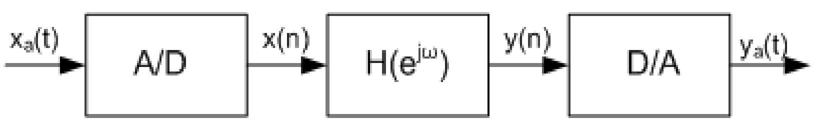
DIGITALNA OBRADA SIGNALA - IV računske vježbe

Zadatak 1.

Na ulaz sistema prikazanog na slici doveden je analogni signal:

$$x_a(t) = sin(\omega_{a1}t) + \frac{1}{2}sin(\omega_{a2}t) + 2cos(\omega_{a3}t + \theta_3),$$

gdje je $\omega_{a1} = 100\pi[1/s]$, $\omega_{a2} = 180\pi[1/s]$, $\omega_{a3} = 200\pi[1/s]$ *i* $\theta_3 = \pi/4$.



$H(e^{j\omega})$ je *funkcija prenosa idealnog filtra propusnika niskih učestanosti sa graničnom učestanoću* $\omega_g = 3\pi/4$ *i faznom karakteristikom koja je jednaka nuli.*

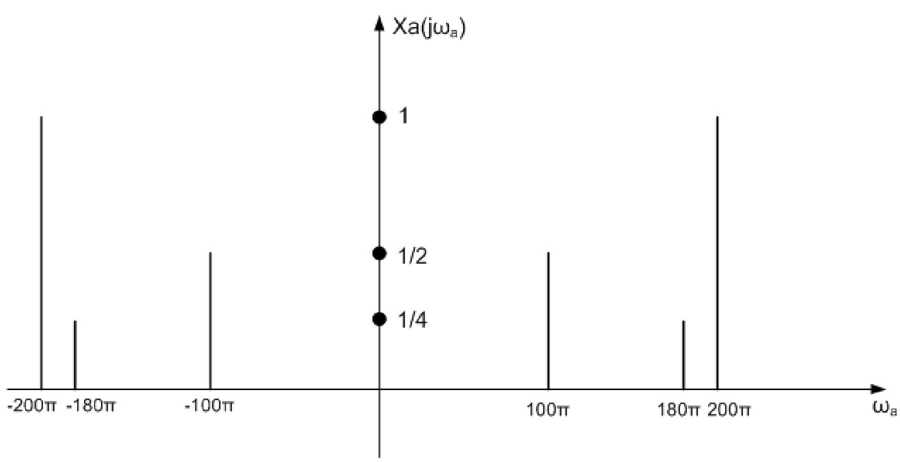
Odabiranje u A/D konvertoru je izvršeno sa korakom $T = 1/125[s]$.

a) Odrediti signal na izlazu $y_a(t)$.

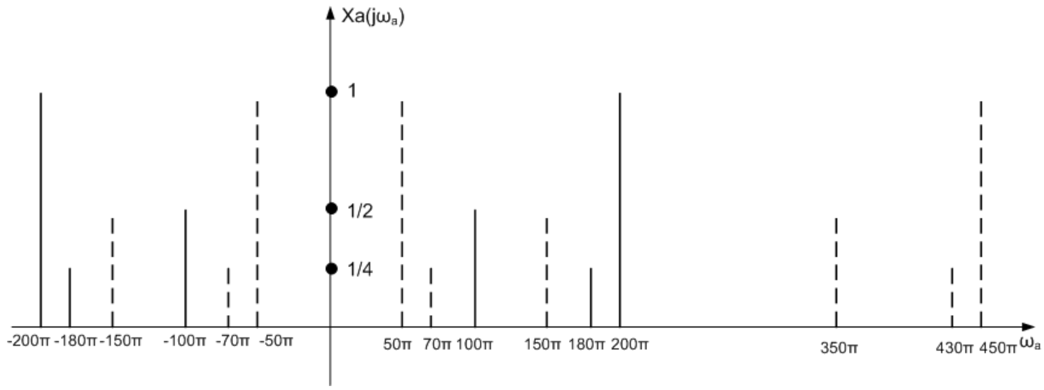
b) Koliki korak odabiranja T *bi trebalo uzeti pa da je* $y_a(t) \equiv x_a(t)$*?*

