# 6. Neprekidne vjerojatnosne razdiobe

# Neprekidne slučajne varijable

U prethodnom poglavlju proučavali smo **diskretne slučajne varijable**:
– skup vrijednosti je bio diskretan (prebrojiv) skup $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$.
Za svaku vrijednost promatrali smo vjerojatnost njenog pojavljivanja

$$p(x_i) = P\{X = x_i\}.$$

Pretpostavimo sada da je $X$ slučajna varijabla čiji skup vrijednosti sadrži neki interval realnih brojeva

$$\langle a, b\rangle \subseteq \mathbf{R}, \quad a \neq b,$$

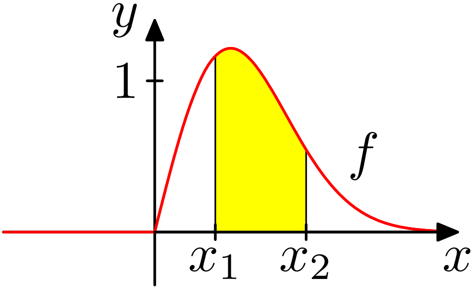
pri čemu su $a, b \in \overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \pm\infty$, te stoga skup vrijednosti može biti cijeli $\mathbf{R}$.
Ne možemo sastaviti popis svih mogućih vrijednosti takve varijable (ne možemo ih prebrojati).
Kod neprekidnih varijabli vjerojatnost ćemo pridruživati intervalima realnih brojeva, dok će vjerojatnost pridružena pojedinačnim vrijednostima biti jednaka 0.

# Gustoća vjerojatnosti

Razdioba vjerojatnosti za neprekidnu slučajna varijablu $X$ opisana je integrabilnom funkcijom $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ koja ima svojstva

1. $f(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbf{R}$;
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$;
3. $P\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx, \quad x_1, x_2 \in \overline{\mathbf{R}}$, $x_1 \leqslant x_2$.

Funkcija $f$ zove se **funkcija gustoće vjerojatnosti** za neprekidnu slučajna varijablu $X$.
Vidimo iz (3) da je $P\{X = x\} = 0$ za svaki realan broj $x$ (stoga $f$ ne predstavlja vjerojatnost!).
Zorna interpretacija dobije se iz grafičkog prikaza funckije $f$.




Primjer funkcije gustoće vjerojatnosti za neprekidnu vjerojatnosnu razdiobu.
Površina obojanog dijela predstvalja vjerojatnost da razdioba poprimi vrijednosti između $x_1$ i $x_2$.
Površina ispod grafa funkcije mora biti jednaka 1.

# Funkcija razdiobe

Analogno kao za diskretne varijable, definirat ćemo funkciju razdiobe.

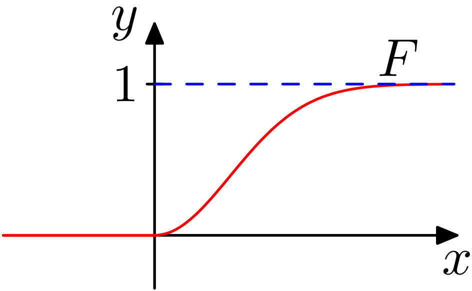
**Funkcija razdiobe** neprekidne slučajne varijable $X$ je funkcija $F : \mathbf{R} \to [0,1]$ definirana formulom

$$F(x) := P\{X \leqslant x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Njena vrijednost u točki $x$ jednaka je površini ispod krivulje funkcije gustoće do točke $x$.
Vidimo da je funkcija razdiobe primitivna funkcija funkcije gustoće vjerojatnosti, tj.

$$f(x) = F'(x).$$

Za nju također vrijede svojstva **F1.** - **F4.** iz poglavlja **5.** (diskretne vjerojatnosne razdiobe).




Primjer funkcije razdiobe za neprekidnu vjerojatnosnu razdiobu.
Riječ je o rastućoj funkciji koja poprima vrijednosti između 0 i 1.

Ako znamo $F$, možemo izračunati vjerojatnost da slučajna varijabla pripada pojedinom intervalu. Zaista

$$\begin{aligned} F(x_2) - F(x_1) &= \int_{-\infty}^{x_2} f(x)dx - \int_{-\infty}^{x_1} f(x)dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \\ &= P\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2\}. \end{aligned}$$

Primijetimo da stoga što je vjerojatnost za svaku pojedinačnu točku jednaka nuli

$$P\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2\} = P\{x_1 < X < x_2\} = P\{x_1 \leqslant X < x_2\} = P\{x_1 < X \leqslant x_2\}.$$

Primjer 6.1. Zadana je funckija $f$:

$$f(x) = \begin{cases} cx, & x \in [0,2] \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

a) Odredite konstantu $c$ tako da $f$ bude funkcija gustoće vjerojatnosti za neprekidnu slučajnu varijablu $X$. Nacrtajte njezin graf.

b) Odredite i grafički prikažite funkciju razdiobe $F$.

c) Izračunajte $P\{0.5 \leqslant X \leqslant 2.2\}$.

