4. Uvod u vjerojatnost

Matematička teorija vjerojatnosti

Prošli sat smo susreli dvije definicije vjerojatnosti – a priori i a posteriori.
Prednosti:

- intuitivno prihvatljive, omogućile nam dobivanja odgovora za niz problema.

Problem:

- definicije povezane s proturječjima i nejasnoćama.

Stoga se pristupilo izgradnji matematičke teorije vjerojatnosti, zasnovane na matematičkim aksiomima.

Matematička teorija vjerojatnosti

Posao (primijenjenih) matematičara – prirodne zakonitosti izraziti kroz matematičku teoriju.
To nazivamo postavljanjem matematičkog modela za sustav empirijskih činjenica.
Takvi modeli se zasnivaju na nekoliko osnovnih aksioma (polazne pretpostavke koje se ne dokazuju), te se daljni razvoj teorije vrši samo na osnovu logičkog zaključivanja.
Važno da su aksiomi u skladu s iskustvenim činjenicama, inače teorija neće biti u skladu s empirijom.
Tako se razvila geometrija (Euklid), kao i mehanika (Newton).

Neka je zadan skup $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$.

Partitivni skup

Partitivni skup, $\mathcal{P}(\Omega)$, skupa Ω se definira kao skup svih njegovih podskupova, tj.

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_1, \omega_2\}, \dots, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \dots, \Omega\}$$

ili

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{A : A \subseteq \Omega\}.$$

Vrijedi da je $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|}$.

U teoriji vjerojatnosti:
– Ω predstavlja prostor elementarnih događaja,
– svaki podskup $A \subseteq \Omega$ predstavlja jedan događaj,
– $\mathcal{P}(\Omega)$ skup svih mogućih događaja za promatrani pokus.

Primjer 4.16. Pokus se satoji od bacanja dva novčića. Registriramo pojavu pisma (P) i glave (G). Elementarni događaji su

$$\omega_1 = (P, P),\ \omega_2 = (P, G),\ \omega_3 = (G, P),\ \omega_4 = (G, G),$$

pa je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Navedite sve moguće događaje ovog pokusa.

Rješenje: Broj svih mogućih događaja je $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|} = 2^4 = 16$.
Redom, to su:
$A_1 = \{\omega_1\}$ – u oba bacanja se pojavilo pismo;
$A_2 = \{\omega_2\}$ – u prvom bacanju se pojavilo pismo, a u drugom glava;
$A_3 = \{\omega_3\}$ – u prvom bacanju se pojavilo glava, a u drugom pismo;
$A_4 = \{\omega_4\}$ – u oba bacanja se pojavila glava;
$A_5 = \{\omega_1, \omega_2\}$ – u prvom bacanju se pojavilo pismo;
$A_6 = \{\omega_1, \omega_3\}$ – u drugom bacanju se pojavilo pismo ;
$A_7 = \{\omega_1, \omega_4\}$ – prvo i drugo bacanje su imali jednake ishode;
$A_8 = \{\omega_2, \omega_3\}$ – prvo i drugo bacanje su imali različite ishode;
$A_9 = \{\omega_2, \omega_4\}$ – u drugom bacanju se pojavila glava;
$A_{10} = \{\omega_3, \omega_4\}$ – u prvom bacanju se pojavila glava;

$A_{11} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ – nisu se pojavile dvije glave;
$A_{12} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}$ – nije nastupio događaj A_3;
$A_{13} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}$ – nije nastupio događaj A_2
$A_{14} = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ – nisu se pojavile dva pisma;
$A_{15} = \Omega$ – palo je barem jedno pismo ili barem jedna glava (siguran događaj - usp. Primjer 4.16);
$A_{16} = \emptyset$ – nije palo niti jedno pismo niti glava (nemoguć događaj).

