



**UNIVERZITET CRNE GORE
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET U PODGORICI**

Veljko Vukadinović

**ESTIMACIJA EFEKTIVNE BRZINE VJETRA U
VJETROELEKTRANAMA PRIMJENOM NELINEARNIH
OPSERVERA STANJA**

- MAGISTARSKI RAD -

Podgorica, 2024. godine

INFORMACIJE O MAGISTRANTU

Ime i prezime:	Veljko Vukadinović
Datum i mjesto rođenja:	30.10.1997. godine, Bijelo Polje, Crna Gora
Naziv završenog osnovnog studijskog programa i godina diplomiranja:	Energetika i automatika, 2019.
Naziv završenog specijalističkog studijskog programa i godina diplomiranja:	Energetika i automatika – Automatika, 2020.

INFORMACIJE O MAGISTARSKOM RADU

Naziv postdiplomskog magistarskog studijskog programa:	Automatika
Naslov rada:	Estimacija efektivne brzine vjetra u vjetroelektranama primjenom nelinearnih opservera stanja
Fakultet/Akademija na kojem je rad odbranjen:	Elektrotehnički fakultet, Univerzitet Crne Gore

OCJENA I ODBRANA MAGISTARSKOG RADA

Datum prijave magistarskog rada:	15.09.2022. godine
Datum sjednice Vijeća Univerzitetske jedinice na kojoj je prihvaćena tema:	19.10.2022. godine
Komisija za ocjenu teme i podobnosti magistranta:	Prof. dr Božo Krstajić Prof. dr Žarko Zečević Prof. dr Milovan Radulović
Mentor:	Prof. dr Žarko Zečević
Komisija za ocjenu rada:	Prof. dr Božo Krstajić Prof. dr Žarko Zečević Prof. dr Milovan Radulović
Komisija za odbranu rada:	Prof. dr Božo Krstajić Prof. dr Žarko Zečević Prof. dr Milovan Radulović
Datum odbrane:	19.11.2024. godine

Ime i prezime autora: Veljko Vukadinović

ETIČKA IZJAVA

U skladu sa članom 24 Zakona o akademskom integritetu i članom 18 Pravila studiranja na postdiplomskim studijama, pod krivičnom i materijalnom odgovornošću, izjavljujem da je magistarski rad pod naslovom

"Estimacija efektivne brzine vjetra u vjetroelektranama primjenom
nelinearnih opservera stanja"

moje originalno djelo.

Podnositelj izjave,

Veljko Vukadinović

Veljko V.

U Podgorici, dana 11.10.2024. godine

PREDGOVOR

U savremenom dobu, obnovljivi izvori energije postaju sve važniji za proizvodnju električne energije, a njihova primjena rapidno raste. Među obnovljivim izvorima energije, vjetar se izdvaja kao jedan od najzastupljenijih i najperspektivnijih oblika energije. Da bi se maksimizirala efikasnost rada vjetroturbina, neophodno je primijeniti napredne tehnike upravljanja, koje će omogućiti optimalnu konverziju energije vjetra u električnu energiju, pri čemu se minimiziraju gubici i opterećenja na sistem.

Efektivna brzina vjetra, kao ključni parametar za optimizaciju rada vjetroturbine, često se ne može precizno odrediti samo putem mjerena anemometrom. Zbog toga se u praksi koriste matematički algoritmi, poznati kao nelinearni opserveri, koji omogućavaju tačniju estimaciju ove fizičke veličine. Primjena opservera, poput Kalmanovog filtra ili „Divide Difference“ filtra, omogućava poboljšanje performansi vjetrogeneratora, uz povećanje izlazne snage i smanjenje opterećenja na komponente.

Glavni cilj ovog istraživanja je analiza različitih nelinearnih estimatora stanja i njihova primjena na modelu vjetroturbine. Kroz komparativnu analizu nekoliko metoda, istražuje se njihov uticaj na efikasnost rada vjetroturbine, kao i preciznost estimacije efektivne brzine vjetra. Zaključci do kojih se dolazi doprinose daljem razvoju i unapređenju tehnika upravljanja u oblasti obnovljivih izvora energije, posebno u vetroelektranama.

REZIME

Ovaj rad se bavi estimacijom efektivne brzine vjetra u vjetroelektranama korišćenjem nelinearnih opservera stanja. Kroz analizu različitih pristupa, kao što su Prošireni Kalmanov filter (EKF) i „Divided Difference” (DD) filtri, rad ispituje mogućnosti poboljšanja estimacije ključnih varijabli koje utiču na rad vjetroturbina. Estimacija efektivne brzine vjetra je od suštinskog značaja za optimizaciju rada vjetroelektrana, jer omogućava efikasno upravljanje turbinama i povećava njihovu energetsku efikasnost.

Numerički eksperimenti prikazani u ovom radu pružaju uvid u performanse EKF-a i DD filtara, kao i njihov odgovor na šumove u sistemu. Rezultati pokazuju da ovi algoritmi značajno doprinose preciznijoj estimaciji stanja, čime se poboljšava rad vjetroelektrana u dinamičnim uslovima. Rad takođe sugerira potencijalna unapređenja postojećih algoritama kroz buduća istraživanja.

Ključne riječi: vjetroelektrane, efektivna brzina vjetra, prošireni Kalmanov filter, Divided Difference filter, estimacija stanja

ABSTRACT

This paper addresses the estimation of the effective wind speed in wind farms using nonlinear state observers. By analyzing different approaches, such as the Extended Kalman Filter (EKF) and Divided Difference (DD) filters, the paper explores the possibilities for improving the estimation of key variables affecting wind turbine performance. Estimating the effective wind speed is crucial for optimizing wind farm operations, as it enables efficient turbine control and enhances energy efficiency.

The numerical experiments presented in this paper provide insight into the performance of EKF and DD filters, as well as their response to system noise. The results demonstrate that these algorithms significantly contribute to more accurate state estimation, improving wind farm operation under dynamic conditions. The paper also suggests potential improvements to existing algorithms through future research.

Keywords: wind farms, effective wind speed, Extended Kalman Filter, Divided Difference filter, state estimation

SADRŽAJ:

1.	UVOD	1
2.	KALMANOV FILTAR.....	3
2.1.	Modelovanje procesa u prirodi.....	3
2.1.1.	Model običnih diferencijalnih jednačina.....	4
2.1.2.	Model u prostoru stanja.....	4
2.2.	Algoritam Kalmanove filtracije	5
2.2.1.	Postavka problema	5
2.2.2.	Nepomjerenost estimacije	6
2.2.3.	Minimizacija varijanse greške.....	9
2.2.4.	Kalmanov algoritam.....	12
2.3.	Numerički primjer – DC motor	13
3.	ESTIMACIJA STANJA NELINEARNIH SISTEMA	18
3.1.	Prošireni Kalmanov filter (EKF).....	18
3.1.1.	Tejlorov red	19
3.1.2.	Algoritam proširenog Kalmanovog filtra.....	20
3.1.3.	Numerički primjer – Matematičko klatno (EKF).....	22
3.2.	„Divided difference“ (DD) filtri	26
3.2.1.	Stirlingova interpolacija	27
3.2.2.	Filtar prvog reda – DD1	31
3.2.3.	Filtar drugog reda – DD2	38
3.3.	Linearni Kalmanov filter sa Njutn-Rapsonovim metodom.....	43
3.3.1.	Njutn-Rapsonov metod	43
4.	DINAMIČKI MODEL VJETROELEKTRANE	45
4.1.	Konverzija energije vjetra	45
4.2.	Podjela vjetroturbina	48
4.2.1.	Vjetroturbine sa konstantnom brzinom (danski tip turbine)	48
4.2.2.	Vjetroturbine sa djelimično promjenjivom brzinom.....	49