Rješenje:

a) Prilikom crtanja spektra smo koristili činjenicu da je Fourier-ova transformacija signala $x(t) = Asin(\omega_0 t)$, sastavljena od dvije komponente na učestanostima $\pm\omega_0$, a čije su amplitude proporcionalne sa $\pm 1/2Aj$. Na prethodnoj slici je crtan spektar signala, apsolutna vrijednost Fourier-ove transformacije. Uzeta je aproksimacija da je amplituda jednaka $1/2A$. Spektar signala $x_a(t)$ prije ulaza u A/D konvertor je dat na sledećem grafiku

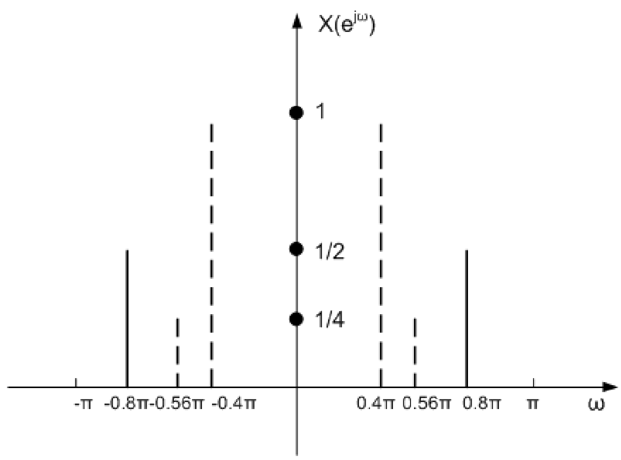


U A/D konvertoru je izvršeno odabiranje signala sa periodom odabiranja $T = 1/125[s]$. Odabiranjem kontinualnog signala $x_a(t)$ periodično se produžava njegov spektar sa periodom produženja $\omega_p = 2\pi/T$. U našem slučaju je $\omega_p = 2\pi/T = 2\pi/(1/125) = 250\pi$. Pa će nakon odabiranja spektar biti:



Na prethodnoj slici su isprekidanom linijom predstavljene komponente spektra koje su dobijene periodičnim produžavanjem spektra analognog signala koji se odabira i čiji je spektar predstavljen punom linijom.

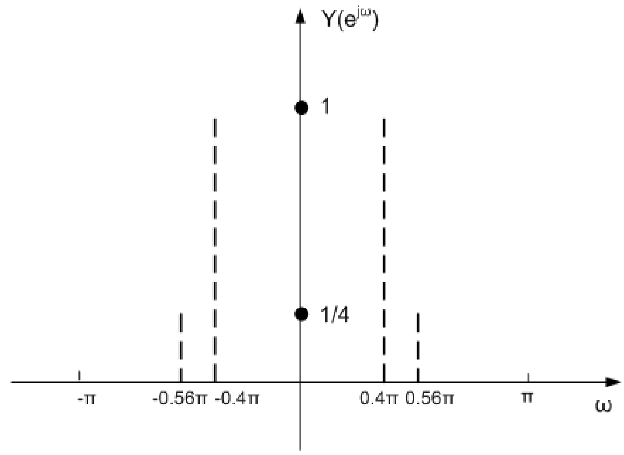
Zamjenom $\omega = \omega_a T$ dobijaju se diskretne učestanosti i odgovarajuća Fourier-ova transformacija diskretnog signala od $-\pi$ do π. Crta se samo jedna perioda jer će Fourier-ova transformacija diskretnog signala biti periodična sa periodom 2π.



Obzirom da se signal $x(n)$ dovodi na ulaz filtra propusnika niskih učestanosti sa graničnom učestanošću $\omega_g = 3\pi/4$ i funkcijom prenosa:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \text{za } |\omega| \leq 3\pi/4 \\ 0, & \text{za } |\omega| > 3\pi/4 \end{cases},$$

spektar signala koji se dobije na izlazu iz filtra će imati komponente samo na učestanostima $|\omega| \leq 3\pi/4 = 0.75\pi$ (jer je $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$). Dakle, spektar signala $y(n)$ dobijenog na izlazu iz filtra propusnika niskih učestanosti će biti kao na sledećoj slici.



