2$, f'' je stalnog znaka na $[a,b]$ $(f'' < 0)$, svi uslovi su ispunjeni. Kao x_0 biramo bilo koju tačku iz skupa $[a,b] = [\frac{1}{4}, 1]$ takvu da je $f(x_0)f''(x_0) > 0$. Neka je $x_0 = \frac{1}{4}$. Neka je $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Sigurno je $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ gdje je $\frac{1}{4} < \xi < 1$ rješenje jednačine $f(x) = 0$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	0,25	$-1{,}5625$	4,5
1	0,597222	$-0{,}194984$	3,452552
2	0,653698	$-0{,}004015$	3,311022
3	0,654910	$-0{,}000002$	3,308024
4	0,654911		

Odgovor: $x = 0{,}654911$

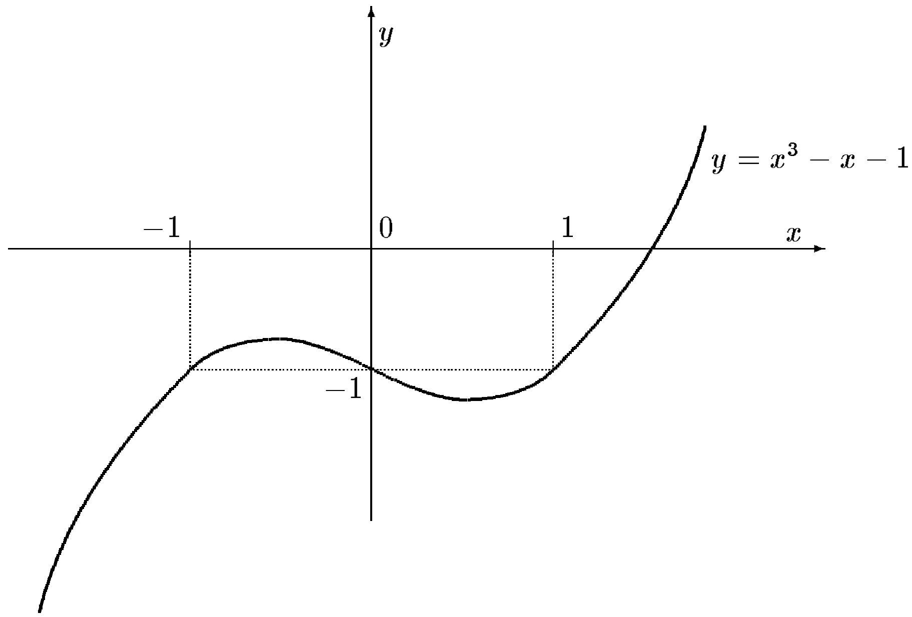
2 Izrada $x^3 - x - 1 = 0$.

Za metodu proste iteracije, razmatranu jednačinu treba prikazati u obliku $x = \varphi(x)$.

Metoda proste iteracije $x = \varphi(x)$. Neka je $\varphi(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $a = 1$, $b = 2$. $\varphi(1) = \sqrt[3]{2} = 1{,}26$, $\varphi(2) = \sqrt[3]{3} = 1{,}44$, φ je rastuća na $[a,b]$. $\varphi'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}$, $1 \leq x \leq 2 \Rightarrow |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{3}$. Uslovi teoreme: φ preslikava odsječak $[a,b]$ u taj isti odsječak i $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ za $x \in [a,b]$, oba uslova su ispunjena. x_0 – bilo koja tačka skupa $[a,b]$. Neka je $x_0 = 1$. Neka je $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. Sigurno je $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ gdje je $x = \xi$ rješenje jednačine $x = \sqrt[3]{1+x}$.

$x_1 = 1{,}259921$ $x_2 = 1{,}312294$ $x_3 = 1{,}322354$ $x_4 = 1{,}324269$
$x_5 = 1{,}324633$ $x_6 = 1{,}324702$ $x_7 = 1{,}324715$ $x_8 = 1{,}324717$
$x_9 = 1{,}324718$

Odgovor: $x = 1{,}324718$



9 Stavimo $F(x) = x^2 - a$. Očito, rješenje jednačine $F(x) = 0$ je $x = \sqrt{a}$ i $1 \leq x \leq a$. Dakle, uzastopne aproksimacije treba računati po formuli $x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$, konkretno ... (izračunajte). Zatim, uvjerite se da su ispunjeni uslovi teoreme koja se odnosi na Newtonovu metodu, da su ispunjeni dovoljni uslovi za konvergenciju niza $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$. Posebno, treba li uzeti $x_0 = 1$ ili $x_0 = a$.

Heronov obrazac za računanje kvadratnog korijena glasi $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ i važi $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$; takođe se kaže i Heronova metoda za računanje kvadratnog korijena.

19 Ako se uzme $\varphi(x) = \frac{x+\cos x}{2}$ onda se uzastopne aproksimacije računaju po formuli naravno $x_{n+1} = \varphi(x_n)$.

Ako se uzme $\varphi(x) = \frac{x+\cos x}{2}$ onda se treba uvjeriti da je (a) φ: $[0,1] \to [0,1]$; to znači: ako je $0 \leq x \leq 1$ onda je $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ i (b) $|\varphi'(x)| \leq q$ kad $x \in [0,1]$, gdje je $q < 1$ $(\exists q)$.

$\bowtie$ Numeričke metode za rješavanje Košijevog zadatka za obične diferencijalne jednačine

23 a) Dato je $y' = 6xy$ ili svejedno $\frac{dy}{dx} = 6xy$. Prilikom rješavanja, prvo treba ostvariti razdvajanje promjenljivih. To znači da sve što sadrži x treba prebaciti na jednu stranu znaka jednakosti, a sve što sadrži y na drugu. Tako $\frac{dy}{y} = 6xdx$. Zatim integral $\int \frac{dy}{y} = \int 6xdx$ i treba izračunati oba integrala: $\ln|y| = 3x^2 + C$; obično se proizvoljna konstanta C dodaje na stranu x; $|y| = e^{3x^2+C}$, $|y| = e^C e^{3x^2}$.