4.2.3.	Vjetroturbine sa promjenjivom brzinom	49
4.3.	Upravljanje vjetroelektranom.....	50
4.3.1.	Upravljanje elektranom sa konstatnom brzinom.....	51
4.3.2.	Upravljanje elektranom sa promjenjivom brzinom – MPPT metod	52
4.3.3.	Ograničenja u upravljanju	53
4.4.	Model vjetroelektrane	53
4.4.1.	Aerodinamički model.....	53
4.4.2.	Mehanički model.....	55
4.4.3.	Model u prostoru stanja.....	57
5.	REZULTATI SIMULACIJA	60
5.1.	Postavka eksperimenta	60
5.1.1.	Efektivna brzina vjetra	60
5.1.2.	Definisanje parametara elektrane	61
5.1.3.	Definisanje modela u prostoru stanja za svaki pojedinačni estimator	61
5.1.4.	Šumovi pri estimaciji i parametri filtara	62
5.1.5.	Upravljanje	63
5.2.	Rezultati eksperimenta	63
5.2.1.	Brza promjena efektivne brzine vjetra: DD1, DD2, EKF i KF-NR	63
5.2.2.	Spora promjena efektivne brzine vjetra: DD1, DD2, EKF i KF-NR	65
5.2.3.	Estimacija sa jednim senzorom: DD1, DD2 i EKF.....	66
5.2.4.	Estimacija sa dva senzora: DD1, DD2 i EKF	70
6.	ZAKLJUČAK	76
	LITERATURA	77

1. UVOD

U posljednjim decenijama, svijet se suočava s rastućom potrebom za održivim izvorima energije kako bi se smanjila zavisnost od fosilnih goriva i ublažile posljedice klimatskih promjena. Vjetroelektrane, kao ključni predstavnici obnovljivih izvora energije, igraju značajnu ulogu u ovoj tranziciji. Ove elektrane koriste snagu vjetra, pretvarajući kinetičku energiju kretanja vazduha u električnu energiju, što čini njihov rad ekološki prihvatljivim i efikasnim. Ipak, operativna efikasnost vjetroelektrana u velikoj mjeri zavisi od tačne procjene brzine vjetra, što direktno utiče na performanse sistema i njegovu sposobnost da proizvodi energiju.

Jedan od ključnih izazova u radu vjetroelektrana jeste precizna estimacija efektivne brzine vjetra. Brzina vjetra može značajno varirati uslijed promjenljivih meteoroloških uslova i kompleksnih aerodinamičkih efekata, te je važno da sistem za upravljanje vjetroturbinama bude sposoban da se brzo i precizno prilagodi ovim promjenama. Upravo iz tog razloga, estimacija stanja sistema, a posebno procjena efektivne brzine vjetra, postaje jedan od ključnih zadataka u optimizaciji rada vjetroelektrana. Bez adekvatne estimacije brzine vjetra, turbine mogu raditi u neoptimalnim uslovima, što rezultira manjom efikasnošću i smanjenom proizvodnjom energije.

Tehnologije za procjenu stanja, kao što su opserveri stanja i Kalmanovi filtri, pružaju efikasne alate za rješavanje ovog problema. Kalmanov filter, razvijen 1960. godine, predstavlja jedan od najvažnijih matematičkih alata za filtriranje šuma i optimizaciju estimacije stanja u dinamičnim sistemima. Njegova primjena je raznovrsna, od praćenja svemirskih letjelica, pa sve do upravljanja modernim sistemima kao što su autonomna vozila i, naravno, vjetroelektrane. Kalmanov filter omogućava estimaciju stanja u prisustvu šuma, što ga čini idealnim za sisteme u kojima mjerena nijesu potpuno pouzdana. Međutim, s obzirom na to da su mnogi procesi u prirodi nelinearni, klasični Kalmanov filter, koji je osmišljen za linearne sisteme, mora biti proširen kako bi mogao da odgovori na potrebe složenih nelinearnih modela. Tako je nastao prošireni Kalmanov filter (EKF), koji koristi linearizaciju nelinearnih sistema i omogućava njihovo precizno modelovanje i praćenje.

Osim EKF-a, u novije vrijeme razvijeni su i drugi algoritmi za estimaciju stanja u nelinearnim sistemima, poput „Divided Difference” (DD) filtara. Ovi filtri koriste alternativne metode za linearizaciju nelinearnih sistema, pružajući različite prednosti u pogledu tačnosti i složenosti u odnosu na EKF. „Divided Difference” filtri koriste Stirlingovu interpolaciju umjesto Tejlorovog reda, čime omogućavaju bolju aproksimaciju u situacijama kada funkcija nije diferencijabilna ili kada postoje singulariteti.

Efektivna brzina vjetra, koju ove metode estimiraju, predstavlja osnovu za efikasno upravljanje vjetroturbinama. Estimacija ove veličine omogućava prilagođavanje parametara turbine promjenama, što direktno utiče na količinu energije koja se proizvodi. Uz pomoć precizne estimacije efektivne brzine vjetra, moguće je optimizovati ugao zakrivljenja lopatica

turbine, brzinu rotacije i druge ključne parametre kako bi se maksimizirala proizvodnja energije. Sve ovo rezultira većom efikasnošću i održivošću vjetroelektrana, što ih čini ključnim elementom globalne tranzicije ka zelenoj energiji.

Cilj ovog rada je da istraži primjenu naprednih algoritama za estimaciju efektivne brzine vjetra, fokusirajući se na nelinearne opservere stanja kao što su EKF i DD filtri. Rad analizira njihove karakteristike, prednosti i nedostatke, te putem numeričkih eksperimenata demonstrira njihovu primjenu u realnim scenarijima rada vjetroelektrana. Kroz simulacije se procjenjuje kako različiti pristupi filtraciji šuma i estimaciji stanja mogu poboljšati performanse vjetroturbina, omogućavajući preciznije estimacije i stabilniji rad sistema.

Osim toga, rad se osvrće na važnost ispravnog modelovanja šuma u sistemu, jer su šumovi u mjerjenjima često neizbjegni u složenim dinamičkim sistemima poput vjetroelektrana. Pravilno modelovanje i tretman šumova kroz filtere poput EKF-a i DD filtara omogućava tačniju estimaciju stanja i smanjenje grešaka, što je od ključnog značaja za održivost i dugoročni uspjeh vjetroelektrana.

Ovaj rad pruža detaljan pregled metodologija, algoritama i simulacija koji su relevantni za savremene pristupe upravljanju vjetroelektranama. Na osnovu sprovedenih eksperimenata i analiza, rad nudi uvide i preporuke za buduća istraživanja i razvoj algoritama koji će dodatno poboljšati rad ovih složenih sistema.