Na osnovu prethodne slike i signala $x_a(t)$ se zaključuje da će se na izlazu sistema pojaviti dvije sinusoidalne komponente i da će signal $y_a(t)$ biti oblika:

$$y_a(t) = 2\cos(0.4{*}125\pi t + \pi/4) + \frac{1}{2}\sin(0.56{*}125\pi t) = 2\cos(50\pi t + \pi/4) + \frac{1}{2}\sin(70\pi t)$$

Dakle, ukoliko se uzme korak odabiranja $T = 1/125$, neće biti moguće rekonstruisati originalni signal na osnovu odbiraka signala $y(n)$.

b) Prilikom izbora koraka odabiranja signala $x_a(t)$ potrebno je voditi računa da bude zadovoljena teorema o odabiranju. Po teoremi o odabiranju korak kojim se može izvršiti odabiranje mora zadovoljavati uslov $T_1 \leq 1/(2f_{max})$. Signal $x_a(t)$ se sastoji od tri sinusoide i na osnovu njegovog spektra se zaključuje da je maksimalna učestanost $\omega_{max} = 200\pi$, odnosno korak odabiranja mora biti $T_1 \leq 1/2f_{max} = 1/200$. Dakle, korak uzet u zadatku pod a) nije zadovoljavao teoremu o odabiranju, što objašnjava preklapanje komponenti periodično produženog spektra signala dobijenog odabiranjem kontinualnog. Ukoliko se uzme korak odabiranja T_1 koji zadovoljava teormu o odabiranju, najveća učestanost na kojoj će se pojavljivati korisna komponenta spektra signala dobijenog odabiranjem će biti $\omega = 200\pi * T_1$. Ukoliko želimo da se i ova komponenta pojavi na izlazu iz filtra propusnika niskih učestanosti mora biti $\omega = 200\pi * T_1 \leq 3\pi/4$. Zaključujemo da je najveći korak kojim se može izvršiti odabiranje $T_1 = 3/800[s]$.

Zadatak 2.

Odrediti diskretnu Fourier-ovu transformaciju signala:

$$x(n) = \delta(n) - 3\delta(n-1) - 2\delta(n-2)$$

Računajući za a) $N = 6$ i b) $N = 12$.

Rješenje:

Signal je ograničen po vremenu na $N_1 = 3$ (broj članova različitih od nule) pa je najmanja vrijednost za koju se može računati diskretna Fourier-ova transformacija (DFT) jednaka 3. $N = 6$ zadovoljava ovaj uslov.

DFT signala $x(n)$ se označava sa $X(k)$ i jednaka je:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \text{ za } k = 0, ..., N-1$$

a)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{5} \left[\delta(n) - 3\delta(n-1) - 2\delta(n-2)\right] e^{-j\frac{2\pi}{6}nk}, \text{ za } k = 0, ..., 5$$

$$X(k) = e^{-j\frac{2\pi}{6}0k} - 3e^{-j\frac{2\pi}{6}1k} - 2e^{-j\frac{2\pi}{6}2k}$$

$$X(k) = 1 - 3e^{-j\frac{\pi}{3}k} - 2e^{-j\frac{\pi}{3}2k}, \text{ za } k = 0, ..., 5$$

Nakon zamjene odgovarajućih vrijednosti za k, pojedine komponente DFT će biti:

$$\begin{aligned}
X(0) &= -4 \\
X(1) &= 0.5 - j2.5\sqrt{3} \\
X(2) &= 3.5 + j0.5\sqrt{3} \\
X(3) &= 2 \\
X(4) &= 3.5 - j0.5\sqrt{3} \\
X(5) &= 0.5 + j2.5\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Zaključujemo da će za komponente DFT realnog signala važiti pravilo $X(k) = X^*(N-k)$, za $k = 1, ..., N/2 - 1$.

b) $N = 12$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{12} \left[\delta(n) - 3\delta(n-1) - 2\delta(n-2)\right] e^{-j\frac{2\pi}{12}nk}, \text{ za } k = 0, ..., 11$$

$$X(k) = e^{-j\frac{2\pi}{12}0k} - 3e^{-j\frac{2\pi}{12}1k} - 2e^{-j\frac{2\pi}{12}2k}$$

$$X(k) = 1 - 3e^{-j\frac{\pi}{6}k} - 2e^{-j\frac{\pi}{6}2k}, \text{ za } k = 0, ..., 11$$

Upoređujući DFT dobijenu za $N = 6$ i $N = 12$, zaključujemo da važi $X_6(k) = X_{12}(2k)$, za $k = 0, ..., 5$, odnosno da se povećavanjem vrijednosti za N vremenski ograničenog signala, dobija gušća raspodjela DFT.

