Transport zagađivača u rekama

Važni faktori u modeliranju reka: Konceptualan model

Da bi matematički opisali reku, napravićemo listu promenljivh koja je karakteriše:

* $A-$ površina poprečnog preseka reke ($w-$širina pomnožena sa srednjom dubinom reke $d$) $\left(m^{2}\right)$;
* $Q\_{i}-$ulazni protok na početku sekcije reke koju modelujemo $\left(m^{3}/god\right)$;
* $Q\_{e}-$izlazni protok na kraju sekcije reke koju modelujemo $\left(m^{3}/god\right)$ (obično se pretpostavlja da je $Q\_{i}$ jednak $Q\_{e}$ i obeležavamo ih prosto sa $Q$;
* $C\left(x\right)-$koncentracija polutanta u funkciji rastojanja nizvodno od izvora za fiksirani moment vremena $\left(kg/m^{3}\right)$ ili slična jedinica;
* $C\left(t\right)-$koncentracija polutanta u funkciji vremena na fiksnom rastojanja nizvodno od izvora $\left(kg/m^{3}\right)$ ili slična jedinica;
* $k$ je konstanta reakcije prvog reda za odstranjivanje polutanta iz reke $\left(god^{-1}\right)$ (ili u FATE software $sec^{-1}$ ;
* $t$ je vreme u $god$ (u FATE software u $s)$ ;
* $M\_{0}-$ ukupna masa polutanta u reci $\left(kg ili Ci\right)$ ;
* $W-$ brzina kontinualnog ispuštanja otpadi u reku $\left(kg/s \right) ili \left(Ci/s\right)$;

Jedinice se moraju eksplicitno izraziti i moraju biti kompatibilne međusobno. Gornje veličine nam služe da opet koristimo balans masa i da dobijemo jednačinu koja opisuje prilive, odlive, izvore i ponore.

Na slici niže su pokazani kontinualni i impulsni izvori zagađivača sa zapreminskim protokom vode $(Q)$, brzinom $(v)$, koeficijentom raspada prvog reda $\left(k\right),$ i longitudinalnim koeficijentom disperzije $\left(E\right).$ Fizičke karakteristike rečnog korita određuju vrednosti gore navedenih veličina. Te fizičke karakteristike određuju i stepen mešanja polutanta.



***Ilustracija rečnog toka sa polutantom***

Sve transpotne jednačine koje se koriste u pokretnom medijumu (voda ili vazduh) se nazivaju *advektivno-disperzivne.* U jedno-dimenzionom modelu reke, razmatra se samo advekcija i longitudinalna disperzija u pravcu toka $(x)$ .

Disperzija se karakteriše sa longitudinalnim disperzionim koeficijentom $E(m^{2}/s)$ i može se oceniti kao:

$$E=0.011\frac{v^{2}w^{2}}{du}$$

$$u=\sqrt{gds}$$

gde je $v$ brzina vodenog toka $(m/s),$ $w$ srednja širina reke $(m)$, $d$ srednja dubina reke $(m)$, $g$ gravitaciono ubrzanje $9.81m/s^{2}$, i $s$ je nagib ili gradijent rečnog dna (bezdimenziona veličina).

Efekat od $E$ na koncentraciju polutanta se vidi na slici niže. Mrlja zagađivača je prikazana u funkciji vremena u vidu tamnih pravouganih traka. Treba primetiti, kako se polutant transportuje nizvodno, da je disperzija sve veća i trake polutanta su sve veće i svetlije, čime se prikazuje razblaživanje zagađivača.



***Rečno korito koje prikazuje longitudinalnu disperziju***

Procesi sa učestvovanjem polutanta u sistemu mogu biti različiti i prikazani su na slici niže.



Uprošćavanje se sastoji u tome da se ovi procesi u većini slučajeva mogu predstaviti reakcijama I reda. Dalje možemo predstaviti u modelu:

* trenutno mešanje u $y$ i z pravcu, čime se model redukuje na jedno-dimenzioni;
* površina toka je vremenski i prostorno invarijantna u granicama sistema;
* Protok u srednjem ima konstantnu vrednost ali se može menjati kao parametar.