Time je zadatak praktično riješen. Još samo ostaje da se izraz sredi. U našem zadatku $y = \pm e^C e^{3x^2}$. Umjesto $\pm e^C$ možemo pisati c (proizvoljna konstanta).

Odgovor: $y = ce^{3x^2}$.

Ovo je tzv. opšte rješenje (familija rješenja). U opštem rješenju figuriše jedna proizvoljna konstanta, budući da se radi o diferencijalnoj jednačini prvog reda.

Funkcija $y = y(x)$ predstavlja rješenje diferencijalne jednačine $y' = f(x,y)$ ako ona zadovoljava jednačinu. To znači: kada se izvrši njena supstitucija u lijevu i desnu stranu jednačine, onda važi znak jednakosti.

Za diferencijalnu jednačinu se kaže da predstavlja diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promjenljive ako ona ima oblik $y' = X(x)Y(y)$ ili svejedno $\frac{dy}{dx} = X(x)Y(y)$, gdje je $X(x)$

funkcija od x, $Y(y)$ funkcija od y. Očito, jednačina je po nepoznatoj funkciji $y = y(x)$. Prilikom rješavanja, kao što je već rečeno:

$$\frac{dy}{dx} = X(x)Y(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{Y(y)} = X(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{Y(y)} = \int X(x)dx.$$

24 a) Ako se proizvoljnoj konstanti c koja figuriše u opštem rješenju d. j. dodijeli konkretna vrijednost onda imamo jedno posebno ili pojedinačno ili partikularno rješenje.

Za jednačinu oblika

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

kaže se da predstavlja običnu diferencijalnu jednačinu. Za relaciju (uslov) oblika

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

kaže se da predstavlja početni uslov ili svejedno Košijev uslov, Cauchy. Za (1) + (2) zajedno kaže se da predstavljaju početni problem ili Košijev problem ili problem inicijalne vrijednosti, engl. initial value problem.

Početni problem ima jedinstveno rješenje, po pravilu. To rješenje $y = y(x)$ je jedno partikularno rješenje diferencijalne jednačine (1). Drugim riječima, do rješenja $y = y(x)$ dolazi se izdvajanjem jednog rješenja iz familije rješenja, iz opšteg rješenja. Naravno, prilikom izdvajanja, upravljamo se po postavljenom početnom uslovu (2).

Dakle, postupak za rješavanje početnog problema (1)–(2) sastoji se iz dva koraka. Prvo: naći opšte rješenje d. j. Drugo: iz opšteg rješenja izdvojiti ono jedno "pravo" rješenje.

U našem zadatku $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+1}{2y}$, $y(-2) = -1$.

Prvo posmatramo jednačinu, ona razdvaja promjenljive, $2ydy = (2x+1)dx$, $\int 2ydy = \int (2x+1)dx$, $y^2 = x^2 + x + C$, $y = \pm\sqrt{x^2 + x + C}$, dobili smo opšte rješenje.

Prelazimo na početni uslov. Treba staviti $x = -2$, $y = -1$ u opšte rješenje. Tako $-1 = \pm\sqrt{2 + C}$. Znači $C = -1$, čime smo izdvojili jedno rješenje.

Odgovor: $y = -\sqrt{x^2 + x - 1}$.

25 a) Razmotrimo diferencijalnu jednačinu oblika

$$y' + p(x)y = q(x),$$

gdje su $p(x)$ i $q(x)$ funkcije od x. To je tzv. linearna jednačina. Postoji formula koja daje eksplicitni izraz za njeno opšte rješenje, tako da se postavljena jednačina rješava primjenom te formule. Formula glasi:

$$y = e^{-\int p(x)dx}(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx).$$

U našem zadatku $y' + 3x^2y = x^2$ je $p(x) = 3x^2$, $q(x) = x^2$. Tako

$$y = e^{-\int 3x^2dx}(C + \int x^2 e^{\int 3x^2dx}dx) = e^{-x^3}(C + \int x^2 e^{x^3}dx) =$$

$$e^{-x^3}(C + \frac{1}{3}\int e^{x^3}dx^3) = e^{-x^3}(C + \frac{1}{3}e^{x^3}) = Ce^{-x^3} + \frac{1}{3}.$$

Odgovor: $y = Ce^{-x^3} + \frac{1}{3}$.

(26) a) Prvo opšte rješenje $x^2y' + xy = 1$, $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$, $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = \frac{1}{x^2}$, po formuli:

$$y = e^{-\int \frac{dx}{x}}\Big(C + \int \frac{1}{x^2}e^{\int \frac{dx}{x}}dx\Big) = e^{-\ln x}\Big(C + \int \frac{1}{x^2}e^{\ln x}dx\Big) = \frac{1}{x}\Big(C + \int \frac{xdx}{x^2}\Big) =$$

$$\frac{1}{x}\Big(C + \int \frac{dx}{x}\Big) = \frac{1}{x}\Big(C + \ln x\Big) = \frac{\ln x + C}{x}, \text{ dakle } y = \frac{\ln x + C}{x}.$$

Još izdvajanje partikularnog rješenja $y(1) = 2$, $2 = \frac{\ln 1 + C}{1}$, $C = 2$, dakle $y = \frac{\ln x + 2}{x}$.
Odgovor: $y = \frac{\ln x + 2}{x}$.