Zadatak 3.

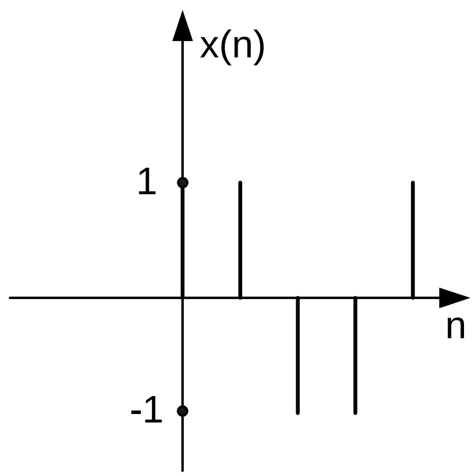
a) Odrediti DFT signala $x(n)$:

$$x(n) = u(n) - 2u(n-2) + 2u(n-4) - u(n-5)$$

b) Koji uslov treba da ispuni signal da bi njegova DFT bila realna?

Rješenje:

a) Signal $x(n)$ je prikazan na donjoj slici.



Kako broj odbiraka za koji se računa DFT mora biti veći ili jednak broju nenultih odbiraka signala mi uzimamo $N = 5$, dakle tačno broj nenultih odbiraka što je ujedno i najmanja vrijednost za N koju smo mogli uzeti:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{4} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{5}nk} = 1 + e^{-j\frac{2\pi}{5}k} - e^{-j\frac{4\pi}{5}k} - e^{-j\frac{6\pi k}{5}} + e^{-j\frac{8\pi}{5}k} = \\ &= 1 + e^{-j\frac{2\pi}{5}k} - e^{-j\frac{4\pi}{5}k} - e^{-j\frac{(6-10)\pi}{5}k} + e^{-j\frac{(8-10)\pi}{5}k} = 1 + e^{-j\frac{2\pi}{5}} - e^{-j\frac{4\pi}{5}} - e^{j\frac{4\pi}{5}} + e^{j\frac{2\pi}{5}} = \\ &= 1 + 2\cos(2\pi k/5) - 2\cos(4\pi k/5) \end{aligned}$$

DFT signala je realna pa zaključujemo da je b) DFT signala $x(n)$ realna ukoliko važe sledeće jednakosti:

$$\begin{aligned} x(1) &= x(N-1) \\ x(2) &= x(N-2) \\ &\;\;\vdots \\ x(n) &= x(N-n) \end{aligned}$$

Zadatak 4.

$x(n)$ je periodičan sa periodom $N_0 = 4$, realan, signal. Poznati su odbirci DFT $X(0) = 3$, $X(1) = j$, $X(2) = -1$ za $N = 4$. Odrediti odbirke DFT $X(k)$ za $N = 12$, za svako k.

Rješenje:

U ovom zadatku nam nisu dati odbirci signala po vremenu, već njegova nepotpuna DFT. Na osnovu ZADATKA 1 i podatka da je u pitanju realan signal, zaključujemo da će važiti da je $X(k) = X^*(N-k)$ za $k = 1..\frac{N}{2}$, pa dobijamo komponentu $X(3)$ koja je nedostajala da bi DFT datog signala za $N = 4$ bila u potpunosti definisana. Naime, $X(3) = X^*(1) = -j$.

