D smjer (Računarstvo i informacione tehnologije). **Programiranje II (četvrti semestar).** Ogledni primjeri pitanja za Kolokvijum (20 poena). Od naslova 2.1. Strukture podataka: liste, redovi i stekovi do naslova 5.7. Zadatak o trgovačkom putniku i backtracking. Doći će dva pitanja iz teorije + jedan zadatak iz Matematičke pripreme (rekurentne relacije).

Najvažnija pitanja su:
teorija: 1–7, 11–13, 15, 17, 20–21, 26, 28–29, 31,
zadaci: 52–57, 68–71, 73–82.

⋈ Razrada efikasnih algoritama

1. Dva načina za memorijsko predstavljanje liste i algoritam za operaciju INSERT. 2. Predstavljanje steka (stack) i algoritmi za operacije. 3. Pojam reda (queue), njegovo predstavljanje, operacije sa redom i kružno svojstvo predstavljanja. 4. Pojam usmjerenog i neusmjerenog grafa. Predstavljanje pomoću matrice susjednosti (matrice koincidencije) ili pomoću listi susjednosti. 5. Pojam binarnog drveta. Njegovo predstavljanje pomoću dva niza LEFTSON i RIGHTSON. 6. Obilazak binarnog drveta po prednjem, srednjem i zadnjem redosljedu (preorder, inorder i postorder). Navesti primjer. 7. Algoritam (sa upotrebom rekurzije) za inorder numeraciju vrhova binarnog drveta. 8. Kako se rekurzivni algoritam prevodi u kod za RAM, odnosno RASP. 9. Podijeli pa vladaj: zadatak o najvećem i najmanjem članu skupa. Kolika je složenost algoritma? 10. Podijeli pa vladaj: zadatak o množenju dva broja. Kolika je složenost algoritma? 11. Algoritam MERGESORT. Kolika je složenost. 12. Dinamičko programiranje: zadatak o optimalnom rasporedu prilikom množenja n matrica $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$.

⋈ Uređivanje

13. Radikalno uređivanje niza riječi jednake dužine. 14. Radikalno uređivanje niza riječi u slučaju kada svaka riječ ima svoju dužinu. 15. Donja granica složenosti T_0 algoritama za uređivanje n brojeva (potreban broj operacija poređenja kao funkcija od n). 16. U glavnim crtama o algoritmu HEAPSORT. 17. Algoritam QUICKSORT. 18. Jedan algoritam za rješavanje zadatka Order statistics.

⋈ Strukture podataka za skupove

19. U glavnim crtama o hešovanju. 20. Binarno pretraživanje tj. traženje u uređenom nizu. Kolika je složenost za SEARCH$(a, 1, n)$. 21. Šta znači da je T drvo binarnog pretraživanja za skup S. Algoritam za naredbu MEMBER(a, S) i za INSERT(a, S). 22. Šta znači da je T drvo binarnog pretraživanja za skup S. Algoritam za operaciju MIN(S), kao i za DELETE(a, S). 23. U glavnim crtama o algoritmu za optimalno drvo binarnog pretraživanja. 24. U glavnim ctrama o jednostavnom algoritmu za uniju dva disjunktna skupa. 25. Šeme (algoritmi) koji koriste balansirana drveta.

⋈ Algoritmi na grafovima

26. Kruskalov algoritam za drvo koje povezuje (obuhvatno drvo, engl. spanning tree) čija je cijena minimalna. 27. Obilazak grafa po dubini (engl. depth–first search). 28. Algoritam za tranzitivno zatvorenje (graf) tj. da li postoji put od vrha v ka vrhu w (Warshall). 29. Algoritam za najkraći put (graf) tj. zadatak o najkraćem putu od vrha v ka vrhu w (Floyd). 30. Zadatak o jednom izvoru (najkraći putevi za jedan izvor), Dijkstra. 31. Pokušavam i vraćam se (backtracking) naspram iscrpnog pregledanja (exhaustive search) – objasniti, eventualno i pomoću primjera.

Programiranje II, Zadaci za vježbu – **Matematička priprema**: I Matematička indukcija, II Oznaka veliko–o, III Rekurentne formule. Iz knjige Parberry: Problems on Algorithms.