(31) a) Razmotrimo linearnu jednačinu $y' + p(x)y = q(x)$. Ako je $q(x) \equiv 0$ onda je ona homogena, a inače nehomogena.

Kako se rješava homogena $y' + p(x)y = 0$? Naravno da i dalje važi ranija formula, samo što se ona sada pojednostavljuje i glasi $y = Ce^{-\int p(x)dx}$.

U našem zadatku je $y' + 5y = 0$ pa tako $y = Ce^{-\int 5dx} = Ce^{-5x}$.
Odgovor: $y = Ce^{-5x}$.

(32) a) $y' + y\cos x = 0$, opšte, $y = Ce^{-\int p(x)dx} = Ce^{-\int \cos x dx} = Ce^{-\sin x}$.
Partikularno, $y = Ce^{-\sin x}$, $y(0) = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} = Ce^0$, $C = \frac{1}{2}$, tako $y = \frac{1}{2}e^{-\sin x}$.
Odgovor: $y = \frac{1}{2}e^{-\sin x}$.

(33) Razmotrimo linearnu diferencijalnu jednačinu oblika $y' + ay = q(x)$ gdje je a konstanta ($a \neq 0$) i $q(x)$ polinom stepena $n \geq 0$. Lako se pokazuje da njeno opšte rješenje glasi $y = Ce^{-ax} + r(x)$ gdje je $r(x)$ jedan polinom takođe stepena n, $r(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$. Koeficijenti a_i polinoma $r(x)$ određuju se po tzv. metodi neodređenih koeficijenata. Drugim riječima, treba zamijeniti $y = Ce^{-ax} + r(x)$ u jednačinu $y' + ay = q(x)$.

Ako $a = 0$ onda $y = C + xr(x)$.

U našem zadatku $y' - 2y = x^2 + 1$ pa $q(x) = x^2 + 1$, $n = 2$, $r(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $y = Ce^{2x} + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $y' = 2Ce^{2x} + 2a_2x + a_1 \Rightarrow$ supstitucija u $y' - 2y = x^2 + 1$,

$$Ce^{2x} + 2a_2x + a_1 - 2(Ce^{2x} + a_2x^2 + a_1x + a_0) = x^2 + 1,$$

$$2a_2x + a_1 - 2a_2x^2 - 2a_1x - 2a_0 = x^2 + 1,$$

$$-2a_2x^2 + (2a_2 - 2a_1)x + a_1 - 2a_0 = x^2 + 1 \quad \Rightarrow$$

$$-2a_2 = 1, \;\; 2a_2 - 2a_1 = 0, \;\; a_1 - 2a_0 = 1$$

tako da je $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_0 = -\frac{3}{4}$ tako da je $r(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$.
Odgovor: $y = Ce^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$.

(34) Opšte $y = Ce^{-x} + x - 1$, partikularno $y = 2e^{-x} + x - 1$.
Odgovor: $y = 2e^{-x} + x - 1$.

Korisno je da se odgovor provjeri: da zadovoljava jednačinu (izvršite supstituciju) i da zadovoljava inicijalni uslov (čemu je jednako y kad je $x = 0$).

(35) Uzmimo da treba naći numeričko rješenje problema inicijalnih veijednosti oblika $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Neka je $h > 0$ korak i stavimo $x_i = x_0 + ih$ za $0 \leq i \leq n$, gdje je $n \geq 1$. Numeričko rješenje traži se u intervalu $x_0 \leq x \leq x_n$. Drugim riječima, treba dati približne vrijednosti (u oznaci y_i) za analitičko rješenje $y = y(x)$ u čvorovima mreže $x = x_i$, gdje je $i = 0, 1, \ldots, n$.

Formula za Ojlerovu metodu glasi

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

za svako i. Ponekad se piše $y_{i+1} = y_i + hy_i'$ za svako $i = 0, \ldots, n-1$.

Greška numeričkog odgovora? Greška u pojedinom čvoru (u oznaci r_i) definiše se naravno kao $r_i = y(x_i) - y_i$, gdje je $i = 1, \ldots, n$. Drugim riječima, to je razlika između tačne i približne vrijednosti.

Iz teorije je poznato sljedeće o Ojlerovoj metodi. Neka je b fiksirana tačka na x–osi desno od tačke $a = x_0$ i neka je $r = r(h)$ greška u toj tački $x = b$. Tada važi relacija $\lim_{h\to 0} r = 0$, metoda konvergira. Svejedno je pisali $h \to 0$ ili $n \to \infty$ budući da je $nh = b - a = \text{const.}$ Takođe važi relacija $|r| \leq Ch$, prvog reda $(\exists C)$.

U našem zadatku jednačina glasi $y' = x/y$ a inicijalni uslov glasi $y(0) = 1$. Dato je $h = 0{,}1$ i $n = 4$. Tako da po x–osi imamo tačke $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$, $x_3 = 0{,}3$, $x_4 = 0{,}4$.

Ostaje da se sprovede računanje. Rezultati računanja prikazani su u narednoj tabeli. Prva kolona x_i sadrži tačke sa x–ose. Druga kolona y_i sadrži numerički odgovor. To su brojevi koje smo izračunali pomoću digitrona po Ojlerovoj metodi ili koje je računar saopštio. U idućoj koloni $y(x_i)$ prikazane su vrijednosti analitičkog rješenja. Očito, to su vrijednosti funkcije $y = \sqrt{1+x^2}$ u tačkama $x = x_i$. Na kraju, u zadnjoj koloni r_i prikazana je greška numeričkog odgovora u pojedinoj tački, u čvoru x_i. Drukčije rečeno, date su vrijednosti razlike $r_i = y(x_i) - y_i$.

x_i	y_i	$y(x_i)$	r_i
0	1	1	0
0,1	1,000	1,005	−0,005
0,2	1,010	1,020	−0,010
0,3	1,030	1,044	−0,014
0,4	1,059	1,077	−0,018

36 Razmatra se problem inicijalnih vrijednosti $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Treba izračunati brojeve y_i. Drukčije rečeno, treba izračunati približne vrijednosti rješenja u tačkama $x_i = x_0 + ih$ gdje je $1 \leq i \leq n$ $(h > 0,\ n \geq 1)$.

