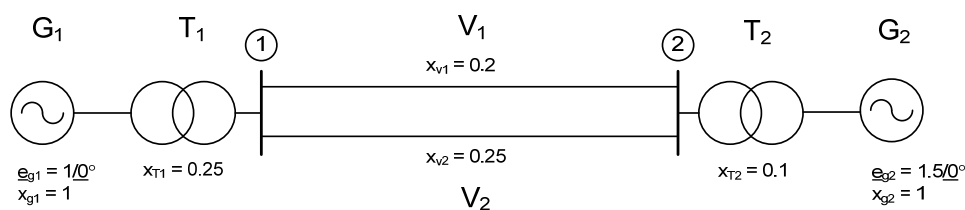


12. Odrediti napone i struje grana koristeći matricni metod napona nezavisnih čvorova za dio elektroenergetskog sistema prikazanog na slici. Sve vrijednosti date su u relativnim jedinicama.



RJEŠENJE:

Matematički model matricnog metoda napona nezavisnih čvorova

$$Y_B V_B = I_B$$

$$I_B = AJ$$

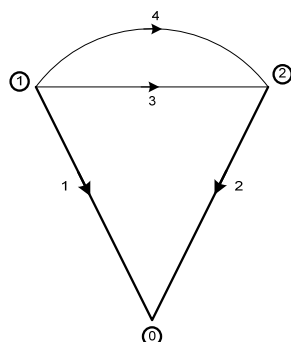
$$J = I_g - YU_g$$

$$Y_B = AYA^t$$

$$U = A^t V_B$$

$$I = YU - J = Y(U + U_g) - I_g$$

Prvi korak je formiranje grafa mreže



Na grafu je potrebno označiti stablo (deblja linija tj. grane 1 i 2). Grane koje ne pripadaju stablu grafa su elementi kostabla (komplement stabla). Sada se formiraju matrica incidencije grana u čvorove A i sve ostale matrice parametara mreže i režima.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ Matrice admitansi grana, struja strujnih generatora i napona naponskih}$$

generatora
su

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{j(x_{g1} + x_{T1})} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{j(x_{g2} + x_{T2})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{jx_{v1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{jx_{v2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j5 \end{bmatrix} \quad I_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad U_g = \begin{bmatrix} -1 \\ -1.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sada je matrica koja sadrži informaciju o svim izvorima u mreži (svođenje naponskih generatora na strujne)

$$J = I_g - YU_g = \begin{bmatrix} -j0.8 \\ -j1.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Posmatrajući osnovnu jednačinu matematičkog modela matricnog metoda napona nezavisnih čvorova, $Y_B V_B = I_B$ uočava se nepoznata veličina I_B koja je

$$I_B = AJ = \begin{bmatrix} -j0.8 \\ -j1.5 \end{bmatrix}$$

i matrica admitansi nezavisnih čvorova Y_B

$$Y_B = AYA^t = \begin{bmatrix} -j9.8 & j9 \\ j9 & -j10 \end{bmatrix}$$

Sada je moguće proračunati matricu napona nezavisnih čvorova

$$V_B = Y_B^{-1} I_B = \begin{bmatrix} j0.588 & j0.529 \\ j0.529 & j0.576 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -j0.8 \\ -j1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.264 \\ 1.287 \end{bmatrix}$$

Na kraju, potrebno je proračunati sve napone i struje grana ispitivane mreže

$$U = A^t V_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.264 \\ 1.287 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.264 \\ 1.287 \\ -0.023 \\ -0.023 \end{bmatrix}$$

$$I = Y(U + U_g) - I_g = \begin{bmatrix} -j0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j5 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1.264 \\ 1.287 \\ -0.023 \\ -0.023 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} -j0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.264 \\ -0.213 \\ -0.023 \\ -0.023 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j0.211 \\ j0.211 \\ j0.094 \\ j0.117 \end{bmatrix}$$

Time su proračunate naponsko strujne prilike u mreži iz zadatka koristeći metod napona nezavisnih čvorova.

