4. Uvod u vjerojatnost

U životu smo okruženi brojnim procesima čiji ishod ne možemo sa sigurnošću predvidjeti:

- igranje na ruletu,
- ulaganje u dionice,
- meteorološki procesi,
- zaključivanje o svojstvima populacije na osnovi uzorka,
- itd.

Kojim alatom mjerimo tu nesigurnost?
Odgovor je **vjerojatnost**.

Početci vjerojatnosti

- povezani s kockanjem.

de Mere - francuski kockar iz 17. stoljeća:

- zarađivao novac kladeći se da će u četiri bacanja kocke pasti barem jednom 6-ica,
- međutim, novac je gubio kladeći se da će u 24 bacanja dvije kocke barem jednom pasti dvije 6-ice.

Zbog čega?
Obratio se onodobnim francuskim matematičarima B. Pascalu i P. Fermatu, koji su matematički modelirali gornje pokuse te tako udarili temelje teoriji vjerojatnosti.
U ovom predavanju ćemo i mi naučiti kako pomoći de Mere-u i odgovoriti na gornje pitanje.

Pokus i događaj

Slučajni pokus je proces opažanja ili mjerenja statističke jedinice, čiji ishod nije jednoznačno određen uvjetima izvođenja pokusa.

Da li je kemijska reakcija vodika i klora slučajan pokus?

$$H_2 + Cl_2 \rightarrow 2HCl$$

U zadanim uvjetima (temperatura, količina vodika i klora) u reakciji će nastati točno određena količina klorovodika.
To je primjer jednoznačno određenog (determiniranog) pokusa.

Navedite još takvih primjera.

Za vjerojatnost tu nema posla.
Stoga ćemo se baviti slučajnim (nedeterminiranim) pokusima.

Ishode slučajnih pokusa nazivamo **događajima**. (Koristit ćemo velika slova, $A, B, C, \ldots$, za označavanje pojedinih događaja.)

Primjer 4.1. Pretpostavimo da izvlačimo jednu kartu iz špila za bridž. Opažanje ishoda (broj i tip karte) možemo smatrati slučajnim pokusom. Mogući pripadni događaji su:
– izvukli ste pikovu damu,
– izvukli ste tref kartu,
– izvukli ste paran broj.

Drugi primjeri slučajnih pokusa su
– registriranje godišnje stope inflacije u Hrvatskoj,
– rezultati izbora.

Ishodi svakog od gore navedenih pokusa su neizvjesni, tj. prije izvođenja pokusa ne možemo biti sigurni koji će biti njihov ishod.
Tu neizvjesnost mjerimo **vjerojatnošću** pojedinog događaja.

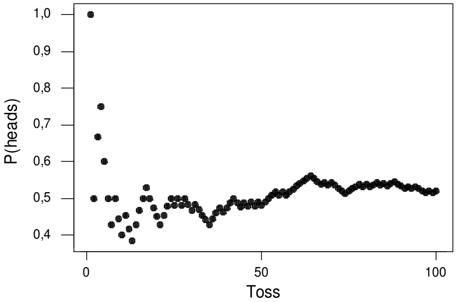
Ali što je to vjerojatnost?

Vjerojatnost događaja

Primjer 4.2. Bacimo novčić i promotrimo da li je palo pismo ili glava.
Definirajmo događaj G - pala je glava.
Naravno, ako je novčić izbalansiran, postoji jednaka mogućnost da novčić padne i na pismo i na glavu, te bi stoga zaključili da je vjerojatnost događaja G, označena s $P(G)$, jednaka 50%, odnosno 0.5 .
Ali što to točno znači?

Rješenje:

To ne znači da će u točno 50% bacanja novčića pasti glava.
To znači da će nakon velikog broja ponavljanja pokusa, odnosno bacanja novčića, glava pasti otprilike polovicu puta.



Definicija vjerojatnosti a posteriori

Vjerojatnost događaja A, u oznaci $P(A)$, se definira kao realan broj između 0 i 1 oko kojeg se grupiraju, tj. kojem teže relativne frekvencije tog događaja. Pišemo

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n},$$

gdje je n ukupni broj pokusa, a m broj pokusa koji su rezultirali događajem A.