Formula za poboljšanu Ojlerovu metodu (za modifikovanu Ojlerovu metodu) glasi $y_{i+1}^* = y_i + hf(x_i, y_i)$, $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_{i+1}^*))$ za svako i. Navedena formula može da bude prikazana i u drugom obliku (ekvivalentno je):

$$k_1 = hf(x_i, y_i), \;\; k_2 = hf(x_i + h, y_i + k_1), \;\; y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

za svako i. Umjesto k_1, k_2 može se detaljnije pisati k_{1i}, k_{2i}.

Oznaka za grešku u pojedinom čvoru $r_i = y(x_i) - y_i$. Iz teorije je poznato da važi $r_i = O(h^2)$ kad $h \to 0$. Drugim riječima, važi relacija $\|r\|_\infty = O(h^2)$ kad $h \to 0$, gdje je uvedena oznaka $r = (r_1, \ldots, r_n)$ i gdje su na x–osi fiksirane dvije tačke $a = x_0$ i $b = x_n = x_0 + nh$.

U našem zadatku jednačina glasi $y' = x^2 - y$ a inicijalni uslov glasi $y(0) = 1$. Dato je $h = 0{,}25$ i $n = 4$. Tako da po x–osi imamo tačke $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}25$, $x_2 = 0{,}5$, $x_3 = 0{,}75$, $x_4 = 1$.

Ostaje da se sprovede računanje. Rezultati računanja prikazani su u tabeli. Prva kolona x_i sadrži tačke sa x–ose. Druga kolona y_i sadrži numerički odgovor. To su brojevi koje smo izračunali pomoću digitrona po poboljšanoj Ojlerovoj metodi ili koje je računar saopštio. U idućoj koloni $y(x_i)$ prikazane su vrijednosti analitičkog rješenja. Očito, to su vrijednosti funkcije

$y = x^2 - 2x + 2 - e^{-x}$ u tačkama $x = x_i$. Na kraju, u zadnjoj koloni r_i prikazana je greška numeričkog odgovora u pojedinoj tački, u čvoru x_i. Drugim riječima, date su vrijednosti razlike $r_i = y(x_i) - y_i$.

x_i	y_i	$y(x_i)$	r_i
0	1	1	0
0,25	0,7891	0,7837	$-0{,}0054$
0,5	0,6536	0,6435	$-0{,}0101$
0,75	0,6044	0,5901	$-0{,}0143$
1	0,6499	0,6321	$-0{,}0178$

37 Kao i ranije $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, pored toga $x_i = x_0 + ih$, treba izračunati približne vrijednosti y_i.

Formula za metodu Runge–Kuta drugog reda glasi $y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$, $y_{i+1} = y_i + hf(x_i + \frac{h}{2}, y_{i+1/2})$ za svako i. Obično se navedena formula zapisuje u drugom obliku, u ekvivalentnom obliku, kako slijedi:

$$k_1 = hf(x_i, y_i), \quad k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}), \quad y_{i+1} = y_i + k_2$$

za svako i. Očito da k_1 i k_2 zavise od i. Drugi naziv: formula srednje tačke ili eventualno formula pravougaonika.

Samo se napominje da postoje i druge formule (druge metode) za koje se takođe kaže da predstavljaju "metodu Runge–Kuta drugog reda". Greška u pojedinom čvoru $r_i = y(x_i) - y_i$.

U našem zadatku, jednačina glasi $y' = \frac{2y}{x} + x$ a inicijalni uslov glasi $y(1) = 1$. Dato je $h = 0{,}1$ i $n = 4$. Tako da po x–osi imamo tačke $x_0 = 1$, $x_1 = 1{,}1$, $x_2 = 1{,}2$, $x_3 = 1{,}3$, $x_4 = 1{,}4$.

Ostaje da se sprovede računanje. Rezultati računanja prikazani su u tabeli. Prva kolona x_i sadrži tačke sa x–ose. Druga kolona y_i sadrži numerički odgovor po metodi Runge–Kuta drugog reda. U idućoj koloni $y(x_i)$ prikazane su vrijednosti analitičkog rješenja $y = x^2(1 + \ln x)$ u tačkama $x = x_i$. Na kraju, u zadnjoj koloni r_i prikazana je greška u pojedinoj tački x_i, odnosno dati su brojevi $r_i = y(x_i) - y_i$.

x_i	y_i	$y(x_i)$	r_i
1	1	1	0
1,1	1,3240	1,3253	0,0013
1,2	1,6998	1,7025	0,0027
1,3	2,1291	2,1334	0,0043
1,4	2,6134	2,6195	0,0061

38 Standardne oznake $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, pored toga $x_i = x_0 + ih$. Treba izračunati približne vrijednosti $y_1, \ldots, y_n$, dok je vrijednost y_0 data inicijalnim uslovom (Košijevim uslovom).

Formula za metodu Runge–Kuta četvrtog reda glasi:

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_i, y_i), \quad k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}), \quad k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}), \\ k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3), \quad y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{cases}$$

za $i \geq 0$. Drugi naziv: klasična metoda Runge–Kuta četvrtog reda. Možemo kazati da navedena formula izgleda kao $y_{i+1} = \Phi(f, x_i, y_i, h)$. Greška u pojedinoj tački mreže $r_i = y(x_i) - y_i$.