13. Odrediti napone i struje grana koristeći matricni metod struja nezavisnih kontura za dio elektroenergetskog sistema prikazanog na slici iz prethodnog zadatka. Sve vrijednosti date su u relativnim jedinicama.

RJEŠENJE:

Matematički model metoda struja nezavisnih kontura je

$$Z_L I_L = V_L$$

$$V_L = BE$$

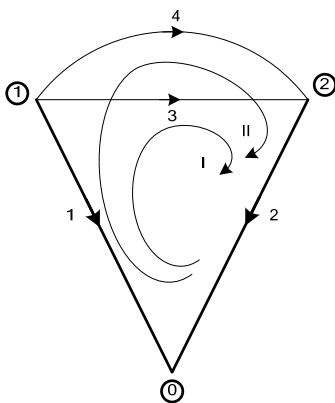
$$E = U_g - ZI_g$$

$$Z_L = BZB^t$$

$$I = B^t I_L$$

$$U = ZI - E = Z(I + I_g) - U_g$$

Ako se formira graf mreže



Primjećuje se da je za razliku od prethodnog zadatka prisutno i označavanje nezavisnih kontura (usmjerene su u smjeru spojnica (grane kostabla)). Sada se formira matrica incidencije grana u konture B,

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice ostalih poznatih parametara

$$Z = \begin{bmatrix} j(x_{g1} + x_{T1}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j(x_{g2} + x_{T2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & jx_{v1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & jx_{v2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j1.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j0.2 \end{bmatrix} \quad I_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad U_g = \begin{bmatrix} -1 \\ -1.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kako bi se proračunale vrijednosti struja nezavisnih kontura, određuje se

$$E = U_g - ZI_g = \begin{bmatrix} -1 \\ -1.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{sada je} \quad V_L = BE = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad Z_L = BZB^t = \begin{bmatrix} j2.5 & j2.25 \\ j2.25 & j2.45 \end{bmatrix}$$

Matrica struja nezavisnih kontura je

$$I_L = Z_L^{-1} V_L = \begin{bmatrix} -j2.306 & j2.118 \\ j2.118 & -2.353 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j0.094 \\ j0.117 \end{bmatrix}$$

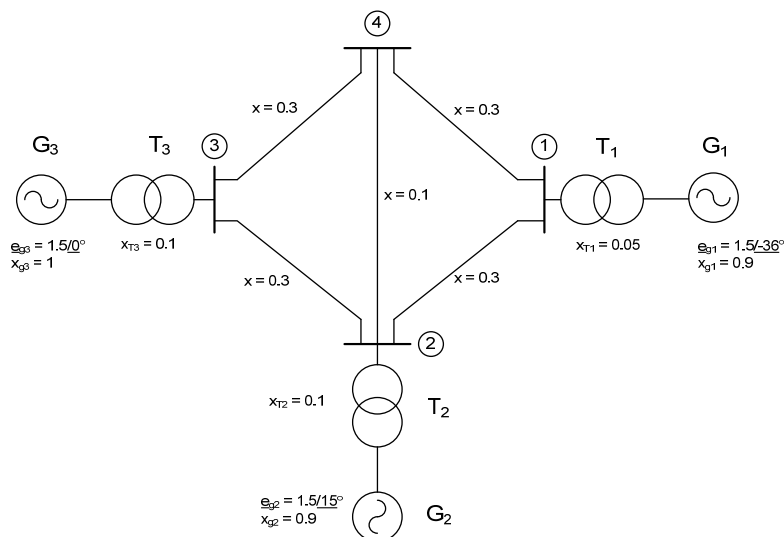
Matrica struja grana je

$$I = B^t I_L = \begin{bmatrix} -j0.211 \\ j0.211 \\ j0.094 \\ j0.117 \end{bmatrix} \quad \text{a matrica napona grana}$$

$$U = ZI - E = Z(I + I_g) - U_g = \begin{bmatrix} 1.264 \\ 1.287 \\ -0.023 \\ -0.023 \end{bmatrix}$$

Može se primjetiti da se u oba zadatka očekivano dobijaju isti rezultati.