## Rješenje:

a)

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^2 cxdx = 2c,$$

te je $c = \frac{1}{2}$.

b)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4}x^2, & x \in [0, 2] \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

c)

$$P\{0.5 \leqslant X \leqslant 2.2\} = \int_{0.5}^{2.2} f(x)dx = \int_{0.5}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{0.5}^{2} xdx = \frac{15}{16}.$$

Ili jednostavnije

$$P\{0.5 \leqslant X \leqslant 2.2\} = F(2.2) - F(0.5) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

∎

**Primjer 6.2.** Točka se bira na sreću unutar intervala $[a, b]$ na brojevnom pravcu. Neka $X$ označava izabrani broj. Odredite funkciju razdiobe slučajne varijable $X$.

Rješenje:

Vjerojatnost da točka bude izabrana unutar nekog podintervala od $[a, b]$ proporcionalna je duljini tog podintervala:

$$P\{a \leqslant X \leqslant x\} = k(x - a) = F(x) - F(a), \tag{1}$$

gdje smo s $k \in \mathbf{R}^+$ označili konstantu proporcionalnosti.
Kako $X$ poprima vrijednosti unutar intervala $[a, b]$, to je

$$F(a) = P\{X < a\} = 0,$$

odnosno

$$1 = P\{a \leqslant X \leqslant b\} = F(b) - F(a) = k(b - a).$$

Iz zadnje relacije slijedi da je $k = \frac{1}{b-a}$. Uvrštavanjem u (1) slijedi da je

$$F(x) = \frac{x - a}{b - a}, \quad x \in [a, b],$$

te

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad x \in [a,b].$$

Varijabla $X$ je primjer neprekidne varijable s **jednolikom (uniformnom) raspodjelom.**
Njena gustoća je konstantna na intervalu $[a,b]$, odatle i ime razdiobi. ∎

# Matematičko očekivanje

**(Matematičko) očekivanje** ili **srednja vrijednost** neprekidne slučajne varijable $X$ je definirano kao

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

ukoliko ovaj integral postoji. Očekivanje još označujemo s $\mu$, odnosno $\mu_X$.

Primjer 6.3. Odredite matematičko očekivanje za razdiobu iz primjera 6.1.

Rješenje:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{2} x \cdot \frac{1}{2} x dx = \frac{4}{3}.$$

∎

# Varijanca

**Varijanca** ili **rasipanje** neprekidne slučajne varijable $X$ je definirano kao

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx,$$

ukoliko ovaj integral postoji. Varijancu još označujemo s $\sigma^2$, odnosno $\sigma_X^2$.
**Standardna devijacija** ili **odstupanje** $\sigma$ neprekidne varijable $X$ se definira kao nenegativni korijen iz varijance, tj. $\sigma = \sigma_X = \sqrt{V(X)}$.

Varijancu također možemo računati preko **drugog momenta**, odnosno vrijedi

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2.$$

Općenito, za realan broj $r \geqslant 0$ definira se $r$-**ti moment**, $E(X^r)$, kao $E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx$.

Primjer 6.4. Odredite varijancu za razdiobu iz primjera 6.1.

Rješenje:

Izračunajmo najprije drugi moment

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{1}{2} x dx = 2.$$

Stoga je

$$\sigma^2 = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}.$$

∎

# Funkcije slučajne varijable

Prisjetimo se definicije slučajne varijable.
Slučajna varijabla $X$ je funkcija koja svakom elementarnom događaju pridružuje realan broj, dakle $X : \Omega \to \mathbf{R}$.
Neka je $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ realna funkcija. Tada ona definira novu slučajnu varijablu $Y$, definiranu na način

$$Y(\omega) = y(X(\omega)).$$

Kraće pišemo $Y = y(X)$ i kažemo da je $Y$ **funkcija** ili **transformacija slučajne varijable** $X$.
Najjednostavniji je primjer kad imamo afinu funkciju $y(x) = ax + b$, te preko nje definiramo $Y = aX + b$.

# Funkcije slučajne varijable

Primjer 6.5. Prisjetimo se prvog primjera slučajne varijable kojeg smo sreli na predavanju (Primjer 4.19).
Slučajna varijabla $X$ je predstavljala broj pojavljivanja pisma prilikom bacanja dva novčića.
Nađite razdiobu slučajne varijable $Y = 2X + 3$.

Rješenje:
Kako je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, gdje je

$$\omega_1 = (P, P),\ \omega_2 = (P, G),\ \omega_3 = (G, P),\ \omega_4 = (G, G),$$

to je

$$Y(\omega_1) = 2X(\omega_1) + 3 = 2 \cdot 2 + 3 = 7.$$

Analogno računamo

$$Y(\omega_2) = 2X(\omega_2) + 3 = 2 \cdot 1 + 3 = 5,$$
$$Y(\omega_3) = 2X(\omega_3) + 3 = 2 \cdot 1 + 3 = 5,$$
$$Y(\omega_4) = 2X(\omega_4) + 3 = 2 \cdot 0 + 3 = 3.$$

Skup vrijednosti varijable $Y$ je $\{3, 5, 7\}$.