U našem zadatku, jednačina glasi $y' = x + y$ a inicijalni uslov glasi $y(0) = 1$, tako da je očito $f(x,y) = x + y$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Dato je $[x_0, x_n] = [0, 2]$ i $h = 0{,}2$, tako da je $n = 10$. Prena tome, po x–osi imamo tačke $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}2$, …, $x_{10} = 2$.

Ostaje da se sprovede računanje. Rezultati računanja prikazani su u tabeli. Prva kolona x_i sadrži tačke sa x–ose. Druga kolona y_i sadrži numerički odgovor po metodi Runge–Kuta četvrtog reda. U trećoj koloni $y(x_i)$ prikazane su vrijednosti tačnog rješenja $y = 2e^x - x - 1$ u tačkama $x = x_i$. Na kraju, u zadnjoj koloni r_i prikazana je greška u pojedinoj tački x_i, odnosno dati su brojevi $r_i = y(x_i) - y_i$.

$x =$	približno	tačno	greška
x_i	y_i	$y(x_i)$	r_i
0	1	1	0
0,2	1,24280	1,24281	0,00001
0,4	1,58364	1,58365	0,00001
0,6	2,04421	2,04424	0,00003
0,8	2,65104	2,65108	0,00004
1	3,43650	3,43656	0,00006
1,2	4,44014	4,44023	0,00009
1,4	5,71027	5,71040	0,00013
1,6	7,30589	7,30606	0,00017
1,8	9,29905	9,29929	0,00024
2	11,77778	11,77811	0,00033

$\bowtie$ Numeričke metode za rješavanje graničnog zadatka za obične diferencijalne jednačine

(39) Za jednačinu oblika $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ kaže se da je linearna diferencijalna jednačina drugog reda. Ako su $p(x)$ i $q(x)$ konstante onda je to jednačina sa konstantnim koeficijentima. Ako je $f(x) \equiv 0$ onda je riječ o homogenoj jednačini, a inače je nehomogena.

Razmotrimo linearnu homogenu sa konstantnim koeficijentima $y'' + py' + qy = 0$, gdje $p, q \in R$. Kako se određuje njeno opšte rješenje? Razmatranoj jednačini pridružuje se njena tzv. karakteristična jednačina po nepoznatoj $\lambda \in R$ ili $\lambda \in C$: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Napisali smo jednu kvadratnu jednačinu. Treba naći njena rješenja. Vidjećemo da postoje tri slučaja. Na osnovu njenih rješenja, lako se dolazi do rješenja diferencijalne jednačine.

Slučaj 1. Kvadratna jednačina ima dva međusobno različita realna rješenja λ_1 i λ_2. Tada opšte rješenje diferencijalne jednačine glasi $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, gdje su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

Slučaj 2. Kvadratna jednačina ima dva konjugovano kompleksna rješenja $\lambda_{1,2} = a \pm ib$, gdje $a, b \in R$, $b \neq 0$. Tada opšte rješenje diferencijalne jednačine glasi $y = (C_1 \sin bx + C_2 \cos bx)e^{ax}$.

Slučaj 3. Kvadratna jednačina ima jedan realni korijen λ koji se ponavlja (dvostruki korijen). Tada opšte rješenje diferencijalne jednačine glasi $y = e^{\lambda x}(C_1 x + C_2)$.

(40) a) Jednačina $y'' = -2y$, rješenje $y = C_1 \cos(\sqrt{2}\,x) + C_2 \sin(\sqrt{2}\,x)$.

b) Jednačina $y'' + 4y' + 20y = 0$, rješenje $y = (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)e^{-2x}$.

(41) Razmotrimo jednačinu oblika $y'' + py' + qy = f(x)$ gdje je $p, q \in R$ a $f(x)$ je polinom stepena $n \geq 0$; nehomogena sa konstantnim koeficijentima, pri čemu desna strana $f(x)$ ima specijalni oblik. Neka je $q \neq 0$. Lako se dolazi do rješenja navedene jednačine. Rješenje jednačine (opšte rješenje jednačine) glasi $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$, gdje je $y_1(x)$ opšte rješenje jednačine $y'' + py' + qy = 0$, dok je $y_2(x)$ jedan polinom stepena n koji zadovoljava polaznu jednačinu $y'' + py' + qy = f(x)$. Polinom se određuje metodom neodređenih koeficijenata, polazeći od reprezentacije $y_2(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, gdje su $a_i \in R$ zasad neodređene veličine.

Dakle, proces rješavanja se odvija kako slijedi. Prvo treba riješiti $y'' + py' + qy = 0$ označavajući rješenje kao $y_1(x)$. Drugo, treba odrediti veličine $a_i \in R$ $(0 \le i \le n)$ supstitucijom izraza $y_2(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ u samu jednačinu $y'' + py' + qy = f(x)$, pa ćemo tako dobiti $y_2(x)$. Još samo ostaje da se sabere $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$.

Ako je $p \neq 0$, $q = 0$ onda se rješenje $y_2(x)$ traži i pronalazi u obliku $y_2(x) = x(a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0)$. Ako je $p = q = 0$ onda postoji partikularno rješenje oblika $y_2(x) = x^2(a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0)$.

42 Neka je $[a, b]$ interval na realnoj osi. Neka se nepoznata funkcija $y = y(x)$ razmatra na tom intervalu. Ona treba da zadovoljava na tom intervalu diferencijalnu jednačinu $y''+py'+qy = f(x)$ a još i dva tzv. granična uslova oblika $y(a) = A$, $y(b) = B$ $(A, B \in R)$; ovo su granični uslovi prve vrste ili Dirichletovi granični uslovi. Tada kažemo da je postavljen granični zadatak.