Rad je organizovan u pet poglavlja. Nakon uvoda, u drugom poglavlju, razmatra se teorijska osnova linearног Kalmanovog filtra i njegovo izvođenje. Treće poglavlje fokusira se na metode estimacije stanja u nelinearnim sistemima, sa posebnim osvrtom na EKF i "Divided Difference" filtre. U četvrtom poglavlju izведен je dinamički model vjetroelektrane, dok se u petom poglavlju vrši numerički eksperiment sa simulacijama rada vjetroturbine koristeći upravljanje sa razmatranim metodama estimacije. Na kraju, zaključak sumira rezultate i daje preporuke za buduća istraživanja.

2. KALMANOV FILTAR

Kalmanov filter je rekurzivni algoritam koji na optimalan način vrši estimaciju stanja određenog sistema. Osnovna postavka Kalmanovog algoritma je data 1960. godine i odnosila se na problem filtracije bijelog šuma kod linearnih sistema [1]. Kasnije je na osnovu njega osmišljen algoritam za filtraciju kod nelinearnih sistema, nazvan *Prošireni Kalman filter* ili EKF (*Extended Kalman Filter*) [2]. Pored ovih, u literaturi se pominju i druge varijante Kalmanovog algoritma, kakav je na primjer *Kalmanov filter bez mirisa (Unscented Kalman filter)*, koji je izveo S. R. Julier [3]-[5]. Takođe, postoje različiti opserveri zasnovani na Kalmanovim filtrima, koji se primjenjuju u različitim situacijama. Tako se, na primjer, za identifikaciju sistema mogu koristiti *Recursive Prediction Error Method* (ili *RPEM*) filter i *Adaptivni Kalmanov filter (Adaptive Extended Kalman Filter - AEKF)* [6], [7].

Kalmanov filter je prvi put korišćen za praćenje svemirskih letjelica, a brzo je našao primjenu i u robotici [8], finansijama [9], praćenju pokretnog cilja [10] i slično.

Prije izvođenja algoritma Kalmanove filtracije, neophodno je uvesti neke osnovne pojmove vezane za modelovanje procesa u prirodi.

2.1. MODELOVANJE PROCESA U PRIRODI

Modelovanje procesa u prirodi se vrši radi jednostavnijeg, jeftinijeg i lakšeg izučavanja odgovarajućih procesa, ili upravljanja istim. U nauci se koriste tri tipa modela: fizički, analogni i matematički [11].

Fizički model podrazumijeva formiranje skaliranog procesa iz prirode koji preslikava glavne osobine stvarnog procesa. Ovakvi modeli najviše liče na stvarni proces, ali je na njima otežano proučavanje efekata promjene na originalu, tako da su često nefleksibilni i skupi.

Analogni model koristi drugačiji proces od zadatog, ali takav da ga opisuju slične matematičke jednačine, čime se analogijom može doći do informacija o ponašanju zadatog procesa.

Matematički model je najapstraktniji, ali premošćava sve nedostatke ostalih modela. Matematički model se dobija primjenom poznatih fizičkih zakona koji opisuju zadati proces.

Da bi se izvršilo odgovarajuće upravljanje procesima u prirodi, najčešće se koriste matematički modeli. Matematički model nekog sistema automatskog upravljanja se može dobiti na više načina. Za linearne vremenski invarijantne sisteme, načini modelovanja su sljedeći [12]:

1. Obične diferencijalne jednačine višeg reda (ODE model)
2. Model u prostoru stanja (SS model)
3. Prenosna funkcija (TF model)
4. Strukturni blok dijagram (SBD model)

Nelinearne sisteme je moguće modelovati kombinovanjem navedenih načina ili odgovarajućim izmjenama istih.

U cilju izvođenja algoritama nelinearnih opservera, biće korišćen SS model koji proizilazi iz ODE modela.

2.1.1. Model običnih diferencijalnih jednačina

Metodom običnih diferencijalnih jednačina, neki proces se predstavlja diferencijalnom jednačinom višeg reda koja ga opisuje. Ovakav način modelovanja je često nepraktičan za analizu osnovnih karakterističnih veličina sistema, te se odgovarajućim smjenama dolazi do modela u prostoru stanja.

2.1.2. Model u prostoru stanja

Model u prostoru stanja dobija se tako što se neki dinamički proces opiše diferencijalnim jednačinama prvog reda. Ukoliko su veze između fizičkih veličina od značaja takve da se ponašanje procesa opisuje diferencijalnim jednačinama višeg reda, tada je u cilju dobijanja modela u prostoru stanja potrebno uvesti odgovarajuće smjene, tj. potrebno je uvesti veličine koje su povezane sa fizičkim veličinama, ali matematički opisuju proces diferencijalnim jednačinama prvog reda. Iz ovog razloga može se desiti da proces bude opisan veličinama koje nemaju fizički smisao. U ovom slučaju, veličine koje proces opisuju diferencijalnim jednačinama prvog reda, nazivaju se **promjenjive stanja**.

U teoriji sistema automatskog upravljanja, od značaja je fizička veličina koja se dobija na izlazu sistema i koja se često može mjeriti. Takva fizička veličina se naziva **izlaz procesa**.

Ukoliko postoje veličine kojima se može uticati na proces, tj. pomoću kojih se može upravljati procesom, onda se te veličine zovu **upravljačke veličine**.

Neka je \mathbf{x} vektor promjenjivih stanja dimenzije n , neka je \mathbf{u} vektor upravljačkih veličina dimenzije l i neka je \mathbf{y} vektor izlaza procesa dimenzije m , pri čemu je $n \geq m$ i $n \geq l$. Veze između navedenih veličina opisane su matricama \mathbf{A}, \mathbf{B} i \mathbf{C} . Model u prostoru stanja opisan je sljedećim jednačinama:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \quad (1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx}. \quad (2)$$

Ukoliko veze među promjenjivim nijesu linearne, sistem se opisuje sljedećim jednačinama:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (3)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (4)$$

gdje su \mathbf{f} i \mathbf{g} vektori funkcija koje predstavljaju zavisnosti među navedenim veličinama.

2.2. ALGORITAM KALMANOVE FILTRACIJE

2.2.1. Postavka problema

Neka je zadat linearan, vremenski invarijantan proces koji je opisan modelom u prostoru stanja, tj. jednačinama (1) i (2). Vektor izlaza procesa opisuje mjerljive izlazne veličine.

Mjerenje izlaza se vrši nekim mjernim instrumentom. Mjerni instrumenti su okarakterisani odgovarajućom tačnošću, tj. odgovarajućom apsolutnom ili relativnom greškom koju prave. Takođe, mjerni instrument može biti podložan smetnjama iz spoljašnje sredine. U cilju modelovanja, greška izlaza procesa je predstavljena bijelim šumom, normalne raspodjele, srednje vrijednosti 0 i varijanse R. Greška je označena sa v , pri čemu važi

$$p(v) = N(0, R), \quad (5)$$

$$R = E[v \cdot v^T]. \quad (6)$$

Greška se može javiti i u samom modelu sistema. Može se desiti da zakoni koji opisuju proces nijesu potpuno tačni (radi različitih aproksimacija korišćenih u njihovom izvođenju) ili da se greška javi prilikom linearizacije nelinearnih jednačina. Prilikom modelovanja, neophodno je i ovu grešku uzeti u obzir. Greška modela je predstavljena bijelim šumom, normalne raspodjele, srednje vrijednosti 0 i varijanse Q. Greška je označena sa w , pri čemu važi

$$p(w) = N(0, Q), \quad (7)$$

$$Q = E[w \cdot w^T]. \quad (8)$$

Dodajući ove veličine u jednačine (1) i (2), dobija se zašumljeni model u prostoru stanja

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{w}, \quad (9)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{v}, \quad (10)$$

pri čemu su \mathbf{w} i \mathbf{v} vektori greške (bijelog šuma) stanja i mjerena, respektivno.