Primijetimo da je iz gornjeg zapisa očito $P(A) \in [0,1]$ (jer je $m \leqslant n$).
Nedostaci gornje definicije:
– neki pokusi se ne mogu ponavljati (meteorološki procesi, ulaganje u neki posao, itd),
– gornji limes ne mora postojati,
– za više slijedova ponavljanja pokusa, omjer opažanja događaja A može se razlikovati od slijeda do slijeda.
Stoga nam je potrebna drugačija definicija.

Uzajamno isključujući događaji

Razmotrimo pokus koji se sastoji od bacanja kocke i opažanja broja koji je pao. Definirajmo događaje
A – pao je paran broj,
B – pao je broj 3.
Mogu li se događaji A i B istodobno dogoditi? Očito da ne. Za takve događaje kažemo da se **uzajamno isključuju**.

Primjer 4.3. Provedena je anketa među 500 domaćinstava o korištenju interneta. Neki od mogućih događaja su:
A – točno 287 domaćinstava koristi internet,
B – obitelj Perić koristi internet,
C – manje od 100 domaćinstava koristi internet.
Navedite koji od parova događaja se uzajamno isključuju:
a) A i B **b)** A i C **c)** B i C.

Rješenje:
Naravno, događaji A i C se uzajamno isključuju. Ostala dva para se ne isključuju, jer obitelj Perić može biti jedna od onih 287 (ili 100) koje koriste internet.

Razmotrimo ponovno pokus s kockom. Prilikom bacanja kocke možemo uočiti jedno od sljedećeg:

– broj 1 na gornjoj plohi,
– broj 2 na gornjoj plohi,
– broj 3 na gornjoj plohi,
– broj 4 na gornjoj plohi,
– broj 5 na gornjoj plohi,
– broj 6 na gornjoj plohi.

Svi ovi događaji se međusobno isključuju i predstavljaju osnovne ishode bacanja kocke. U slučaju idealne kocke rekli bismo da svaki od 6 brojeva ima jednaku mogućnost da nastupi kao rezultat bacanja kocke, odnosno da svaki od gore navedenih događaja ima jednaku vjerojatnost, $\frac{1}{6}$.

Slično, temeljni ishodi bacanja novčića su P (palo je pismo) i G (pala je glava) i svakom od njih bi pridružili vjerojatnost $\frac{1}{2}$.

Elementarni događaji su uzajamno isključujući događaji koji predstavljaju osnovne ishode nekog pokusa. Skup svih tih događaja nazivamo **prostorom elementarnih događaja** i označujemo s Ω.

U gornjim primjerima prostori elementarnih događaja bi bili $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, odnosno $\{P, G\}$.

Na skupu elementarnih događaja možemo definirati i složene događaje, kao njegove višečlane podskupove.

Primjer 4.4. Razmotrimo opet primjer bacanja kocke. Za taj pokus možemo definirati složeni događaj
A – uočeni broj je paran.
Taj se događaj razlaže na 3 elementarna događaja:

$$2, 4, 6\,.$$

Kažemo da navedeni elementarni događaji **realiziraju** događaj A.

Ako su osnovni događaji jednako vjerojatni, koja je vjerojatnost nekog složenog događaja?

Definicija vjerojatnosti a priori

Neka imamo slučajan pokus s konačno mnogo, jednako mogućih elemenatarnih događaja n. Tada je vjerojatnost proizvoljnog događaja A vezanog uz taj pokus jednaka broju elementarnih događaja koji realiziraju događaj A, m, podijeljen s ukupnim brojem elementarnih događaja, tj

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

Primijetimo da je i po ovoj definiciji $P(A) \in [0, 1]$ (jer je $m \leqslant n$).
Nedostaci gornje definicije:
– definicija vjerojatnost se temelji na pretpostavci jednake mogućnosti (vjerojatnosti),
– ne možemo izračunati vjerojatnost da će nepravilna kocka pasti na, recimo, broj 3.
Stoga je potrebna strogo matemtička (aksiomatska) izgradnja teorije vjerojatnosti, koju ćemo uvesti kasnije.
Međutim, definicija nam daje vjerojatnost događaja iz prethodnog primjera. Vidimo da je

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Primjer 4.5. Bačene su dvije kocke i zapisani brojevi na njihovim gornjim plohama. Kolika je vjerojatnost da je zbroj ta dva broja jednak 7?