# Primena koraka u matematičkom modeliranju

##### Karakterizacija sistema

Sistem čini vodena masa ograničena uzvodno imagiarnim presekom A-A i nizvodno presekom B-B (slika niže). Rastojanje se računa od tačke ispuštanja polutanta.

Metodologija je ista tj, pisaćemo jednačinu balansa mase:

$$Promena u masi=Input-Output+Izvori-Ponori$$

****

***Šema realnog sistema***

Šema simplifikovanog (uprošćenog) sistema je data niže.



***Šema uprošćenog sistema***

Da bismo dobili diferencijalnu jednačinu posmatraćemo šta se događa u malom elementu sistema dužine $∆x$, u intervalu vremena $∆t, $čiji detalji su dati na slici niže.



Sada ćemo napisati izraze za pojedinačne članove u jednačini balansa mase polutanta:

Brzina promene mase polutanta u elementu zapremine $=\frac{∂\left(VC\right)}{∂t}$;

Advektivna brzina priliva u element $=QC$;

Advektivna brzina odliva iz elementa $=QC+\frac{∂\left(QC\right)}{∂x}∆x$;

$∴$ Neto advektivni priliv $=QC-\left(QC+\frac{∂\left(QC\right)}{∂x}∆x\right)=-\frac{∂\left(QC\right)}{∂x}∆x$;

Difuziona brzina priliva u element$=-EA\frac{∂C}{∂x}$;

Difuziona brzina odliva iz elementa$=-EA\frac{∂C}{∂x}+\frac{∂}{∂x}\left(-EA\frac{∂C}{∂x}\right)∆x$;

$∴$ Neto difuzioni priliv$=\left[-EA\frac{∂C}{∂x}\right]-\left[-EA\frac{∂C}{∂x}+\frac{∂}{∂x}\left(-EA\frac{∂C}{∂x}\right)∆x\right]=EA\frac{∂}{∂x}\left(\frac{∂C}{∂x}\right)∆x$

Neto brzina gubitaka zagađivača zbog reakcija u elementu$=k\left(A∆x\right)C$.

Kombinujući gornje izraze dobijamo jednačinu balansa mase:

$$\frac{∂\left(VC\right)}{∂t}=-\frac{∂\left(QC\right)}{∂x}∆x+EA\frac{∂}{∂x}\left(\frac{∂C}{∂x}\right)∆x-k\left(A∆x\right)C$$

Rešenje gornje parcijalne diferencijalne jednačine nam daje zavisnost koncentracije zagađivača $C$ od vremena $t$ i pozicije $x$.

Rešenje gornje jednačine ćemo izvesti postepeno.

***Primer jednokratnog-impulsnog zagađenja:*** Poći ćemo od jednačine za čisti advektivno-disperzivni model tj, nećemo uračunavati reakcije u sistemu:

$\frac{dC}{dt}=E∇^{2}C$.

Rešavanje ove jednačine zavisi od početnih i graničnih uslova.

Na primer, posmatrajmo homogenu sredinu koja miruje. Dalje uzmimo da je $c=c(x,t)$ samo funkcija od $x$ i $t$ i da ne zavisi od $y$ i $z.$ Tada se gornja jednačina uprošćava na

$$\frac{∂C}{∂t}=E\frac{∂^{2}C}{∂x^{2}}.$$

***Gausova funkcija*** $C\left(x,t\right)=\frac{Q}{2\sqrt{πEt}}e^{-x^{2}/\left(4Et\right)}$ ***je rešenje gornje jednačine, što se možemo lako uveriti zamenom u gornju jednačinu.***