14. Za elektroenergetski sistem sa slike, odrediti raspodjele struja i napona primjenom metoda napona nezavisnih čvorova (koristiti eliminisanje pasivnih čvorova razbijanjem matrice na blokove). Sve vrijednosti date su u relativnim jedinicama.



RJEŠENJE:

Poznavajući matematički model metoda

$$Y_B V_B = I_B$$

$$I_B = AJ$$

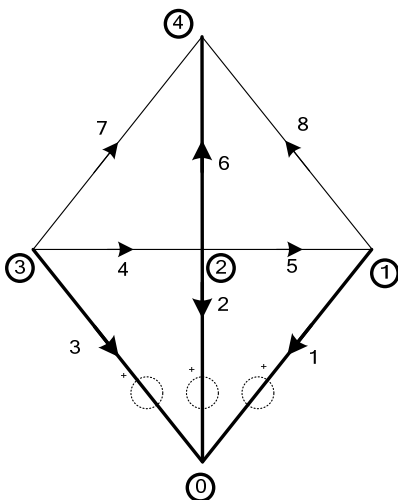
$$J = I_g - YU_g$$

$$Y_B = AYA^t$$

$$U = A^t V_B$$

$$I = YU - J = Y(U + U_g) - I_g$$

formira se graf mreže



i sve potrebne matrice sa ulaznim podacima.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \text{matrica incidencije grana u čvorove}$$

$$I_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad U_g = \begin{bmatrix} -E_1 \\ -E_2 \\ -E_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1.21 - j0.88) \\ -(1.45 + j0.39) \\ -1.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{matrica struja SG i napona NG}$$

$$Y = \begin{bmatrix} -j1.053 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j0.909 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j3.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -j3.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -j3.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -j3.3 \end{bmatrix} \text{matrica admitansi grana}$$

Sada je,

$$I_B = AJ = A(I_g - YU_g) = -AYU_g = \begin{bmatrix} -0.9263 - j1.2632 \\ 0.39 - j1.45 \\ -j1.3636 \\ \hline 0 \end{bmatrix}$$

Uočava se da postoje 4 nezavisna čvora u mreži (graf) što ukazuje da će matrica Y_B biti dimenzija 4x4, što u stvari predstavlja dimenzionalnost problema. Prethodno rečeno proizilazi iz činjenice da je najzahtjevniji dio proračuna ovom metodom inverzija matrice Y_B . Veća dimenzija matrice izaziva veće opterećenje proračuna, što je naročito izraženo kod sistema sa velikim brojem čvorova.

Kako bi se donekle pojednostavio proračun može se uraditi određena modifikacija metode, tzv. eliminacija pasivnih čvorova. Pasivni čvorovi su oni čvorovi u koje se stiču grane koje nemaju generatora (u ovom zadatku je to čvor 4). Tada se može pisati

$$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \underline{Y}_{13} & \underline{Y}_{14} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \underline{Y}_{23} & \underline{Y}_{24} \\ \underline{Y}_{31} & \underline{Y}_{32} & \underline{Y}_{33} & \underline{Y}_{34} \\ \underline{Y}_{41} & \underline{Y}_{42} & \underline{Y}_{43} & \underline{Y}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \\ \underline{V}_3 \\ \underline{V}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{B1} \\ \underline{I}_{B2} \\ \underline{I}_{B3} \\ \underline{I}_{B4} \end{bmatrix}$$

Ako se prethodni izraz napiše u obliku jednačina sa submatricama

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_x \\ \underline{I}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 & \underline{Y}_2 \\ \underline{Y}_3 & \underline{Y}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V}_x \\ \underline{V}_y \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{x - aktivni čvorovi} \\ \text{y - pasivni čvorovi} \end{array}$$