I Matematička indukcija 1) Zbirovi

1. Dokazti da je $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ za $n \geq 1$. 2. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. 3. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. 4. $\sum_{i=0}^{n}(2i+1)^2 = \frac{1}{3}(n+1)(2n+1)(2n+3)$. 5. $\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$. 6. $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$. 7. $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$. 8. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^n}$. 9. $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ $(a \neq 1)$, zbir geometrijske progresije. 10. $\sum_{i=j}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-a^j}{a-1}$ $(a \neq 1)$. 11. $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. 12. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$. 13. $\sum_{i=1}^{n} i2^i = (n-1)2^{n+1} + 2$.

2) Nejednakosti

14. Dokazati da je $(1+x)^n \geq 1+nx$, za $n \geq 1$, $x \geq -1$, Bernulijeva nejednakost (Bernoulli). 15. $3^n < n!$ za $n \geq 7$. 16. $n^2 < 2^n$ za $n \geq 5$. 17. $\sum_{i=1}^{n} i^k \leq \frac{1}{2}n^k(n+1)$, $k \geq 1$. 18. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$, $n \geq 2$.

3) Djeljivost

19. Dokazati da je broj $n^3 + 2n$ djeljiv sa 3 za $n \geq 0$. 20. Dokazati da je $n^5 - n$ djeljiv sa 5, $n \geq 0$. 21. $5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1$ je djeljiv sa 8, $n \geq 0$. 22. Broj je djeljiv sa 3 ako i samo ako je zbir njegovih cifara djeljiv sa 3. 23. Broj je djeljiv sa 9 ako i samo ako je zbir njegovih cifara djeljiv sa 9. 24. Zbir kubova tri uzastopna prirodna broja je djeljiv sa 9.

4) Poštanske marke

25. Pokazati da se svako pismo veće od 7 centi može obrazovati upotrebom samo markica od 3 i 5 centi. 26. Pokazati da se svako pismo veće od 34 centa može obrazovati upotrebom samo markica od 5 i 9 centi. 27. Pokazati da se svako pismo veće od 5 centi može obrazovati upotrebom samo markica od 2 i 7 centi. 28* Neka je $m \geq 1$, $n \geq 1$, $\mathrm{NZD}(m,n) = 1$. Pokazati da postoji $k \geq 1$ takav da se svako pismo veće od k centi može obrazovati upotrebom samo markica od m i n centi.

5) Fibonačijevi brojevi

29. Znamo da je $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$. Dokazati da je $\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$. 30. $f_{n+k} = f_{n-1}f_k + f_n f_{k+1}$. 31. $\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_n f_{n+1}$. 32. $f_{n+1}f_{n+2} = f_n f_{n+3} + (-1)^n$. 33. $f_{n-1}f_{n+1} = f_n^2 + (-1)^n$.

6) Binomni koeficijenti

34. Znamo da je $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Dokazati da je $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$. 35. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. 36. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, Njutnova binomna formula. 37. $\binom{n}{k} \leq n^k$, $1 \leq k \leq n$. 38. $\sum_{i=0}^{n} i \cdot \binom{n}{i} = n2^{n-1}$. 39. $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i}\binom{n}{i} = \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

II Oznaka veliko–o

40. Neka je $f(n) = 6n$, $g(n) = \frac{1}{2}(n^2 - n)$. Dokazati da važi $f(n) \ll g(n)$ (f je nižeg reda od g). 41. $f(n) = n + 2\sqrt{n}$, $g(n) = n^2$. 42. $f(n) = n + \log_2 n$, $g(n) = n\sqrt{n}$. 43. $f(n) = n^2 + 3n + 4$, $g(n) = n^3$. 44. $f(n) = n \log_2 n$, $g(n) = \frac{1}{2}n\sqrt{n}$. 45. $f(n) = \sqrt{n}$, $g(n) = n + \log_2 n$. 46. Neka je $f(n) = 2n^2 + 1$, $g(n) = n^2$. Dokazati da su $f(n)$ i $g(n)$ istog reda veličine (oznaka Θ). 47. $f(n) = 3n^2 + \sqrt{n}$, $g(n) = n^2$. 48. Neka je $f(n) = n^2 + 2n$, $g(n) = n^2 - 1$. Dokazati da važi $f(n) \sim g(n)$ (f i g su ekvivalentne veličine). 49. $f(n) = 2n^2 + n\sqrt{n}$, $g(n) = 2n^2$. 50. $n^2 \ll 2^n$. 51. $2^n \ll n!$.