Ovde je Q količina zagađivača $\left(kgm^{-2}\right)$, koja se u trenutku $t=0$, ispušta u sistem u ravni $x=0$. Treba imati u vidu da smo gornju diferencijalnu jednačinu primenili i za medijum koji se kreće konstantnom brzinom ali u referentnom sistemu koji smo vezali za pokretni medijum u ovom slučaju tok vode koji se kreće brzinom $v$ . Da bi dobili rešenje gornje jednačine u odnosu na nepokretni sistem vezan za obalu reke, koristićemo prostu smenu tj, umesto $x$ ćemo staviti prosto $\left(x-vt\right)$ (Galilejeva transformacija). Dakle, imamo rešenje jedno-dimenzionog modela reke kada ne uračunavamo reakcije raspada polutanta u reci:

$$C\left(x,t\right)=\frac{Q}{2\sqrt{πEt}}e^{-(x-vt)^{2}/\left(4Et\right)}$$

Uračunavanjem reakcije raspada polutanta u sistemu, prosto koncentraciju množimo sa članom $e^{-kt}$ , i dobijamo konačan izraz kao i u FATE software:

$$C\left(x,t\right)=\frac{M\_{0}}{wd\sqrt{4πEt}}e^{-\frac{\left(x-vt\right)^{2}}{\left(4Et\right)}-kt}$$

gde smo $Q$ zamenili sa $M\_{0}/wd$ i gde je $M\_{0}$- masa polutanta ispuštena u sistem.



***Primer rezultata računanja u FATE programu za impulsno ispuštanje polutanta u reku***

***Primer kontinualnog zagađenja:***

U ovom slučaju koristimo istu jednačinu balansa mase, stim što umesto jednokratnog ispuštanja polutanta $M\_{0}$ imamo konstantnu brzinu priliva zagađivača $W$ u $\left(kg/s\right)$. Uzećemo slučaj kada se formira stabilno stanje tj, $\frac{∂C}{∂t}=0$. Tada imamo da je koncentracija samo funkcija koordinate x i iznosi:

$$C\left(x\right)=\frac{W}{Q\sqrt{1+\frac{4kE}{v^{2}}}}e^{\left[\frac{vx}{2E}\left(1\pm \sqrt{1+\frac{4kE}{v^{2}}}\right)\right]}$$

Pozitivni znak ispred korena se uzima u slučaju kada posmatramo koncentraciju uzvodno od ispuštanja tj, u pravcu $\left(-x\right)$, a negativni znak ogovara koncentraciji nizvodno tj, u pravcu $\left(+x\right)$. Primer grafika zavisnosti koncentracije zagađivača od rastojanja od mesta ispuštanja zagađivača je data na slici niže.



***Primer kontinualnog zagađenja reke, korištenjem FATE software***

### Analiza senzitivnosti modela

Ovde ćemo demonstrirati osetljivost metode, menjajući brzinu reke. U primeru čiji su rezultati dati na gornjoj slici, brzina reke je bila $v=0.85m/s.$ Dakle, postavljamo sebi pitanje: Šta, ako je ocena brzine reke pogrešna? Kako se to odražava na računatu koncentraciju zagađivača? Rezultati računanja koncentracije na $500m nizvodno, $za seriju brzina reke od 0.25, 0.5, 0.85, 1, 1.25, 1.5m/s su dati na slici niže.



***Rezultati analize senzitivnost koncentracije polutanta u odnosu na brzinu reke***

Vidimo jasno da je ta osetljivost velika, što smo i mogli pretpostaviti, jer se brzina u izrazu za koncentraciju polutanta nalazi u eksponentu. Veća brzina reke dovodi do toga da se polutant transportuje nizvodno pre nego se raspadne, čime je u svakoj tački nizvodno koncentracija polutanta uvećana. Slična analiza senzitivnost se može izvršiti i ya bilo koji drugi parametar.

### Ograničenost našeg modela

*Jedno*-*dimenzioni nasuprot dvo-dimenzionom modelu i ispuštanje polutanta u malom prostoru kod reka velike širine.*

Niti jednokratno, niti kontinualno ispuštanje je ravnomerno raspodeljeno po poprečnom preseku rečnog toka, kako je to u modelu pretpostavljeno. Kod većine reka i potoka to nije problem, jer uglavnom imamo dobro mešanje nizvodno od 2-3km, dok se razmatra profil koncentracije od desitine do stotine kilometara. Premda, kod širokih reka se moraju uzimati u obzir i disperzija u pravcu *y* ose. Tada se već moraju koristiti dvo-dimenzioni model sa sličnom procedurom.

*Isparavanje polutanta:* Ako se radi o organskom polutantu onda se mora računati i isparavanje jer imamo širok kontakt vode sa atmosferom.