Rješenje:
Prostor elementarnih događaja se sastoji od skupa parova

$$(1,1),(1,2),...,(6,6)$$

(njih 36).
Zanima nas za koliko od tih događaja je zbroj jednak 7?
Ako s A označimo događaj: zbroj uočenih brojeva je jednak 7, onda vrijedi da je

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},$$

jer 6 elementarnih događaja $(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$ realizira A.

∎

Od posebnog interesa su događaji čija vjerojatnost je jednaka 1, to su tzv. **sigurni događaji**.
Nasuprot njima imamo događaje čija vjerojatnost je 0, to su **nemogući događaji**, oni se nikad neće dogoditi.

U prethodnom primjeru nemogući događaj bi bio
N – zbroj uočenih brojeva je 13.

Siguran događaj bi pak bio
S – produkt uočenih brojeva je manji od 100.

Svojstva vjerojatnosti

Aditivno pravilo vjerojatnosti za uzajamno isključujuće događaje

Ako se dva događaja A i B uzajamno isključuju, onda je vjerojatnost da se dogodi ili A ili B ili oba jednaka zbroju njihovih vjerojatnosti:

$$P(A \text{ ili } B) = P(A) + P(B). \tag{1}$$

Umjesto pisanja veznika *ili* koristit ćemo oznaku unije iz teorije skupova i pisati $A \cup B$.

Dem. Neka m elementranih događaja realizira A, te njih l realizira B. Zbog pretpostavke o uzajamnoj isključivosti, ti događaji su svi različiti, pa je broj povoljnih događaja za $A \cup B$ jednak $m + l$.
Stoga je po definiciji vjerojatnosti a priori

$$P(A \cup B) = \frac{m+l}{n} = \frac{m}{n} + \frac{l}{n} = P(A) + P(B).$$

Q.E.D.

Pravilo se može poopćiti i na konačan broj uzajamno isključujućih događaja, tj.

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

Pri tom pretpostavljamo da se **svaki** par gornjih događaja A_i, A_j, $i \neq j$, uzajamno isključuje.

Primjer 4.6. Razmotrimo opet primjer sa dvije kocke. Zanima nas kolika je vjerojatnost da je zbroj uočenih brojeva 4 ili 7?

Rješenje:
Definirajmo događaje:
A – zbroj uočenih brojeva je jednak 7,
B – zbroj uočenih brojeva je jednak 4.
Gornji događaji se očito uzajamno isključuju, pa je

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Kako smo $P(A)$ već našli, ostaje na isti način izračunati da je $P(B) = \frac{3}{36}$, te je stoga tražena vjerojatnost

$$P(A \cup B) = \frac{6}{36} + \frac{3}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

Suprotni događaji

Razmotrimo opet primjer bacanja 2 kocke, te definirajmo događaje
A – zbroj uočenih brojeva je jednak 7,
B – zbroj uočenih brojeva nije 7.
Vidimo da događaj B predstavlja negaciju događaja A, tj. to je događaj da se A ne dogodi. Takav događaj zovemo **suprotnim događajem** od A i označujemo ga s $\bar{A}$.
Kolika je njegova vjerojatnost? $P(\bar{A}) = \frac{5}{6}$

Pravilo vjerojatnosti za suprotne događaje

Ako je $P(A)$ vjerojatnost događaja A, onda je vjerojatnost njemu suprotnog događaja jednaka

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Pravilo je korisno u slučajevima kad je lakše izračunati vjerojatnost suprotnog, nego vjerojatnost samog događaja (vidi primjer 4.11).