Primjenom Kalmanovog algoritma, moguće je filtrirati šum, tj. minimizovati grešku u modelu i mjerenu, zbog čega se pomenuti algoritam i zove Kalmanov filter. Kombinovanjem informacija koje se dobijaju iz modela sa informacijama koje su dobijene mjeranjem moguće je estimirati (tj. predvidjeti) ponašanje promjenjivih stanja procesa u vremenu.

Izvođenje Kalmanovog algoritma se vrši u diskretnom domenu, mada je moguće izvršiti izvođenje i u kontinualnom domenu. S tim u vezi, jednačine (9) i (10) u diskretnom domenu, u trenutku k imaju oblik

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k, \quad (11)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k. \quad (12)$$

Ideja Kalmanovog algoritma se zasniva na vršenju estimacije stanja u dva koraka, pri čemu se u posebnim koracima koriste različite dostupne informacije procesa. Prvo će biti upotrijebljena informacija koja se dobija iz modela procesa i time će biti završen „a priori“ korak. Jednačina stanja će imati sljedeći oblik

$$\hat{\mathbf{x}}_{k^-} = \mathbf{A}_{(k-1)} \hat{\mathbf{x}}_{(k-1)^+} + \mathbf{B}_{(k-1)} \mathbf{u}_{(k-1)}. \quad (13)$$

U jednačini (13) veličina $\hat{\mathbf{x}}_{k^-}$ predstavlja „a priori“ estimaciju stanja, tj. estimaciju koja se izvršava neposredno prije trenutka k . Ovaj dio estimacije se može izvršiti *offline*, tj. bez upotrebe mjerena u trenutku k .

Nakon izvršenog mjerena, dostupan je izlaz procesa \mathbf{y}_k , pa se računa estimacija za momenat „+“, tj. estimacija stanja u trenutku k izvršena neposredno nakon trenutka k (odmah nakon dobijanja informacije sa mjernog instrumenta). Ovaj korak u estimaciji se naziva „a posteriori“ i jednačina kojom se opisuje će imati sljedeći oblik

$$\hat{\mathbf{x}}_{k^+} = \mathbf{K}_k^x \hat{\mathbf{x}}_{k^-} + \mathbf{K}_k^y \mathbf{y}_k. \quad (14)$$

U jednačini (14) veličina $\hat{\mathbf{x}}_{k^+}$ predstavlja „a posteriori“ estimaciju stanja, tj. estimaciju koja se izvršava neposredno nakon trenutka k . U ovoj jednačini figurišu pojačanja \mathbf{K}_k^x i \mathbf{K}_k^y kojom se reguliše koliko se „vjeruje“ modelu, a koliko mjerenu. Kako je ranije naglašeno, model i mjerena su pod uticajem šuma, te u zavisnosti od procjene, filter se može opredijeliti prema jednoj ili prema drugoj informaciji.

Estimacija stanja se u ovom slučaju vrši bazirano na dva principa, tj. tako da budu zadovoljena dva uslova:

1. Nepomerenost estimacije (srednja vrijednost greške estimacije treba da bude jednaka nuli)
2. Minimizacija varijanse greške

Prema zadatim principima, dolazi se do matematičke povezanosti veličina \mathbf{K}_k^x i \mathbf{K}_k^y jedne između druge, kao i njihove povezanosti sa ostalim veličinama koje figurišu u modelu prostora stanja.

2.2.2. Nepomerenost estimacije

Greška estimacije može se odnositi na grešku estimacije „+“ ili „-“ trenutka. Greška je definisana kao

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k^\pm} = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k^\pm}. \quad (15)$$

Prilikom svake estimacije, teži se da razlika između stvarne i estimirane vrijednosti bude minimalna, tj. da greška bude jednaka nuli ($\tilde{\mathbf{x}}_{k^\pm} = 0$).

U jednačini (14) figurišu vrijednosti pojačanja \mathbf{K} koje još uvijek nijesu matematički definisane. Njihove vrijednosti će biti podešene na taj način da se zadovolji zahtjev nepomerenosti estimacije. Pošto u jednačini (14) figuriše „a posteriori“ estimacija stanja, onda je jasno da će za izvođenje pojačanja \mathbf{K} biti iskorišćen „+“ trenutak, tj. vrijednost greške $\tilde{\mathbf{x}}_{k^+}$.

Uvrštavanjem izraza (14) i (12) u izraz (15), dobija se sljedeće

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_{k^+} &= \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k^+} = \\ &= \mathbf{x}_k - (\mathbf{K}_k^x \hat{\mathbf{x}}_{k^-} + \mathbf{K}_k^y \mathbf{y}_k) = \\ &= \mathbf{x}_k - \mathbf{K}_k^x \hat{\mathbf{x}}_{k^-} - \mathbf{K}_k^y (\mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k) = \\ &= \mathbf{x}_k - \mathbf{K}_k^x \hat{\mathbf{x}}_{k^-} - \mathbf{K}_k^y \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{K}_k^y \mathbf{v}_k.\end{aligned}$$

Namjenskom manipulacijom prethodnog izraza dodavanjem $\underbrace{\mathbf{K}_k^x (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k)}_{=0}$ u jednakost,

dolazi se do sljedećeg

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_{k^+} &= \mathbf{x}_k - \mathbf{K}_k^x \hat{\mathbf{x}}_{k^-} - \mathbf{K}_k^y \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{K}_k^y \mathbf{v}_k + \mathbf{K}_k^x (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k) = \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^y \mathbf{C}_k - \mathbf{K}_k^x) \mathbf{x}_k + \mathbf{K}_k^x \underbrace{(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k^-})}_{=\tilde{\mathbf{x}}_{k^-}} - \mathbf{K}_k^y \mathbf{v}_k = \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^y \mathbf{C}_k - \mathbf{K}_k^x) \mathbf{x}_k + \mathbf{K}_k^x \tilde{\mathbf{x}}_{k^-} - \mathbf{K}_k^y \mathbf{v}_k.\end{aligned} \quad (16)$$

Očekivana vrijednost greške treba da bude jednaka nuli, što se matematički zapisuje kao

$$\begin{aligned}E[\tilde{\mathbf{x}}_{k^+}] &= E[(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^y \mathbf{C}_k - \mathbf{K}_k^x) \mathbf{x}_k] + E[\mathbf{K}_k^x \tilde{\mathbf{x}}_{k^-}] - E[\mathbf{K}_k^y \mathbf{v}_k] = \\ &= \underbrace{E[(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^y \mathbf{C}_k - \mathbf{K}_k^x)]}_{=0} \cdot E[\mathbf{x}_k] + E[\mathbf{K}_k^x] \cdot \underbrace{E[\tilde{\mathbf{x}}_{k^-}]}_{=0} - E[\mathbf{K}_k^y] \underbrace{E[\mathbf{v}_k]}_{=0} = 0.\end{aligned} \quad (17)$$

Očekivana vrijednost šuma koji djeluje na mjerjenje je jednaka nuli, te je član $E[\mathbf{v}_k] = 0$.