Da bi se dobila DFT signala za $N = 12$ potrebno je izvesti vezu sa DFT za $N = 4$. Pođimo od definicije za DFT za $N = 12$:

$$X_{12}(k) = \sum_{n=0}^{11} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{12}nk}, \text{ za } k = 0, ..., 11$$

Sa druge strane, za $N = 4$ važi:

$$X_4(k) = \sum_{n=0}^{4} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{4}nk}, \text{ za } k = 0, ..., 3$$

Da bi povezali DFT za $N = 4$ i $N = 12$ pišemo:

$$\begin{aligned} X_{12}(k) &= \sum_{n=0}^{11} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{12}nk} = \sum_{n=0}^{3} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{12}nk} + \sum_{n=4}^{7} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{12}nk} + \sum_{n=8}^{11} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{12}nk} = \\ &= \sum_{n=0}^{3} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{12}nk} + \sum_{n=0}^{3} x(n+4) e^{-j\frac{2\pi}{12}(n+4)k} + \sum_{n=0}^{3} x(n+8) e^{-j\frac{2\pi}{12}(n+8)k} \end{aligned}$$

Signal je periodičan sa periodom $N_0 = 4$, pa važi $x(n) = x(n+4) = x(n+8)$. Prethodna jednakost se sada može pisati kao:

$$\begin{aligned} X_{12}(k) &= \qquad (1) \\ &= \sum_{n=0}^{3} \left[x(n) e^{-j\frac{2\pi}{12}nk} + x(n+4) e^{-j\frac{2\pi}{12}nk} e^{-j\frac{2\pi}{12}4k} + x(n+8) e^{-j\frac{2\pi}{12}nk} e^{-j\frac{2\pi}{12}8k} \right] \qquad (2) \\ &= \sum_{n=0}^{3} x(n) \left[1 + e^{-j\frac{2\pi}{3}k} + e^{-j\frac{2\pi}{3}2k} \right] e^{-j\frac{2\pi}{12}nk} \end{aligned}$$

$1 + e^{-j\frac{2\pi}{3}k} + e^{-j\frac{2\pi}{3}2k}$ je suma prva tri člana geometrijskog reda i jednaka je:

$$\begin{aligned} 1 + e^{-j\frac{2\pi}{3}k} + e^{-j\frac{2\pi}{3}2k} &= \frac{1 - (e^{-j\frac{2\pi}{3}k})^3}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}k}} = \frac{1 - e^{-j2\pi k}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}k}} = \\ &= \frac{e^{-j\pi k}}{e^{-j\frac{\pi k}{3}}} \frac{e^{j\pi k} - e^{-j\pi k}}{e^{j\frac{\pi k}{3}} - e^{-j\frac{\pi k}{3}}} = e^{-j\frac{2\pi k}{3}} \frac{\sin \pi k}{\sin(\pi k/3)} = \\ &= e^{-j\frac{2\pi k}{3}} 3 \frac{\sin \pi k/\pi k}{\sin(\pi k/3)/(\pi k/3)} = \begin{cases} 3, \text{za } k = 3k_1 \\ 0, \text{za } k \neq 3k_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Sada se (1) može pisati kao:

$$X_{12}(k) = \left\{ \begin{array}{c} \sum_{n=0}^{3} x(n) 3 e^{-j\frac{2\pi}{12}nk} \text{ za } k = 3k_1 \\ 0 \text{ za } k \neq 3k_1 \end{array} \right. ,$$

odnosno uvrštavajući $k = 3k_1$ dobijamo:

$$X_{12}(k) = \sum_{n=0}^{3} x(n) 3 e^{-j\frac{2\pi}{12}n3k_1} = \sum_{n=0}^{3} x(n) 3 e^{-j\frac{2\pi}{4}nk_1} = 3X_4(k_1), \text{ za } k = 3k_1$$

Dakle:

$$X_{12}(k) = \left\{ \begin{array}{c} 3X_4(k_1) \text{ za } k = 3k_1 \\ 0, \text{za } k \neq 3k_1 \end{array} \right. .$$

Imajući prethodnu relaciju u vidu, vrijednosti za sve komponente DFT $X_{12}(k)$ su: $X_{12}(0) = 3X_4(0) = 9$, $X_{12}(1) = X_{12}(2) = 0$, $X_{12}(3) = X_{12}(3*1) = 3X_4(1) = 3j$, $X_{12}(4) = X_{12}(5) = 0$, $X_{12}(6) = X_{12}(3*2) = 3X_4(2) = -3$, $X_{12}(7) = X_{12}(8) = 0$, $X_{12}(9) = X_{12}(3*3) = 3X_4(3) = -3j$, $X_{12}(10) = X_{12}(11) = 0$.