Uvjetna vjerojatnost

U dosadašnjim primjerima pri računanju vjerojatnosti nismo postavljali nikave dodatne uvjete, osim onih koji definiraju sam eksperiment. Međutim, ponekad želimo izračunati vjerojatnost nekog događaja kad znamo neke dodatne podatke koji mogu utjecati na rezultat pokusa. Npr. vjerojatnost da će danas pasti kiša ako znamo da će biti sunčan dan jednaka je 0.
Promotrimo i primjer s dvije kocke. Izračunali smo da je

$$P(\text{zbroj} = 7) = \frac{1}{6}.$$

Ali da nam je netko rekao da je dobiveni zbroj paran, intuitivno uočavamo da je u tom slučaju $P(\text{zbroj} = 7) = 0$.
U gornjim primjerima smo računali vjerojatnost nekog događaja, pri tom uzimajući u obzir neke dodatne informacije (sunčan dan, paran zbroj).

Vjerojatnost događaja A, ako znamo da se dogodio događaj B se zove **uvjetna vjerojatnost** od A uz uvjet B.
Označujemo ju s $P(A|B)$ (čitaj "vjerojatnost od A uz uvjet B").

Primjer 4.7. Kutija sadrži tri osigurača, jedan ispravan i dva neispravna. Izvlačimo nasumce dva osigurača, jedan za drugim.
a) Kolika je vjerojatnost da je drugi izvučeni osigurač neispravan?
b) Kolika je vjerojatnost da je drugi izvučeni osigurač neispravan, ako znamo da je i prvi izvučeni bio neispravan?

Rješenje:
a) Označimo događaj
A – drugi izvučeni osigurač je neispravan.
Tražimo $P(A)$.
Ako osigurače označimo s I, N_1, N_2 prostor elementarnih događaja je

$$\{(I, N_1), (I, N_2), (N_1, I), (N_1, N_2), (N_2, I), (N_2, N_1)\}.$$

Izvlačimo nasumce $\Leftrightarrow$ svi navedeni događaji imaju jednaku vjerojatnost.
Događaji koji realiziraju A su $(I, N_1), (I, N_2), (N_1, N_2), (N_2, N_1)$, te je stoga

$$P(A) = \frac{4}{6}.$$

b) Označimo događaj
B – prvi izvučeni osigurač je neispravan.
Tražimo $P(A|B)$.
Ako je prvi izvučeni osigurač neispravan, u kutiji su tad ostala dva, jedan ispravan, a drugi neispravan, pa je tražena vjerojatnost $= \frac{1}{2}$.
Rezultat se također mogao dobiti prebrojavanjem povoljnih elementarnih događaja ($(N_1, N_2), (N_2, N_1)$). ■

Vidimo da je u ovom primjeru

$$P(A) \neq P(A|B).$$

Primjer 4.8. U 10 bacanja novčića 10 puta je pala glava. Ako novčić bacimo 11 put, koja je vjerojatnost da će pasti pismo?

Rješenje:
Označimo događaje
A – u 11. bacanju je palo pismo,
B – u prvih 10 bacanja je 10 puta pala glava.
Tražimo $P(A|B)$.
Znamo da je $P(A) = \frac{1}{2}$.
Da li se vjerojatnost pojavljivanja pisma u 11. bacanju mijenja ako znamo rezultate prijašnjih bacanja? NE (provjereno eksperimentalno i teoretski).
Stoga je

$$P(A|B) = P(A) = \frac{1}{2}.$$

∎

Neovisni događaji

U zadnjem primjeru vjerojatnost događaja A nije ovisila o tom je li se dogodio i događaj B.

Neovisni događaji

Dva događaja A i B su neovisni ako je

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{ili} \quad P(B|A) = P(B).$$

Ako A i B nisu nemogući događaji, onda svaka od gornjih jednakosti automatski povlaći i drugu (dovoljno je provjeriti samo jednu).

Multiplikativno pravilo vjerojatnosti za neovisne događaje

Ako su događaji A i B neovisni, onda je vjerojatnost da se ona oba dogode jednaka umnošku njihovih vjerojatnosti:

$$P(A \text{ i } B) = P(A) \cdot P(B). \tag{2}$$

Umjesto pisanja $A \text{ i } B$ koristit ćemo odgovarajuću oznaku unije iz teorije skupova i pisati $A \cap B$.