Za prvi sabirak u izrazu (17) važi da će biti jednak nuli jedino ukoliko je $E[(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^y \mathbf{C}_k - \mathbf{K}_k^x)] = 0$. To dalje znači da je

$$\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^y \mathbf{C}_k - \mathbf{K}_k^x = 0,$$

$$\boxed{\mathbf{K}_k^x = \mathbf{I} - \mathbf{K}_k^y \mathbf{C}_k}. \quad (18)$$

Kako je moguće izraziti \mathbf{K}_k^x preko \mathbf{K}_k^y , to znači da je dovoljno imati samo jednu vrijednost pojačanja. Pojačanje \mathbf{K}_k^y će u nastavku biti zapisano bez sufiksa „y“ i biće nazvano Kalmanovo pojačanje ($\mathbf{K}_k = \mathbf{K}_k^y$ - Kalmanovo pojačanje).

Ukoliko se vrijednost Kalmanovog pojačanja uvrsti u izraz (14), dobija se da je

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k^+} &= \mathbf{K}_k^x \hat{\mathbf{x}}_{k^-} + \mathbf{K}_k^y \mathbf{y}_k = \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \hat{\mathbf{x}}_{k^-} + \mathbf{K}_k \mathbf{y}_k,\end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}}_{k^+} = \hat{\mathbf{x}}_{k^-} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{k^-})}. \quad (19)$$

Vrativši se na izraz (17), da bi očekivana vrijednost greške mogla da bude jednak nuli, vidi se da je potrebno da bude i $E[\tilde{\mathbf{x}}_{k^-}] = 0$. Greška u koraku „a priori“ se može zapisati kao

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_{k^-} &= \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k^-} = \\ &= (\mathbf{A}_{(k-1)} \mathbf{x}_{(k-1)} + \mathbf{B}_{(k-1)} \mathbf{u}_{(k-1)} + \mathbf{w}_k) - (\mathbf{A}_{(k-1)} \hat{\mathbf{x}}_{(k-1)^+} + \mathbf{B}_{(k-1)} \mathbf{u}_{(k-1)}) = \\ &= \mathbf{A}_{(k-1)} \underbrace{(\mathbf{x}_{(k-1)} - \hat{\mathbf{x}}_{(k-1)^+})}_{\tilde{\mathbf{x}}_{(k-1)^+}} + \mathbf{A}_{(k-1)} \mathbf{w}_k = \mathbf{A}_{(k-1)} \tilde{\mathbf{x}}_{(k-1)^+} + \mathbf{A}_{(k-1)} \mathbf{w}_k, \\ E[\tilde{\mathbf{x}}_{k^-}] &= E[\mathbf{A}_{(k-1)} \tilde{\mathbf{x}}_{(k-1)^+} + \mathbf{A}_{(k-1)} \mathbf{w}_k] = \\ &= E[\mathbf{A}_{(k-1)}] \cdot E[\tilde{\mathbf{x}}_{(k-1)^+}] + \underbrace{E[\mathbf{A}_{(k-1)}] \cdot E[\mathbf{w}_k]}_{=0}.\end{aligned} \quad (20)$$

Kao i za očekivanu vrijednost šuma mjerena, i za očekivanu vrijednost šuma stanja važi da je jednak nuli. Dalje se iz izraza (20) vidi da će očekivana vrijednost greške u „–“ trenutku biti jednak nuli ukoliko je vrijednost greške u prethodnom „+“ trenutku bila jednak nuli. Iterativno se vraćajući do početka estimacije, dolazi se do toga da je neophodno da početno očekivanje greške bude jednak nuli što će biti zadovoljeno ukoliko su očekivani početni uslovi slični stvarnim, tj.

$$\boxed{\mathbf{m}_0 = E[\mathbf{x}_0]}. \quad (21)$$

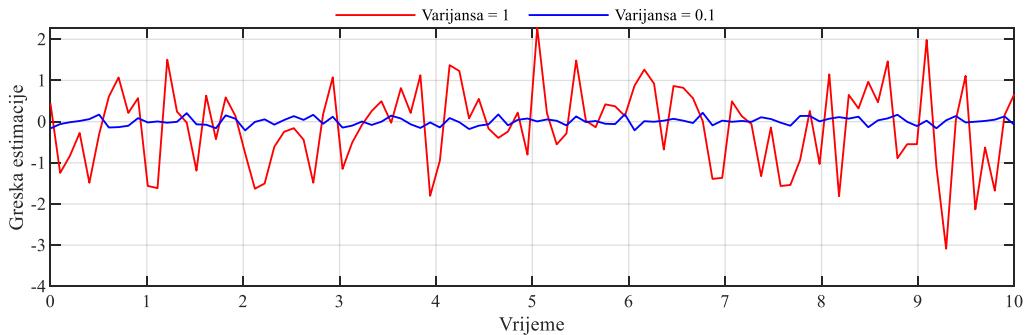
Izrazi (18) i (21) obezbijediće da očekivana vrijednost greške estimacije u svakom trenutku bude jednak nuli.

2.2.3. Minimizacija varijanse greške

Pored uslova nepomjerenosti estimacije, tj. uslova da je očekivana vrijednost greške u svakom trenutku estimacije jednaka nuli, postavlja se drugi uslov kojem filter treba da odgovori. U ovom slučaju se radi o varijansi greške.

Kako se radi o slučajnim procesima koji su definisani kroz svoju srednju vrijednost i kroz svoju varijansu, tako i greška estimacije može imati neku varijansu koju je neophodno minimizovati.

Na slici 1 su prikazane dvije različite vrijednosti greške. Obje greške imaju srednju vrijednost nula, sa razlikom što jedna greška estimacije ima varijansu 1, a druga 0.1.



Slika 1. Prikaz varijanse greške

Totalna greška estimacije $\sigma_{k^+}^2$ se može izraziti kao suma elemenata koji se nalaze na glavnoj dijagonali kovarijacione matrice

$$\mathbf{P}_{k^+} = E \left[\tilde{\mathbf{x}}_{k^+} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{k^+}^T \right]. \quad (22)$$

Elementi glavne dijagonale kovarijacione matrice predstavljaju varijanse greški stanja, dok elementi van glavne dijagonale predstavljaju kovarijanse. Od interesa za minimizaciju varijanse greške su elementi glavne dijagonale.

Da bi se postigla minimalna varijansa greške, biće iskorišćena vrijednost Kalmanovog pojačanja, koja je i dalje matematički nedefinisana. Vrijednost \mathbf{K}_k figuriše u izrazu (19), te je samim tim jasno da će za izvođenje biti potrebno iskoristiti „+“ trenutak.