III Rekurentne formule 1) Jednostavne rekurentne relacije

52. Neka je $t_1 = 1$ i $t_n = 3t_{n-1} + 2$ za $n \geq 2$. Naći tačno rješenje $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$. 53. $t_1 = 8$, $t_n = 3t_{n-1} - 15$. 54. $t_1 = 2$, $t_n = t_{n-1} + n - 1$. 55. $t_1 = 3$, $t_n = t_{n-1} + 2n - 3$. 56. $t_1 = 1$, $t_n = 2t_{n-1} + n - 1$. 57. $t_1 = 5$, $t_n = 2t_{n-1} + 3n + 1$. 58. $t_1 = 1$ i $t_n = 2t_{n/2} + 6n - 1$ kada je n oblika 2^k. 59. $t_1 = 4$, $t_n = 2t_{n/2} + 3n + 2$, n oblika 2^k. 60. $t_1 = 1$, $t_n = 3t_{n/2} + n^2 - n$, n oblika 2^k. 61. $t_1 = 4$, $t_n = 3t_{n/2} + n^2 - 2n + 1$, n oblika 2^k. 62. $t_1 = 1$, $t_n = 3t_{n/2} + n - 2$, n oblika

2^k. 63. $t_1 = 1$, $t_n = 3t_{n/2} + 5n - 7$, n oblika 2^k.

2) Nešto opštije rekurentne relacije

64. Fibonačijevi brojevi f_n za $n \geq 0$ definisani su rekurzivno kako slijedi: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ i $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ za $n \geq 2$. Dokazati pomoću indukcije po n da je $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$. 65. Neka je x_n broj različitih načina da se postave zagrade u proizvodu sa n članova. Na primjer, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, mogućnosti su $(ab)c$ i $a(bc)$, $x_4 = 5$, mogućnosti su $a((bc)d)$, $a(b(cd))$, $(ab)(cd)$, $((ab)c)d$ i $(a(bc))d$. Dokazati da je $x_n = 1$ za $n \leq 2$, a inače je $x_n = \sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{n-k}$. 66. Pokazati da je $x_n \geq 2^{n-2}$ za svako $n \geq 1$. 67* Pokazati da je $x_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$. 68. Naći tačno rješenje rekurentne relacije $t_1 = 1$, $t_2 = 6$, $t_n = t_{n-2} + 3n + 4$, $n \geq 3$. 69. $t_1 = c$, $t_2 = d$, $t_n = t_{n-2} + n$, $n \geq 3$. 70. $t_1 = 1$, $t_2 = 6$, $t_3 = 13$, $t_n = t_{n-3} + 5n - 9$, $n \geq 4$. 71. $t_1 = 1$, $t_n = 2t_{n-1} + n^2 - 2n + 1$, $n \geq 2$. 72. $t_1 = 1$, $t_n = nt_{n-1} + n$, $n \geq 2$.

IV Iz Gavrilov, Sapoženko

73. Naći opšte rješenje rekurentne relacije $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$. 74. $a_{n+2} + 3a_n = 0$. 75. $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$. 76. $a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 0$. 77. $a_{n+3} + 10a_{n+2} + 32a_{n+1} + 32a_n = 0$. 78. $a_{n+3} + 3a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0$. 79. Naći a_n iz rekurentne relacije i početnih uslova: $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$, $a_1 = 10$, $a_2 = 16$. 80. $a_{n+3} - 3a_{n+2} + a_{n+1} - 3a_n = 0$, $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_3 = 27$. 81. $a_{n+3} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$, $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$. 82. $a_{n+2} - 2\cos\alpha a_{n+1} + a_n = 0$, $a_1 = \cos\alpha$, $a_2 = \cos 2\alpha$. 83. Dokazati: ako $x = 1$ nije korijen polinoma $x^2 + px + q$ onda je partikularno rješenje jednačine $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = \alpha n + \beta$ (1), gdje su p, q, α, β – dati brojevi, niz $a_n^* = an + b$; naći a i b. Naći opšte rješenje relacije (1). 84. Ako je $x = 1$ – prost korijen polinoma $x^2 + px + q$ onda postoji partikularno rješenje oblika $a_n^* = n(an + b)$; naći a i b. Naći opšte rješenje relacije (1). 85. Ako je $x = 1$ – dvostruki korijen polinoma $x^2 + px + q$ onda postoji partikularno rješenje oblika $a_n^* = n^2(an + b)$; naći a i b. Naći opšte rješenje relacije (1) (u razmatranom slučaju). 86. Riješiti rekurentnu relaciju: $a_{n+1} - a_n = n$, $a_1 = 1$. 87. $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 27 \cdot 5^n$, $a_1 = -9$, $a_2 = 45$. 88. $a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = 6n^2 - 4n - 17$, $a_1 = 3$, $a_2 = 15$, $a_3 = 41$. 89. Neka je $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ niz Fibonačijevih brojeva. Dokazati da je za ma koje m i $n = km$, broj f_n djeljiv sa f_m. 90. Dva susjedna broja f_n i f_{n+1} su uzajamno prosti.