Rješenje graničnog zadatka dobija se tako što se izdvoji jedno rješenje (izdvoji se partikularno rješenje) iz familije rješenja, iz opšteg rješnja. Drugim riječima, treba dodijeliti pogodne vrijednosti proizvoljnim konstantama C_1 i C_2 da bi zauzvrat bili ispunjeni granični uslovi.

Slično se postupa i u slučaju kada su dati granični uslovi druge vrste, Neumannovi granični uslovi, oni imaju oblik $y'(a) = A_1$, $y'(b) = B_1$ gdje $A_1, B_1 \in R$.

43 Razmotrimo problem graničnih vrijednosti

$$y'' + py' + qy = f(x), \;\; y(a) = A, \;\; y(b) = B.$$

U jednačini, p i q su dati brojevi a $f = f(x)$ je data funkcija. Nepoznata funkcija $y = y(x)$ definisana je naravno za $a \le x \le b$. Takođe razmatramo mogućnost njegovog numeričkog rješavanja. U tom cilju, postavimo po segmentu $[a, b]$ x–ose ekvidistantnu mrežu čvorova sa korakom $h > 0$, uzimajući $h = \frac{b-a}{n}$, gdje je $n \ge 1$. Drugim riječima, neka je $x_i = x_0 + ih = a + ih$ za $0 \le i \le n$, tako da je očito $x_0 = a$, $x_n = b$. Sa y_i označavamo odgovarajuće približne vrijednosti (biće dobijene kasnije). Dakle, y_i označava približnu vrijednost rješenja graničnog zadatka kada je $x = x_i$, u čvoru x_i za $0 \le i \le n$. S druge strane, $y(x_i)$ predstavlja naravno vrijednost analitičkog (tačnog) rješenja $y = y(x)$ postavljenog graničnog zadatka u tački x_i. Mi pretpostavljamo da postoji jedinstveno analitičko rješenje. Posmatra se i greška u pojedinoj tački $r_i = y(x_i) - y_i$.

Ako se primjenjuje `metoda konačnih razlika`, kako se dobija numeričko rješenje $\{y_i\}_{i=0}^{n}$? Iz naslova o numeričkon diferenciranju poznate su formule

$$\lim_{h\to 0} \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} = y'(x), \;\; \lim_{h\to 0} \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} = y''(x).$$

Imamo $n + 1$ nepoznatih $y_0, \ldots, y_n$. Na osnovu postavljrnih graničnih uslova automatski je $y_0 = A$, $y_n = B$. Tako da se y_0 i y_n i ne mogu smatrati nepoznatim veličinama. Dakle, imamo $n - 1$ nepoznatih $y_1, \ldots, y_{n-1}$. Dalje, diferencijalna jednačina važi naravno za svako $x \in [a, b]$. Specijalno, ona važi kada je $x = x_i$ za svako $1 \le i \le n - 1$. Možemo pisati $y''(x_i) + py'(x_i) + qy(x_i) = f(x_i)$. Zahvaljujući maločas napisanim formulama koje se tiču $y'(x)$ i $y''(x)$ imamo:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + qy_i = f_i \;\; (1 \le i \le n - 1) \tag{1}$$

gdje je uvedena oznaka $f_i = f(x_i)$. Napisali smo sistem koji se sastoji od $n-1$ jednačina, $n-1$ diferencnih jednačina, $n - 1$ uslova. Ponovimo, na bazi postavljenih graničnih uslova:

$$y_0 = A, \;\; y_n = B. \tag{2}$$

Kada riješimo sistem (1)–(2) onda i dobijamo numeričko rješenje! Dakle, treba riješiti sistem (1)–(2). Njegovo rješenje predstavlja rezultat. Time je numerička metoda konstruisana (izložena).

Zapaža se lako da sistem (1)–(2) predstavlja jedan sistem linearnih jednačina po nepoznatim $y_0, \ldots, y_n$. Isto tako se lako zapaža i da je matrica sistema jedna trodijagonalna matrica, što znatno olakšava proces njegovog rješavanja.

Što se tiče ocjene greške metode konačnih razlika, važi relacija $r_i = O(h^2)$, pod određenim pretpostavkama.

U našem zadatku je $a = 0$, $b = 2$. Dato je $n = 4$ tako $h = \frac{b-a}{n} = 0{,}5$. Dakle, po x–osi imamo čvorove $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1{,}5$, $x_4 = 2$. Budući da granični uslovi glase $y(0) = 0$, $y(2) = 2$ imamo automatski $y_0 = 0$, $y_4 = 2$. Diferencijalna jednačina glasi $y'' + y = 0$ tako da se stvara sistem diferencnih jednačina $\frac{1}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) + y_i = 0$ $(1 \le i \le 3)$ ili detaljnije $\frac{1}{h^2}(y_2 - 2y_1 + y_0) + y_1 = 0$, $\frac{1}{h^2}(y_3 - 2y_2 + y_1) + y_2 = 0$, $\frac{1}{h^2}(y_4 - 2y_3 + y_2) + y_3 = 0$. Kada iskoristimo $y_0 = 0$, $y_4 = 2$ onda

$$\frac{1}{h^2}(y_2 - 2y_1) + y_1 = 0, \;\; \frac{1}{h^2}(y_3 - 2y_2 + y_1) + y_2 = 0, \;\; \frac{1}{h^2}(2 - 2y_3 + y_2) + y_3 = 0.$$

Preostaje da se riješi sistem 3×3. Dobiće se $y_1 = \frac{128}{119}$, $y_2 = \frac{224}{119}$, $y_3 = \frac{264}{119}$ ili $y_1 = 1{,}076$, $y_2 = 1{,}882$, $y_3 = 2{,}218$.