# Funkcije slučajne varijable

Preostaje nam izračunati vjerojatnost pojavljivanja svake vrijednosti.

$$
\begin{aligned}
p(7) &= P\{Y = 7\} = P\{\omega_4\} = \frac{1}{4} \\
p(5) &= P\{Y = 5\} = P\{\omega_2, \omega_3\} = \frac{2}{4} \\
p(3) &= P\{Y = 3\} = P\{\omega_1\} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Stoga je tražena razdioba

| $y_i$ | $p(y_i)$ |
|---|---|
| 3 | $1/4$ |
| 5 | $2/4$ |
| 7 | $1/4$ |

# Funkcije slučajne varijable

Primijetimo da na događajima na kojima varijabla $X$ poprima jednaku vrijednost, to radi i varijabla $Y$.

Varijabla $Y$ u zadnjem primjeru predstavlja dvostruki broj pojavljivanja pisma uvećan za 3.

Do kraja ovog potpoglavlja ćemo pokušati ustanoviti vezu između numeričkih karakteristika originalne i transformirane varijable, $X$ i $Y$.

Točnije, zanimat će nas možemo li i kako izraziti numeričke karakteristike transformirane varijable $Y$ preko razdiobe varijable $X$.

# Funkcije slučajne varijable

Neka je $X$ neprekidna varijabla s funkcijom gustoće vjerojatnosti $f$.

Očekivanje varijable $Y$ možemo računati preko njene razdiobe, koju u tom slučaju moramo pronaći, ili je možemo izraziti preko razdiobe varijable $X$. Točnije, vrijedi sljedeći rezultat kojeg navodimo bez dokaza.

Očekivanje slučajne varijable $Y = y(X)$ dano izrazom

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y(x) f(x) dx, \tag{2}$$

gdje je $f$ gustoća vjerojatnosti varijable $X$.

Ukoliko je $y = x^r$ potencija, onda gornja formula nam kaže da je $r$-ti moment upravo jednak očekivanju transformirane varijable $X^r$
(stoga $r$-ti moment i oznakučavamo s $E(X^r)$).
Nadalje, ako je $Y = aX + b$, onda ma osnovu (2) zaključujemo da je

$$E(Y) = aE(X) + b. \tag{3}$$

# Funkcije slučajne varijable

Zaista, korištenjem linearnosti integrala imamo da je

$$\begin{aligned}
E(Y) = E(aX+b) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(x)f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b)f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} axf(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} bf(x)dx \\
&= a\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \\
&= aE(X)+b,
\end{aligned}$$

pri čemu smo u zadnjem koraku koristili svojstvo normiranosti vjerojatnosti, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.
Posebno, za $b=0$, odnosno $a=0$ vrijedi

$$E(aX) = aE(X)$$
$$E(b) = b\,.$$

# Funkcije slučajne varijable

Primjer 6.6. Neka je $X$ neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće $f$ iz primjera 6.1:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & x \in [0,2] \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

te neka je $Y = 2X + 3$ funkcija neprekidne slučajne varijable $X$. Izračunajte $E(Y)$.

Rješenje:
Primjenom formule (2), imamo da je

$$E(Y) = \frac{1}{2}\int_0^2 (2x+3)x dx = \frac{17}{3}.$$

Jednak rezultat ćemo dobiti i ako koristimo formulu (3) i rezultat primjera 6.2:

$$E(Y) = 2E(x) + 3 = 2 \cdot \frac{4}{3} + 3 = \frac{17}{3}.$$

∎

# Funkcije slučajne varijable

Analogne formule ćemo pokušat izvesti i za varijancu slučajne varijable $Y = aX + b$.
Prisjetimo se da je varijanca proizvoljne neprekidne varijable $X$ jednaka

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (E(X))^2 ,$$

odnosno

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 .$$

Posebno, za $Y = aX + b$ korištenjem svojstva matematičkog očekivanja imamo da je

$$
\begin{aligned}
V(Y) &= E(Y^2) - (E(Y))^2 \\
&= E\left((aX+b)^2\right) - \Big(E(aX+b)\Big)^2 \\
&= E(a^2X^2 + 2abX + b^2) - \Big(aE(X) + b\Big)^2 \\
&= a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - a^2\,(E(X))^2 - 2abE(X) - b^2 \\
&= a^2E(X^2) - a^2\,(E(X))^2 = a^2V(X),
\end{aligned}
$$

odnosno pokazali smo da je

$$
V(aX+b) = a^2V(X). \tag{4}
$$

Posebno za $a = 0$ imamo da je $V(b) = 0$. (Zbog čega je to i logičan rezultat?)

# Funkcije slučajne varijable

Primjer 6.7.
Izračunajte varijancu slučajne varijable $Y$ iz zadnjeg primjera.

Rješenje:
Kako je $Y = 2X + 3$, to je na osnovu rezultata primjera 6.4

$$V(Y) = 4V(X) = 4 \cdot \frac{2}{9} = \frac{8}{9}.$$

∎

**Napomena:** izvedeni rezultati, odnosno formule (3) i (4) vrijede i u slučaju diskretnih varijabli $X, Y$.