Suma elemenata po glavnoj dijagonali predstavlja trag matrice, pa je

$$\sigma_{k^+}^2 = \text{tr} \left[\mathbf{P}_{k^+} \right]. \quad (23)$$

Minimum ovog izraza je moguće naći izjednačavanjem prvog izvoda po promjenjivoj \mathbf{K}_k sa nulom $\frac{\partial \sigma_{k^+}^2}{\partial \mathbf{K}_k} = 0$.

U cilju izvođenja, koristiće se dva pravila vezana za teoriju diferenciranja traga matrice

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \text{tr}[\mathbf{BAC}] = \mathbf{B}^T \mathbf{C}^T, \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \text{tr}[\mathbf{ABA}^T] = 2\mathbf{AB} \text{ za } \mathbf{B} = \mathbf{B}^T. \quad (25)$$

Greška „a posteriori“ stanja se može zapisati kao

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{k^+} &= \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k^+} = \\ &= \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k^-} - \mathbf{K}_k \mathbf{y}_k + \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{k^-} = \\ &= \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k^-} - \mathbf{K}_k (\mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k) + \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{k^-} = \\ &= \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k^-} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{k^-} - \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k = \\ &= \tilde{\mathbf{x}}_{k^-} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \tilde{\mathbf{x}}_{k^-} - \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k, \\ \tilde{\mathbf{x}}_{k^+} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \tilde{\mathbf{x}}_{k^-} - \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k. \end{aligned} \quad (26)$$

Kovarijansa greške se prema izrazu (26) može zapisati kao

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k^+} &= E[\tilde{\mathbf{x}}_{k^+} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{k^+}^T] = \\ &= E\left[\left((\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \tilde{\mathbf{x}}_{k^-} - \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k\right) \cdot \left(\tilde{\mathbf{x}}_{k^-}^T (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)^T - \mathbf{v}_k^T \mathbf{K}_k^T\right)\right] = \\ &= E\left[(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \tilde{\mathbf{x}}_{k^-} \tilde{\mathbf{x}}_{k^-}^T (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{K}_k^T\right] = \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_{k^-} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T = \\ &= \mathbf{P}_{k^-} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k^-} - (\mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k^-})^T + \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k^-} \mathbf{C}_k^T \mathbf{K}_k^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T = \\ &= \mathbf{P}_{k^-} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k^-} - (\mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k^-})^T + \mathbf{K}_k (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k^-} \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k) \mathbf{K}_k^T. \end{aligned} \quad (27)$$

Vraćajući se na izraz (23) dalje slijedi da je

$$\sigma_{k^+}^2 = \text{tr}[\mathbf{P}_{k^+}] = \text{tr}[\mathbf{P}_{k^-}] - 2\text{tr}[\mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k^-}] + \text{tr}[\mathbf{K}_k (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k^-} \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k) \mathbf{K}_k^T]. \quad (28)$$

Za dobijanje minimuma se koristi diferenciranje po promjenjivoj \mathbf{K}_k . Prvi član u izrazu (28) nije zavisan od promjenjive \mathbf{K}_k , te je njegov izvod jednak nuli. Za drugi član jednakosti, korišćenjem pravila (24), važi da je

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}_k} \operatorname{tr} \left[\mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k^-} \right] = \begin{cases} \mathbf{B} = \mathbf{I} \\ \mathbf{A} = \mathbf{K}_k \\ \mathbf{C} = \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k^-} \end{cases} = \mathbf{P}_{k^-} \mathbf{C}_k^T. \quad (29)$$

Za treći član jednakosti, korišćenjem pravila (25), važi da je

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}_k} \operatorname{tr} \left[\mathbf{K}_k \left(\mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k^-} \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k \right) \mathbf{K}_k^T \right] = \begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{K}_k \\ \mathbf{B} = \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k^-} \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k \end{cases} = 2 \mathbf{K}_k \left(\mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k^-} \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k \right) \quad (30)$$

Upotrebom izraza (28), (29) i (30), dobija se da je

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}_k} \sigma_{k^+}^2 = 0 - 2 \mathbf{P}_{k^-} \mathbf{C}_k^T + 2 \mathbf{K}_k \left(\mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k^-} \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k \right) = 0. \quad (31)$$

Iz izraza (31) se konačno dobija matematička definisanost Kalmanovog pojačanja

$$2 \mathbf{K}_k \left(\mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k^-} \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k \right) = 2 \mathbf{P}_{k^-} \mathbf{C}_k^T,$$

$$\boxed{\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k^-} \mathbf{C}_k^T \left(\mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k^-} \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k \right)^{-1}}. \quad (32)$$

Da je ovo stvarno minimum funkcije moguće je provjeriti nalaženjem drugog izvoda izraza (31)

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{K}_k^2} \sigma_{k^+}^2 = 2 \left(\mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k^-} \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k \right) \geq 0.$$

Vraćanjem vrijednosti pojačanja \mathbf{K}_k u izraz (27), dobija se vrijednost kovarijanse greške u „+“ trenutku definisane kao

$$\mathbf{P}_{k^+} = \mathbf{P}_{k^-} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k^-} - \left(\mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k^-} \right)^T + \left(\mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k^-} \right)^T,$$

$$\mathbf{P}_{k^+} = \mathbf{P}_{k^-} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k^-},$$

$$\boxed{\mathbf{P}_{k^+} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_{k^-}}. \quad (33)$$

Vrijednost greške \mathbf{P}_{k^-} se može izvesti na sljedeći način

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}}_{k^-} &= \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k^-} = \\
&= \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} - \mathbf{A}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{(k-1)^+} - \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} = \\
&= \mathbf{A}_{k-1} \tilde{\mathbf{x}}_{(k-1)^+} + \mathbf{w}_{k-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{k^-} &= E \left[\tilde{\mathbf{x}}_{k^-} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{k^-}^T \right] = \\
&= E \left[\left(\mathbf{A}_{k-1} \tilde{\mathbf{x}}_{(k-1)^+} + \mathbf{w}_{k-1} \right) \cdot \left(\tilde{\mathbf{x}}_{(k-1)^+}^T \mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{w}_{k-1}^T \right) \right],
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{P}_{k^-} = \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{P}_{(k-1)^+} \mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}}. \quad (34)$$

Kako kovarijaciona matrica iterativno zavisi od same sebe u prethodnom trenutku, potrebno je njenu početnu vrijednost podesiti kao

$$\boxed{\mathbf{P}_0 = E \left[(\mathbf{x}_0 - \mathbf{m}_0) \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{m}_0)^T \right]}. \quad (35)$$

Izrazi (32) i (35) obezbijediće da varijansa greške estimacije u svakom trenutku bude minimalna.