Rješenja za IV. 73. $c_1 + c_2 3^n$. 74. $c_1(\sqrt{-3})^n + (-1)^n c_2(\sqrt{-3})^n$. 75. $c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. 76. $(-1)^n(c_1 + c_2 n)$. 77. $(c_1 + c_2 n)(-4)^n + c_3(-2)^n$. 78. $(-1)^n(c_1 + c_2 n + c_3 n^2)$. 79. Opšte rješenje ima oblik $a_n = c_1 + c_2 3^n$. Iz početnih uslova imamo $c_1 + 3c_2 = 10$, $c_1 + 9c_2 = 16$, odakle je $c_1 = 7$, $c_2 = 1$. Prema tome, $a_n = 7 + 3^n$. 80. $3^n + i^n + (-i)^n$. 81. $c_1 + c_2 n + c_3(-2)^n$, gdje je $c_1 = \frac{14-b-4c}{9}$, $c_2 = \frac{b+c-2a}{3}$, $c_3 = \frac{2b-c-a}{18}$. 82. $\cos n\alpha$. 83. $a = \frac{\alpha}{1+p+q}$, $b = \frac{(1+p+q)\beta - \alpha(2+p)}{(1+p+q)^2}$. 84. $a = \frac{\alpha}{2p+4}$, $b = \frac{\alpha(-p-4)+2\beta(p+2)}{2(2+p)^2}$. 85. $a = \frac{\alpha}{6}$, $b = \frac{\beta-\alpha}{2}$. 86. $1 + \frac{n(n-1)}{2}$. Partikularno rješenje jednačine $a_{n+1} - a_n = n$ tražimo u obliku $a_n^* = n(an + b)$. Kada zamijenimo a_n^* u polaznu relaciju, nalazimo da je $a_n^* = \frac{n(n-1)}{2}$. Pomoću smjene $a_n = \frac{n(n-1)}{2} + b_n$ imamo $b_{n+1} - b_n = 0$. Otuda je $b_n = c$, gdje je c – konstanta, i $a_n = \frac{n(n-1)}{2} + c$. Iz početnog uslova dobijamo da je $c = 1$. 87. $-2(-4)^n + 3 \cdot 2^n + 5^n$. Uputstvo: partikularno rješenje tražimo u obliku $a_n^* = c \cdot 5^n$. 88. $0{,}5 + 50 \cdot 2^n + 6{,}5 \cdot 3^n - 4n^3 - 13n^2 - 50n$. 89. Koristiti $f_{n+m} = f_{n-1}f_m + f_n f_{m+1}$ i sprovesti indukciju po k.

Opšte rješenje jednačine $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ glasi $a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$, gdje su λ_1 i λ_2 rješenja jednačine $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, ako je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, a ako je $\lambda_1 = \lambda_2$ onda opšte rješenje glasi $a_n = (c_1 + c_2 n)\lambda_1^n$. Jednačina oblika $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 2n + 3$ ili $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = a^n$ rješava se po analogiji sa jednačinom $y'' + py' + qy = 2x + 3$, odnosno $y'' + py' + qy = e^{ax}$.

Teorema. Neka je $a, b, c \geq 0$. Rješenje rekurentne relacije $T(n) = \{$ b za $n = 1$, $aT(n/c) + bn$ za $n > 1$, kada je n stepen od c je $T(n) = \{$ $O(n)$ ako je $a < c$, $O(n \log_2 n)$ ako je $a = c$, $O(n^{\log_c a})$ ako je $a > c$.