∎

Algebra događaja

Ako skup događaja $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ zadovoljava

1. $A_i \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bar{A}_i \in \mathcal{A}$,
2. $A_i, A_j \in \mathcal{A} \Longrightarrow A_i \cup A_j \in \mathcal{A}$

onda kažemo da je $\mathcal{A}$ **algebra skupova** (na Ω).

Drugim riječima, algebra je zatvorena na operacije suprotnog događaja i unije.
Iz definicije nužno slijedi da je Ω element svake algebre $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$
Također, na osnovu De Morganovog zakona $A \cap B = \overline{\left(\bar{A} \cup \bar{B}\right)}$, imamo da je algebra zatvorena i na operaciju presjeka.

Primjer 4.17. Neka je Ω prostor elementarnih događaja. Tada

- skup svih mogućih događaja čini algebru $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$,
- najmanja algebra na Ω je $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$,
- najmanja algebra koja sadrži događaj A je $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$.

Vjerojatnosni prostor

Vjerojatnost

Neka je $\mathcal{A}$ algebra događaja na prostoru elementarnih događaja Ω. Funkcija $P : \mathcal{A} \to \mathbf{R}$ naziva se **vjerojatnost na algebri** $\mathcal{A}$ ako vrijede sljedeći aksiomi:

V1. za svaki $A \in \mathcal{A}$ vrijedi $P(A) \geqslant 0$ (nenegativnost);
V2. $P(\Omega) = 1$ (normiranost);
V3. $A, B \in \mathcal{A}, A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (aditivnost).

Za broj $P(A)$ kažemo da je **vjerojatnost događaja** A, a uređenu trojku $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ nazivamo **vjerojatnosni prostor** na algebri $\mathcal{A}$.

Na osnovi polaznih aksioma, moguće je dokazati niz drugih svojstava vjerojatnosti P.

V4. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ (vjerojatnost suprotnog događaja).

Dem. Kako je $A \cap \bar{A} = \emptyset$, te $A \cup \bar{A} = \Omega$, to je na osnovu (V2) i (V3).

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}),$$

iz čega slijedi (V4).

V5. $P(\emptyset) = 0.$

Dem. Kako je $\emptyset \cap \Omega = \emptyset$, te $\emptyset \cup \Omega = \Omega$, to opet na osnovu (V2) i (V3) imamo da je

$$1 = P(\Omega) = P(\emptyset \cup \Omega) = P(\emptyset) + P(\Omega),$$

iz čega slijedi (V5).

Q.E.D.

V6. $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$

Dem. Iz $A \subseteq B$ slijedi da je $B = A \cup (B \setminus A)$ i $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Koristeći (V3) dobijemo da je

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A),$$

iz čega slijedi tvrdnja.

Q.E.D.

Primijetimo da na osnovi (V6) i nenegativnosti vjerojatnosti izravno slijedi
V6.a) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$ (monotonost vjerojatnosti).

V7. Za svaki par događaja $A, B \in \mathcal{A}$ vrijedi aditivno pravilo

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Dem. Kako je $A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$ i $A \cap (B \setminus (A \cap B)) = \emptyset$, to na osnovu (V3)

$$(1) \qquad P(A \cup B) = P(A) + P\left(B \setminus (A \cap B)\right).$$

Nadalje, zbog $A \cap B \subset B$ (V6) daje

$$(2) \qquad P\left(B \setminus (A \cap B)\right) = P(B) - P(A \cap B).$$

Kombinacijom (1) i (2) dobijemo traženo pravilo.

Q.E.D.

Bez dokaza ćemo navesti još neka svojstva vjerojatnosti koja izravno slijede iz gornjih svojstava.

V8. Ako su $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ uzajamno isključujući događaji ($i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$), tada je

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

V9. Ako je $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots B_n\}$ potpuna familija događaja, onda je

$$\sum_{i=1}^{n} P(B_i) = 1.$$

Također vrijedi multiplikativno pravilo, formula potpune vjerojatnosti, Bayesova formula ...

Slučajne varijable

U pravilu ćemo u vjerojatnosnom prostoru uzimati $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ vjerojatnosni prostor. **Slučajna varijabla** X je funkcija koja svakom elementarnom događaju pridružuje realan broj.