Ako se napiše odgovarajući sistem jednačina

$$\underline{I}_x = \underline{Y}_1 \underline{V}_x + \underline{Y}_2 \underline{V}_y$$

$$\underline{I}_y = \underline{Y}_3 \underline{V}_x + \underline{Y}_4 \underline{V}_y$$

$$\underline{V}_y = -\underline{Y}_4^{-1} \underline{Y}_3 \underline{V}_x$$

$$\underline{I}_x = (\underline{Y}_1 - \underline{Y}_2 \underline{Y}_4^{-1} \underline{Y}_3) \underline{V}_x = \underline{Y}_{red.} \underline{V}_x$$

$$\underline{Y}_{red.} = \underline{Y}_1 - \underline{Y}_2 \underline{Y}_4^{-1} \underline{Y}_3 \quad \text{redukovana matrica admitansi čvorova}$$

Lako je primjetiti da je dimenzija redukovane matrice admitansi manja za broj pasivnih čvorova čime je smanjena dimenzionalnost problema. Na kraju, matrica napona nezavisnih čvorova je

$$\mathbf{V}_x = \mathbf{Y}_{red}^{-1} \mathbf{I}_x = (\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2 \mathbf{Y}_4^{-1} \mathbf{Y}_3)^{-1} \mathbf{I}_x$$

Ako se prethodno modifikovani matematički model metoda napona nezavisnih čvorova primjeni u ovom zadatku, matrica admitansi čvorova podjeljena na submatrice \mathbf{Y}_1 , \mathbf{Y}_2 , \mathbf{Y}_3 i \mathbf{Y}_4

$$\mathbf{Y}_B = \left[\begin{array}{ccc|c} -j7.719 & j3.3 & 0 & j3.3 \\ j3.3 & -j17.6 & j3.3 & j10 \\ 0 & j3.3 & -j7.576 & j3.3 \\ \hline j3.3 & j10 & j3.3 & -j16.6 \end{array} \right]$$

sada je redukovana matrica

$$\mathbf{Y}_{red} = \mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2 \mathbf{Y}_4^{-1} \mathbf{Y}_3 = \begin{bmatrix} -j7.063 & j5.3 & j0.6 \\ j5.3 & -j11.6 & j5.3 \\ j0.6 & j5.3 & -j6.909 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_{red}^{-1} = \begin{bmatrix} j0.407 & j0.315 & j0.282 \\ j0.315 & j0.377 & j0.321 \\ j0.282 & j0.321 & j0.42 \end{bmatrix}$$

sada su naponi nezavisnih čvorova

$$\mathbf{V}_x = \mathbf{Y}_{red}^{-1} \mathbf{I}_x = \begin{bmatrix} 1.356 - j0.254 \\ 1.382 - j0.145 \\ 1.395 - j0.136 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}_y = -\mathbf{Y}_4^{-1} \mathbf{Y}_3 \mathbf{V}_x = [1.379 - j0.165] = [\mathbf{V}_4]$$

Na kraju, određuju se naponi i struje grana

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}^t \mathbf{V}_B = \begin{bmatrix} 1.356 - j0.2635 \\ 1.349 - j0.152 \\ 1.395 - j0.143 \\ 0.046 + j0.009 \\ -0.007 + j0.112 \\ -0.025 + j0.02 \\ 0.02 + j0.029 \\ -0.018 - j0.092 \end{bmatrix} \quad \mathbf{I} = \mathbf{Y}(\mathbf{U} + \mathbf{U}_g) - \mathbf{I}_g = \begin{bmatrix} 0.649 - j0.164 \\ -0.542 + j0.101 \\ -0.13 + j0.096 \\ 0.03 - j0.152 \\ 0.373 + j0.023 \\ 0.204 + j0.252 \\ 0.098 - j0.068 \\ -0.305 + j0.061 \end{bmatrix}$$