Pravilo se može poopćiti i na konačnu familiju neovisnih događaja, tj.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \cdots \cdot P(A_n).$$

Pri tom kažemo da događaji $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tvore **familiju neovisnih događaja** ako je svaki par događaja iz te familije neovisan, tj. ako je $P(A_i|A_j) = P(A_i)$ za svaki $i, j = 1..n$, $i \neq j$.

Primjer 4.9. Nađite vjerojatnost da u 2 bacanja novčića oba puta padne glava.

Rješenje:

Označimo događaje

A – u 1. bacanju je pala glava

B – u 2. bacanju je pala glava.

Budući da su različita bacanja i njihovi ishodi međusobno neovisni, to je

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

∎

Primjer 4.10. Nađite vjerojatnost da u 10 bacanja novčića svih 10 puta padne glava.

Rješenje: $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$.

Primjer 4.11. Nađite vjerojatnost da je u 10 bacanja novčića barem jednom palo pismo.

Rješenje:

Definirajmo događaj

A – u 10 bacanja je barem jednom palo pismo.

Što je $\bar{A}$?

$\bar{A}$ – u 10 bacanja svih 10 puta je pala glava.

Stoga je

$$P(A) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}.$$

■

Multiplikativno pravilo vjerojatnosti

Što ako događaji nisu neovisni?
Kako onda glasi formula za vjerojatnost presjeka?

Multiplikativno pravilo vjerojatnosti

Za dva događaja A i B vrijedi da je

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Primijetimo da u slučaju neovisnih događaja dobivamo prethodnu formulu (2).

Primjer 4.12. Razmotrimo opet primjer s osiguračima (4.7). Nađite vjerojatnost da u oba izvlačenja izvučete neispravni osigurač.
Rješenje:
Definirajmo događaje
A – u drugom izvlačenju je izvučen neispravni osigurač,
B – u prvom izvlačenju je izvučen neispravni osigurač.
Tražimo $P(A \cap B)$.
Iz primjera 4.7 znamo da je $P(A|B) = \frac{1}{2}$.
S druge strane $P(B) = \frac{2}{3}$, te je $P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. ∎

Potpuna familija događaja

Razmotrimo još jedan problem vezan uz uvjetnu vjerojatnost, za kojeg ćemo najprije morati rastaviti prostor elementarnih događaja Ω na disjunktne dijelove.
U tu svrhu promotrimo sve elementarne događaje iz pokusa s bacanjem novčića, te bacanja 1, odnosno 2 kocke. Koliki je zbroj vjerojatnosti svih elementarnih događaja?
U svim slučajevima je traženi zbroj jednak 1, i to vrijedi općenito.

Ako je $\Omega = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ prostor elementarnih događaja za neki pokus, tada je

$$P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n) = 1.$$

Zaista, po gore navedenom aditivnom pravilu

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n).$$

Kako $E_1, E_2, \ldots, E_n$ predstavljaju sve osnovne ishode nekog pokusa, (točno) jedan od njih se mora dogoditi, pa stoga njihova unija predstavlja siguran događaj, tj. $P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = 1$.

Potpuna familija događaja

Isto svojstvo vrijedi i za svaki rastav $A_1, \ldots, A_n$ prostora elemetarnih događaja Ω na disjunktne dijelove (događaje koji se međusobno isključuju):

$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1.$$

Takav rastav nazivamo potpunom familijom događaja. Točnije, vrijedi sljedeća definicija.

Skupovi $A_1, \ldots, A_n$ tvore **potpunu familju događaja** ako vrijedi:

a) Skupovi A_i i A_j se uzajamno isključuju za svaki par indeksa $i, j = 1..n, i \neq j$,

b) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Formula potpune vjerojatnosti

Pomoću gore uvedenog pojma možemo sad iskazati sljedeću formulu.