Dakle, slučajna varijabla je funkcija $X : \Omega \to \mathbf{R}$. Intuitivno, to je veličina koja se dobije mjerenjem vezanim uz neki pokus.

Primjer 4.18. Pokus se satoji od bacanja dva novčića. Registriramo pojavu pisma (P) i glave (G). Definirajte funkciju X koja predstavlja broj pojavljivanja pisma.

Rješenje:

Kako je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, gdje je

$$\omega_1 = (P, P),\ \omega_2 = (P, G),\ \omega_3 = (G, P),\ \omega_4 = (G, G),$$

to X definiramo na sljedeći način

$$\begin{aligned} X(\omega_1) &= 2, \\ X(\omega_2) = X(\omega_3) &= 1, \\ X(\omega_4) &= 0. \end{aligned}$$

∎

Funkcija X je primjer slučajne varijable.

Općenito, slučajna varijabla može biti

- diskretna – ako poprima konačno ili prebrojivo mnogo vrijednosti,
- neprekidna ili kontinuirana – ako poprima vrijednosti iz nekog intervala.

Primjer diskretnih varijabli su broj zaposlenih u RH, godišnji broj sunčanih sati u Dubrovniku itd.
Napomenimo da ona ne mora biti i cjelobrojna (npr. veličina obuće koja može poprimati vrijednosti 38, 38 1/2, 39 itd).

Tipični primjeri kontinuiranih varijabli su visina, težina, duljina ...

5. Diskretne vjerojatnosne razdiobe

Razdioba diskrente slučajne varijable

Neka je X diskrenta slučajna varijabla koja poprima vrijednosti $x_1, x_2, \ldots$.
Definirajmo događaj $A_i = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}$, kojeg ćemo kraće označavati s $\{X = x_i\}$.
Kako je A_i iz pripadne algebre događaja $\mathcal{P}(\Omega)$, to ima smisla gledati njegovu vjerojatnost
$p(x_i) := P(A_i) = P\{X = x_i\}$.
Ponekad, kad nema straha od zabune, koristimo i oznaku $p_i = p(x_i)$.

Skup uređenih parova $\{(x_i, p(x_i))\}$, $i = 1, 2, \ldots$ zovemo **distribucijom** ili **razdiobom (vjerojatnosti) slučajne varijable** X.

Razdiobe se još označuju i tabelarno

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & \ldots \\ p(x_1) & p(x_2) & \ldots & p(x_n) & \ldots \end{pmatrix},$$

ili stupčano

x	$p(x)$
x_1	$p(x_1)$
x_2	$p(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$
x_n	$p(x_n)$
$\vdots$	$\vdots$

Primjer 5.1. Konstruirajte razdiobu slučajne varijable iz primjera 4.18 .

Rješenje: Varijabla X poprima vrijednosti 0, 1 i 2. Kako je

$$p(x_0) = P\{X = 0\} = P\{\omega_4\} = \frac{1}{4}$$

$$p(x_1) = P\{X = 1\} = P\{\omega_2, \omega_3\} = \frac{2}{4}$$

$$p(x_2) = P\{X = 2\} = P\{\omega_1\} = \frac{1}{4},$$

to je tražena razdioba

x_i	$p(x_i)$
0	$1/4$
1	$2/4$
2	$1/4$

■

Primijetimo da iz svojstava vjerojatnosti za svaku razdiobu vrijedi

- $p(x_i) \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots,$
- $\sum_i p(x_i) = 1.$

Također vjerojatnost da slučajna varijabla poprimi vrijednosti unutar intervala $[a, b], a \leqslant b$ jednaka je

$$P\{a \leqslant X \leqslant b\} = \sum_{a \leqslant x_i \leqslant b} p(x_i).$$

Primjer 5.2. Za navedene tablice utvrdite da li mogu biti razdiobe vjerojatnosti.

a)

x	$p(x)$
0	0.23
1	0.21
2	0.32
3	0.42
4	-0.18

b)

x	$p(x)$
15	0.05
20	0.35
30	0.2
45	0.15

c)

x	$p(x)$
-1	0.2
0	0.2
1	0.2
2	0.2
3	0.2

Rješenje:
U prvoj je jedna vrijednost $p(x_i)$ negativna, u drugoj je zbroj vrijednost $p(x_i)$ manji od jedan.
Zadnja tablica ispunjava tražene uvjete razdiobe.