Odgovor: $y_0 = 0$, $y_1 = 1{,}076$, $y_2 = 1{,}882$, $y_3 = 2{,}218$, $y_4 = 2$.

Pogodno je da se odgovor prikaže u obliku tabele:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	0	1,076	1,882	2,218	2

Dodajmo da analitičko rješenje glasi $y = 2\sin x / \sin 2$ i da njegove vrijednosti u čvorovima iznose redom $y(x_1) = 1{,}054$, $y(x_2) = 1{,}851$, $y(x_3) = 2{,}194$ tako da je greška u pojedinim tačkama $r_1 = -0.022$, $r_2 = -0{,}031$, $r_3 = -0{,}024$ dok je naravno $r_0 = r_4 = 0$.

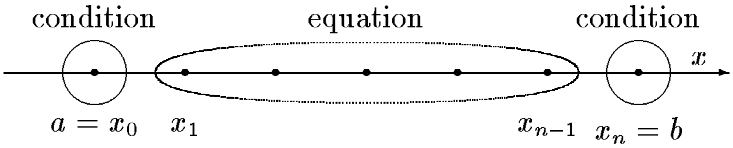
44 Dato je $y'' + 4y = 1$, $y(0) = 1$, $y(1) = 2$ u smislu $y'' + qy = f$, $y(a) = A$, $y(b) = B$. Takođe je dato $n = 4$ odnosno $h = \frac{b-a}{n} = 0{,}25$. Prema tome, na x–osi imamo tačke $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}25$, $x_2 = 0{,}5$, $x_3 = 0{,}75$, $x_4 = 1$ $(x_i = a + ih)$. Kao i obično, y_i označava vrijednost približnog rješenja u tački $x = x_i$. Naš cilj i jeste određivanje brojeva y_i, gdje je $0 \le i \le 4$. Na bazi dva granična uslova odmah imamo $y_0 = 1$ i $y_4 = 2$.

Ako diferencijalna jednačina glasi $y'' + qy = f$ gdje $q, f \in R$ onda sistem diferencnih jednačina postaje $\frac{1}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) + qy_i = f$, $1 \le i \le n-1$. Budući da je naša jednačina takvog oblika, mi odmah pišemo $\frac{1}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) + 4y_i = 1$, $i = 1, 2, 3$. Preostaje samo da se riješi ovaj sistem oblika 3×3. Ponovimo, $y_0 = 1$, $y_4 = 2$. Ponovimo, $h = 1/4$. Dalje sami nastavite rješavanje ovog zadatka.

45 Samo dajemo kratko uputstvo. Ako granični problem ima oblik $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$, $y(a) = A$, $y(b) = B$ onda sistem diferencnih jednačina dobija oblik

$$\frac{1}{h^2}\Big(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}\Big) + p_i \cdot \frac{1}{2h}\Big(y_{i+1} - y_{i-1}\Big) + q_i y_i = f_i, \;\; y_0 = A, \;\; y_n = B,$$

gdje su uvedene oznake $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$. Svi ostali elementi numeričke metode ostaju, ne mijenjaju se u odnosu na omo kako se radi u slučaju jednačine sa konstantnim koeficijentima o čemu u prethodnim zadacima. Na primjer, ostaje $x_i = x_0 + ih$ $(0 \le i \le n)$.

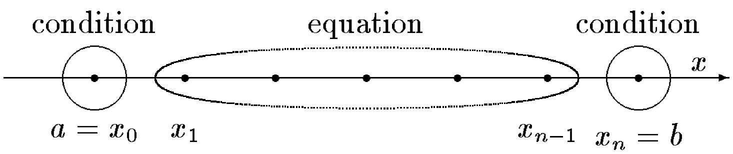


Boundary conditions prve vrste $y(a) = A$, $y(b) = B$ daju vrijednosti y_0 i y_n. Differential equation daje $n-1$ uslova.

(46) Samo dajemo kratko uputstvo. Jedina novost, jedina razlika u odnosu na prethodne zadatke sastoji se u tome što je došlo do promjene tipa graničnih uslova. U prethodnim zadacima razmatrani su granični uslovi prve vrste $y(a) = A$, $y(b) = B$. Njima se pridružuju relacije $y_0 = A$, $y_n = B$. Sada razmatramo granične uslove druge vrste oblika $y'(a) = A_1$, $y'(b) = B_1$. Na njihov račun, u numeričkoj metodi, pišemo dva diferencna uslova:

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = A_1, \quad \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B_1.$$

Obrazloženje: važi $\lim_{h\to 0} \frac{y(x+h)-y(x)}{h} = y'(x)$, kao i $\lim_{h\to 0} \frac{y(x)-y(x-h)}{h} = y'(x)$. Svi ostali elementi numeričke metode (numeričkog algoritma) ostaju bez promjene.



Boundary conditions druge vrste $y'(a) = A_1$, $y'(b) = B_1$ daju dva uslova. Differential equation daje $n-1$ uslova.

Numeričke metode / Numerička analiza
Primjeri kako bi mogao da izgleda završni ispit

`Primjer broj 1`

1. Dokazati teoremu o dovoljnim uslovima za konvergenciju metode proste iteracije u slučaju jedne nelinearne jednačine.

2. Metodom proste iteracije ili Newtonovom metodom naći približnu vrijednost jednog rješenja jednačine $x - \sin x = 0{,}25$ na pet tačnih decimala. To znači da greška približne vrijednosti može da iznosi do (najviše) $\frac{1}{2}\cdot 10^{-5}$ ili eventualno do (najviše) 10^{-5}. Računa se dok se x_{n-1} i x_n ne poklope na pet decimala.