Neka je Ω prostor elementarnih događaja, a $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ potpuna familija događaja. Nadalje, neka je B događaj na istom prostoru sa strogom pozitivnom vjerojatnošću.
Tada vrijedi **formula potpune vjerojatnosti**

$$P(B) = \sum_i P(B \cap A_i) = \sum_i P(A_i)P(B|A_i).$$

Dem. Kako je $B \subseteq \Omega$, to je

$$\begin{aligned} B &= B \cap \Omega \\ &= B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) \\ &= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \cdots \cup (B \cap A_k). \end{aligned}$$

Kako se događaji $(B \cap A_i)$ međusobno isključuju, to je

$$P(B) = \sum_i P(B \cap A_i) = \sum_i P(A_i)P(B|A_i).$$

Q.E.D.

Primjer 4.13. Na tri stroja izrađuje se neki proizvod. Na stroju A_1 izrađuje se 40% ukupne proizvodnje, a registrira prosječno 5% neispravnih proizvoda. Na ostala dva stoja registrira se po 30% ukupne proizvodnje. Pri tom se na stroju A_2 registrira prosječno 4%, a na stroju A_3 3% neispravnih proizvoda. Kolika je vjerojatnost da će slučajno izabrani proizvod biti neispravan?

Rješenje:
Označimo događaje:
B – slučajno izabrani proizvod je neispravan,
A_i – proizvod je proizveden na i-tom stroju, $i \in \{1, 2, 3\}$.
U zadatku se traži $P(B)$, a kako $\{A_1, A_2, A_3\}$ tvore potpunu familiju događaja, to po formuli potpune vjerojatnosti imamo da je

$$P(B) = \sum_i P(A_i)P(B|A_i) = 0.4 \cdot 0.05 + 0.3 \cdot 0.04 + 0.3 \cdot 0.03 = 0.041\,.$$

∎

Bayesova formula

Može se postaviti i ovakvo pitanje: ako je slučajno odabrani proizvod neispravan, kolika je vjerojatnost da je proizveden na i-tom stroju?

Neka je Ω prostor elementarnih događaja, a a $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ potpuna familija događaja. Nadalje, neka je B događaj na istom prostoru sa strogom pozitivnom vjerojatnošću.
Tada vrijedi **Bayesova formula**

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_i P(A_i)P(B|A_i)}, k = 1..n.$$

Dem. Na osnovu formule potpune vjerojatnosti

$$P(B) = \sum_i P(A_i)P(B|A_i).$$

Stoga je

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_i P(A_i)P(B|A_i)}.$$

Q.E.D.

Primjer 4.14. Razmotrimo prethodni primjer i neka je slučajno odabrani proizvod neispravan. Kolika je vjerojatnost da je proizveden na 1. stroju?

Rješenje:

Prema Bayesovoj formuli imamo da je

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_i P(A_i)P(B|A_i)} = \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.4 \cdot 0.05 + 0.3 \cdot 0.04 + 0.3 \cdot 0.03} = 0.487\,.$$

∎

Zadatak 4.1. U velikoj seriji proizvoda 96% proizvoda zadovoljava tehničke uvjete propisane standardom. Proizvodi se podvrgavaju kontroli koja dobar proizvod proglašava ispravnim uz vjerojatnost 0.98, te loš proizvod ispravnim uz vjerojatnost 0.05. Ako kontrola neki proizvod proglasi dobrim, kolika je vjerojatnost da je on i stvarno ispravan?

Aditivno pravilo vjerojatnosti

Sad kad znamo računati vjerojatnost presjeka, možemo izraziti i aditivnu formulu vjerojatnosti koja vrijedi za proizvoljne skupove.

Aditivno pravilo vjerojatnosti

Za dva događaja A i B vrijedi da je

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Primijetimo da se u slučaju uzajamno isključujućih događaja, pravilo svodi na prijašnju formulu (1).

Primjer 4.15. Pokus se satoji od bacanja dva novčića. Neka su zadani događaji

A – pala je barem 1 glava,

B – palo je barem 1 pismo.

Koristeći gornje pravilo nađite vjerojatnost da se dogodi bilo događaj A bilo događaj B.

Rješenje:

Tražimo $P(A \cup B)$.

Prostor elementarnih događaja je skup

$$\{(G, P), (G, G), (P, G), (P, P)\}.$$

Stoga je $P(A) = P(B) = \frac{3}{4}$.

Nadalje, $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$, pa je

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = 1.$$

■