∎

Funkcija razdiobe

Funkcija razdiobe slučajne varijable X je funkcija $F : \mathbf{R} \to [0, 1]$ definirana formulom

$$F(x) := P\{X \leqslant x\}.$$

Vidimo da je vrijednost funkcije razdiobe u točki x jednaka vjerojatnosti intervala $\langle -\infty, x]$. Nazivamo je još kumulativnom vjerojatnošću.

Posjeduje sljedeća svojstva (navodimo bez dokaza):

F1. $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}, \quad x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow F(x_1) \leqslant F(x_2);$
F2. $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}, \quad P\{x_1 < x \leqslant x_2\} = F(x_2) - F(x_1);$
F3. $F(-\infty) := \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0;$
F4. $F(\infty) := \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

U slučaju diskretne varijable X imamo da je

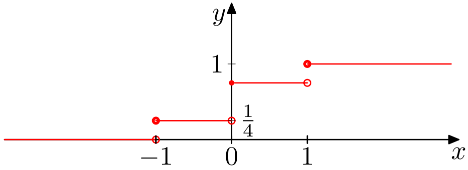
$$F(x) = \sum_{x_i \leqslant x} p(x_i).$$

Primjer 5.3. Slučajna varijabla X poprima vrijednosti -1, 0, 1 s vjerojatnostima $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ redom. Napišite funkciju razdiobe i nacrtajte njen graf.

Rješenje: Funkcija razdiobe zadana je formulama

$$F(x) = P\{X \leqslant x\} = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 1/4, & -1 \leqslant x < 0 \\ 3/4, & 0 \leqslant x < 1 \\ 1, & 1 \leqslant x, \end{cases}$$

dok je njen graf



■

Vidimo da je graf funkcije razdiobe diskretne varijable stepenastog oblika. Iznos skokova jednak je vjerojatnosti s kojom slučajna varijabla poprima vrijednosti u toj točki.

Matematičko očekivanje

Nekada je važno svojstva vjerojatnosne razdiobe izraziti pomoću jednog ili više parametara. Jedan od tih parametara ćemo uvesti u sljedećoj definiciji.

(Matematičko) očekivanje ili **srednja vrijednost** diskretne slučajne varijable X se definira kao

$$E(X) = \sum_i x_i p(x_i),$$

ukoliko ovaj red konvergira. Očekivanje još označujemo s μ, odnosno μ_X.

Naravno, ako slučajna varijabla X poprima samo konačno mnogo vrijednosti, onda se gornji red svodi na konačnu sumu, pa u tom slučaju očekivanje uvijek postoji.

Primjer 5.4. Na ispitu je zadan zadatak *na zaokruživanje*. Ponuđeno je pet odgovora, od kojih samo jedan točan. Točan odgovor donosi 20 bodova, a netočan negativnih 5 bodova. Neka slučajna varijabla X predstavlja broj postignutih bodova studenta koji je nasumično zaokružio odgovor. Nađite njeno očekivanje.