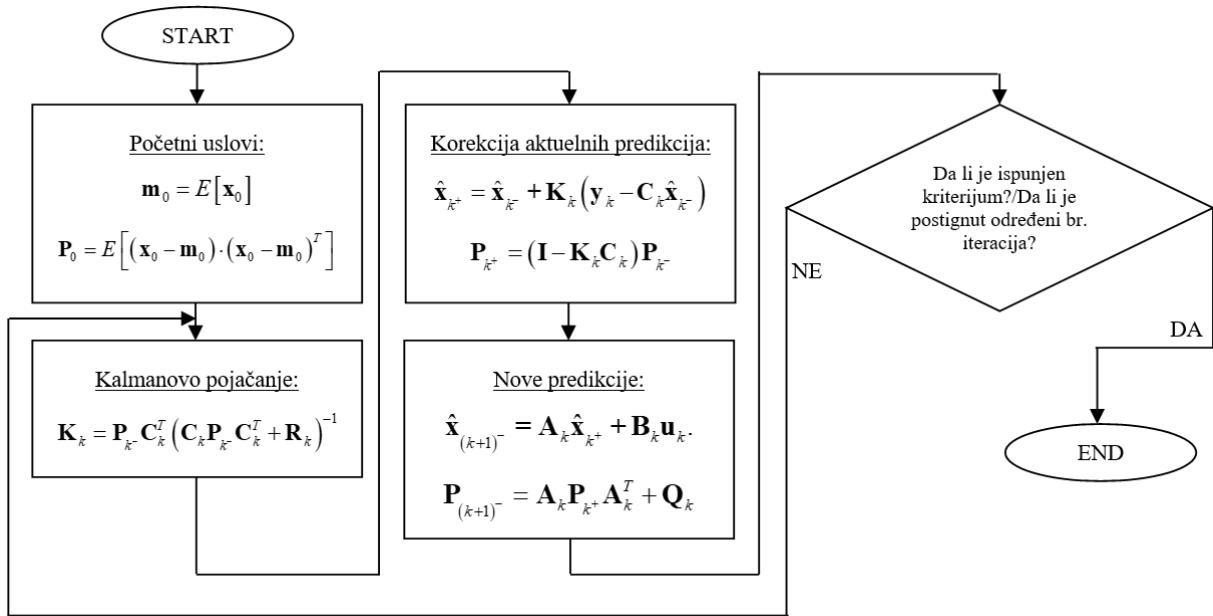
2.2.4. Kalmanov algoritam

Prije nego se upotrijebi Kalmanov algoritam, potrebno je imati neko predznanje o procesu i izvesti pretpostavke o šumovima koji djeluju na njega. Prvo, matematički model procesa mora biti određen i jasno definisan da bi se mogao iskoristiti za estimaciju. Ovo u matematičkom kontekstu podrazumijeva poznavanje vrijednosti matrica \mathbf{A}_k , \mathbf{B}_k i \mathbf{C}_k . Drugo, neophodno je poznavanje prirode šumova koji djeluju na model i na mjerjenje (na mjerni instrument). U matematičkom kontekstu, ovo podrazumijeva poznavanje matrica varijansi šumova \mathbf{Q}_k i \mathbf{R}_k .

Prije pokretanja algoritma, određuje se očekivana vrijenost početnih vrijednosti promjenjivih stanja i kovarijanse greške, prema izrazima (21) i (35). Postavljanjem dva principa koje filter treba da zadovolji, izvedena je matematička veza Kalmanovog pojačanja sa ostalim veličinama koje se vežu za proces, prema izrazu (32). Nakon dobijanja informacije sa mjernog instrumenta, koristi se izlaz procesa da bi se izračunale vrijednosti „a posteriori“ ili „+“ trenutka, pri čemu se dobijaju vrijednosti navedene u izrazima (19) i (33). Poznavanjem vrijednosti $\hat{\mathbf{x}}_{k^+}$ i \mathbf{P}_{k^+} , stiču se uslovi za proračun novih predikcija za $(k+1)^-$ trenutak. Korišćenjem izraza (13) i (34), dobijaju se vrijednosti promjenjivih stanja i kovarijanse greške za „a priori“ ili „-“ estimaciju sljedećeg trenutka. Algoritam se rekursivno ponavlja dok god ne bude zadovoljen odgovarajući kriterijum ili dok ne bude postignut broj zadatih iteracija. Kompletno opisan postupak je prikazan na slici 2.

Bitno je napomenuti da ukoliko se radi o statickim ili stacionarnim procesima u kojima će veze između fizičkih veličina biti konstantne u vremenu, moguće je unaprijed tj. *offline* izračunati vrijednosti Kalmanovog pojačanja, kao i vrijednosti kovarijanse greške za „+“ i „–“ trenutak. Ovo znači da se pomenute veličine mogu izračunati za određeni broj iteracija prije nego se algoritam stavi u rad. Ovo je moguće jer navedene veličine ne zavise od mjerjenja.

U slučaju kada se proces može mijenjati u vremenu i kada je to moguće matematički ispratiti prilagođavanjem matrica \mathbf{A}_k , \mathbf{B}_k i \mathbf{C}_k , filter je potrebno blagovremeno podešiti radi postizanja najboljih rezultata. U ovom slučaju nije moguće *offline* podešavanje odabranih veličina.



Slika 2. Algoritam Kalmanove filtracije

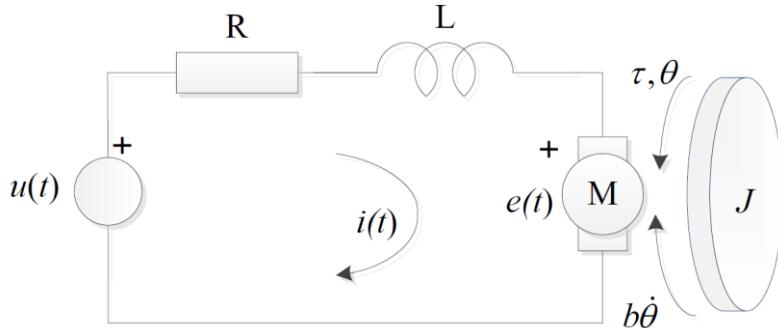
Ukoliko se parametri procesa mijenjaju u vremenu, ali je uticaj takve promjene moguće modelovati bijelim šumom na proces, moguće je razmotriti povećavanje očekivane vrijednosti suma procesa, tj. matrice \mathbf{Q}_k . U ovom slučaju sve ostale vrijednosti ostaju iste, a promjene na modelu će filtrirati sam algoritam.

Kako matrice \mathbf{Q}_k i \mathbf{R}_k modeluju djelovanje bijelog šuma na sistem, a filter je dizajniran da takve šumove otkloni, onda je jasno da se podešavanjem vrijednosti ovih matrica podešava čemu se više „vjeruje“ – modelu ili mjerenu? Ukoliko je mjerjenje pouzdano, matrica \mathbf{R}_k će imati manju vrijednost, a ukoliko je model manje zašumljen, matrica \mathbf{Q}_k će imati manju vrijednost. Djelovanje ovih matrica se projektuje kroz Kalmanovo pojačanje što se vidi iz izraza (32) i (34).

2.3. NUMERIČKI PRIMJER – DC MOTOR

Primjer linearног procesa je rad DC motora. Na slici 3 je predstavljena šema DC motora.

Princip rada ove električne mašine se bazira na generisanju pobudnog fluksa sa namotaja statora koji omogućava stvaranje elektromotorne sile na rotoru. Ukoliko se na rotor priključi napon, stvorice se i elektromotorna sila koja će generisati kretanje osovine rotora, tj. okretanje motora. Sa druge strane, ukoliko se na mašinu djeluje obrtnim momentom na osovinu rotora, mašina će raditi kao generator. U ovom primjeru, biće razmotren slučaj kada mašina radi kao motor.