3. Riješite problem početnih vrijednosti (Cauchyev problem) $y' = 6xy$, $y(0) = 2$.

4. Razmotrimo početni problem (problem inicijalnih vrijednosti)

$$y' = 2x + y, \quad y(0) = 1.$$

Treba odrediti njegovo približno rješenje u intervalu $0 \le x \le 0{,}4$ sa korakom $h = 0{,}1$. Primijenite Ojlerovu metodu. Računati sa tri ili četiri decimale.

5. Neka je $a > 1$. Konstruisati postupak za izračunavanje $\sqrt{a}$ zasnovan na Newtonovoj metodi. Ispitati konvergenciju maločas konstruisanog postupka. U okviru toga, o izboru početne aproksimacije x_0.

Uputstvo: $x^2 - a = 0$. Praktično, treba izvesti Heronov obrazac za računanje kvadratnog korijena (Heronovu metodu za računanje kvadratnog korijena).

`Primjer broj 2`

1. Dokazati prvu formulu za ocjenu greške u slučaju primjene metode proste iteracije (gdje piše $q^n/(1-q)$).

2. Metodom proste iteracije ili Newtonovom metodom naći približnu vrijednost jednog rješenja jednačine $x+\ln x = 0{,}5$ na pet tačnih decimala. To znači da greška približne vrijednosti može da iznosi do (najviše) $\frac{1}{2}\cdot 10^{-5}$ ili eventualno do (najviše) 10^{-5}. Računa se dok se x_{n-1} i x_n ne poklope na pet decimala.

3. Riješite problem početnih vrijednosti (Cauchyev problem) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+1}{2y}$, $y(1) = -2$.

4. Razmotrimo početni problem (problem inicijalnih vrijednosti)

$$y' = x + 2y, \;\; y(0) = 1.$$

Treba odrediti njegovo približno rješenje u intervalu $0 \le x \le 0{,}4$ sa korakom $h = 0{,}1$. Primijenite Ojlerovu metodu. Računati sa tri ili četiri decimale.

5. Jednačina $x = e^{-x}$ ima jedinstveno rješenje kada je $0 \le x \le 1$. Neka se data jednačina rješava numerički, metodom polovljenja intervala (metodom bisekcije). Koliko će nam iteracija biti dovoljno da obezbijedimo 5 tačnih decimala?

Objašnjenje: Neka r_n označava grešku n–te aproksimacije x_n. Imamo $|r_0| = b - a = 1$ i $|r_n| = 2^{-n}|r_0|$. Treba naći n za koje važi $|r_n| \le \frac{1}{2}\cdot 10^{-5}$.

`Primjer broj 3`

1. Dokazati teoremu o ocjeni greške u slučaju metode tangente.

2. Metodom proste iteracije ili Newtonovom metodom naći približnu vrijednost jednog rješenja jednačine $x^2 = e^x + 2$ na pet tačnih decimala. To znači da greška približne vrijednosti može da iznosi do (najviše) $\frac{1}{2}\cdot 10^{-5}$ ili eventualno do (najviše) 10^{-5}. Računa se dok se x_{n-1} i x_n ne poklope na pet decimala.

3. Riješite problem početnih vrijednosti (Cauchyev problem) $x^2y' + xy = 1$, $x > 0$, $y(1) = 4$.

4. Razmotrimo početni problem (problem inicijalnih vrijednosti)

$$y' = x + y, \;\; y(1) = 2.$$

Treba odrediti njegovo približno rješenje u intervalu $1 \le x \le 1{,}2$ sa korakom $h = 0{,}1$. Primijenite modifikovanu Ojlerovu metodu (poboljšanu Ojlerovu metodu). Računati sa četiri ili pet decimala.

Znači da treba izračunati y_1 i y_2.

5. Naći rješenje graničnog problema (problema graničnih vrijednosti)

$$y'' + 4y' + 3y = 0, \;\; y(0) = 0, \;\; y(1) = 1.$$

`Primjer broj 4`

1. Kako glase formule za metodu Runge–Kuta četvrtog reda (RK4).

2. Metodom proste iteracije ili Newtonovom metodom naći približnu vrijednost jednog rješenja jednačine $x = e^{-x}$ na pet tačnih decimala. To znači da greška približne vrijednosti može da iznosi do (najviše) $\frac{1}{2}\cdot 10^{-5}$ ili eventualno do (najviše) 10^{-5}. Računa se dok se x_{n-1} i x_n ne poklope na pet decimala.

3. Riješite problem početnih vrijednosti (Cauchyev problem) $y' = x + y$, $y(0) = 2$.

4. Razmotrimo početni problem (problem inicijalnih vrijednosti)

$$y' = 2x + 2y, \;\; y(1) = 2.$$

Treba odrediti njegovo približno rješenje u intervalu $1 \le x \le 1{,}2$ sa korakom $h = 0{,}1$. Primijenite metodu Runge–Kuta drugog reda. Računati sa četiri ili pet decimala.

U ovom zadatku, pod metodom Runge–Kuta drugog reda podrazumijeva se metoda čije formule glase $k_1 = hf(x_i, y_i)$, $k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$, $y_{i+1} = y_i + k_2$ za $i \ge 0$. Očito da k_1 i k_2 zavise od i. Na bazi (x_i, y_i) određujemo (x_{i+1}, y_{i+1}).

Znači da treba izračunati y_1 i y_2.

5. Razmotrimo problem graničnih vrijednosti

$$y'' + 4y' + 3y = 0, \;\; y(0) = 0, \;\; y(1) = 1.$$

Primjenom metode konačnih razlika, želimo da odredimo njegovo približno rješenje sa $n = 4$ (znači $h = 0{,}25$). U tom cilju, treba formirati sistem diferencnih jednačina po nepoznatim $y_0, \ldots, y_n$. Samo treba formirati sistem diferencnih jednačina, ne treba ga rješavati.