Rješenje: Pretpostavimo da su odgovori označeni slovima a), b), itd, te da je prvi odgovor točan. Definirajmo događaje
A – zaokružen je odogovor a,
B – zaokružen je odogovor b,
te analogno događaje C, D i E.
Varijabla X poprima sljedeće vrijednosti

$$X(A) = 20, \; X(B) = X(C) = X(D) = X(E) = -5.$$

Za naći očekivanje moramo konstruirati pripadnu razdiobu.
Kako student odgovore bira nasumično, to svaki ima jednaku vjerojatnost da bude izabran, pa je

$$p(20) = P\{X = 20\} = P(A) = 0.2,$$

dok je

$$p(-5) = P\{X = -5\} = P(B \cup C \cup D \cup E) = 0.8.$$

Vidimo da je pripadna razdioba

x_i	$p(x_i)$
20	0.2
-5	0.8

Stoga je

$$E(X) = 0.2 \cdot 20 + 0.8 \cdot (-5) = 0.$$

■

Koje je značenje dobivenog broja?
Znači li to da će student dobiti 0 bodova na tom zadatku, ili da je najveća vjerojatnost da će dobiti 0 bodova, ili ...?
Student, ukoliko je nešto zaokružio, neće nikad dobit 0 bodova (već 20 ili -5).
Međutim, ako ponavljamo pokus više puta (recimo da više studenata nasumično bira odgovor), srednja vrijednost svih tako dobivenih bodova će biti najvjerojatnije 0.

Varijanca

Varijanca ili **rasipanje** diskretne slučajne varijable X se definira kao

$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 p(x_i),$$

ukoliko gornji red konvergira. Varijancu još označujemo s σ^2, odnosno σ_X^2.

Očito za varijablu X koja poprima samo konačno mnogo vrijednosti varijanca uvijek postoji. Također,

$$\begin{aligned}
\sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 p(x_i) &= \sum_i (x_i^2 - 2x_i\mu + \mu^2) p(x_i) \\
&= \sum_i x_i^2 p(x_i) - \sum_i 2x_i p(x_i)\mu + \sum_i \mu^2 p(x_i) \\
&= \sum_i x_i^2 p(x_i) - 2\mu^2 + \mu^2 \\
&= \sum_i x_i^2 p(x_i) - \mu^2
\end{aligned}$$

Momenti

Vidimo da nam se uz znano očekivanje, računanje varijance svodi na nalaženje $\sum_i x_i^2 p(x_i)$, koju nazivamo **drugim momentom** varijable X.

Analogno se za realan broj $r \geqslant 0$ definira r**-ti moment**, $E(X^r)$, kao $E(X^r) = \sum_i x_i^r p(x_i)$.

Što je prvi moment? Očekivanje.

Standardna devijacija

Po definiciji je varijanca uvijek nenegativna, te stoga ima smisla sljedeća definicija.

Neka slučajna varijabla X ima varijancu. **Standardna devijacija** ili **odstupanje** σ diskretne varijable X je nenegativni korijen iz varijance, tj. $\sigma = \sigma_X = \sqrt{V(X)}$.

Primjer 5.5. Bacamo dvije ispravne kocke. Slučajne varijable X i Y definirane su na sljedeće načine.
X je jednaka apsolutnoj vrijednosti razlika brojeva na kockama.
Y je manji od ta dva broja ako su različiti, jednak nuli ako su jednaki.
Pokažite da X i Y imaju jednake razdiobe. Nađite njihova očekivanja i standardnu devijaciju.

Rješenje:

$$X, Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{6}{36} & \frac{10}{36} & \frac{8}{36} & \frac{6}{36} & \frac{4}{36} & \frac{2}{36} \end{pmatrix}$$

$$E(X) = E(Y) = 0 \cdot \frac{6}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 2 \cdot \frac{8}{36} + 3 \cdot \frac{6}{36} + 4 \cdot \frac{4}{36} + 5 \cdot \frac{2}{36} = \frac{70}{36}$$

$$V(X) = V(Y) = 0 \cdot \frac{6}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 4 \cdot \frac{8}{36} + 9 \cdot \frac{6}{36} + 16 \cdot \frac{4}{36} + 25 \cdot \frac{2}{36} - \left(\frac{70}{36}\right)^2 = 2.052$$

$$\sigma_X = \sigma_Y = \sqrt{2.052} = 1.43$$

∎