Slika 3. Šema DC motora

Da bi se primijenio Kalmanov filter, potrebno je izvesti model u prostoru stanja.

Neka sa statora dolazi pobudni fluks Φ , i neka su parametri mašine sljedeći: $R = 1.1\Omega$, $L = 50\mu F$, $J = 10kg \cdot m^2$, $b = 1.7 \cdot 10^{-3} \frac{Ns}{m}$ i konstanta $k_m = 1.5$. Uz pomoć fluksa će se indukovati elektromotorna sila $e(t) = k_m \omega(t)$ u kolu rotora, koja će usloviti da protekne struja namotaja armature $i(t)$, a pomoću koje će se dalje stvoriti električni moment mašine $\tau(t) = k_m i(t)$.

Primjenom drugog Njutnovog zakona rotaciono kretanje kola sa slike 3, dobija se da je:

$$\begin{aligned} J \frac{d\omega(t)}{dt} &= \tau(t) - b\omega(t), \\ J \frac{d\omega(t)}{dt} &= k_m i(t) - b\omega(t), \\ \boxed{\frac{d\omega(t)}{dt}} &= -\frac{b}{J}\omega(t) + \frac{k_m}{J}i(t). \end{aligned} \quad (36)$$

Primjenom drugog Kirhofovog zakona na kolo sa slike 3, dobija se da je

$$u(t) - Ri(t) - L \frac{di(t)}{dt} - e(t) = 0,$$

$$u(t) - Ri(t) - L \frac{di(t)}{dt} - k_m \omega(t) = 0,$$

$$\boxed{\frac{di(t)}{dt} = -\frac{k_m}{L} \omega(t) - \frac{R}{L} i(t) + \frac{1}{L} u(t)}. \quad (37)$$

Neka su promjenjive stanja definisane kao $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ i \end{bmatrix}$, neka je napon kojim se napaja

kolo rotora upravlјiv, tj. neka je on jedina upravlјiva veličina. Na osovini rotora je postavljen tahometar koji mjeri ugaonu brzinu, te je izlaz procesa $y = x_1 = \omega$. Iz navedenog, a prema jednačinama (36) i (37), dobija se model u prostoru stanja procesa rada DC motora

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{J} x_1 + \frac{k_m}{J} x_2 \\ -\frac{k_m}{L} x_1 - \frac{R}{L} x_2 + \frac{1}{L} u \end{bmatrix},$$

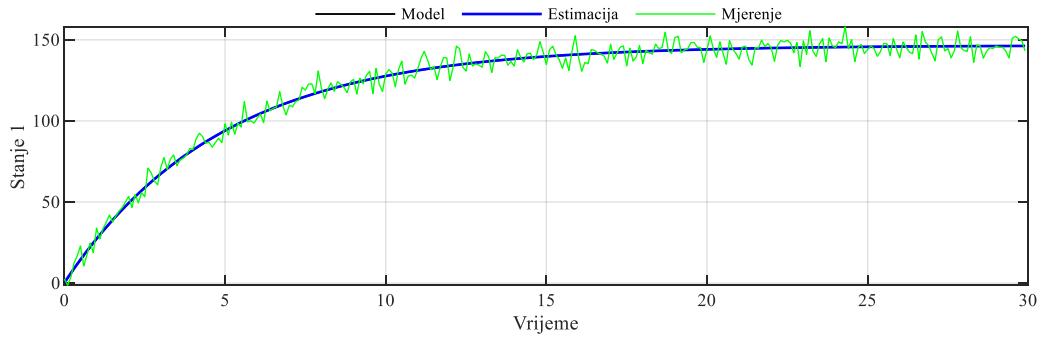
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{J} & \frac{k_m}{J} \\ -\frac{k_m}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \ 0]. \quad (38)$$

Kako je u navedenim jednačinama zanemaren napon na četkicama, greška koja se može pojaviti se može modelovati bijelim šumom koji djeluje na model, tj. koristiće se j-na (11), sa vrijednošću varijanse šuma $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 10^{-6} & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}$. Takođe, greška koja se pojavljuje na tahometru, modeluje se šumom, pa se za mjereni izlaz sistema koristi j-na (12), sa vrijednošću varijanse šuma $R = 25$. Vrijednosti za Q i R filtra su podešene tako da odgovaraju stvarnoj varijansi šumova.

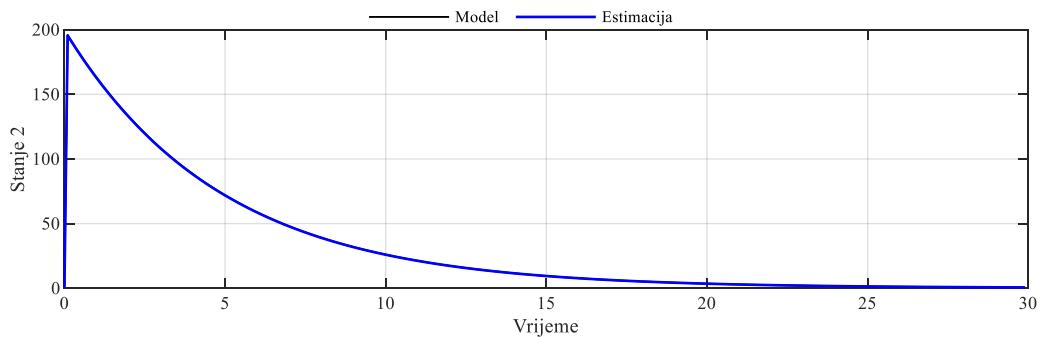
Primjenom Kalmanovog algoritma, može se dobiti estimirana vrijednost ugaone brzine osovine rotora i struje armature.

Prije pokretanja algoritma, vrši se diskretizacija matrica, jer kompletan algoritam radi u diskretnom obliku.

Praćenjem koraka sa slike 2 kojima je opisan Kalmanov algoritam, dobija se rezultat za stanje 1 prikazan na slici 4, i rezultat za stanje 2 prikazan na slici 5.

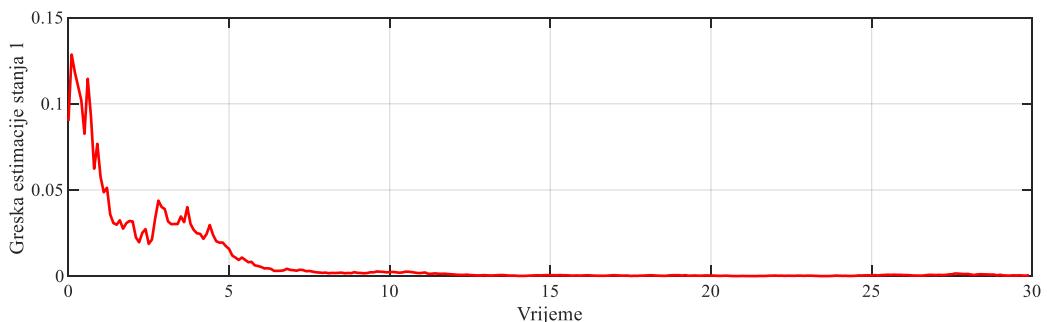


Slika 4

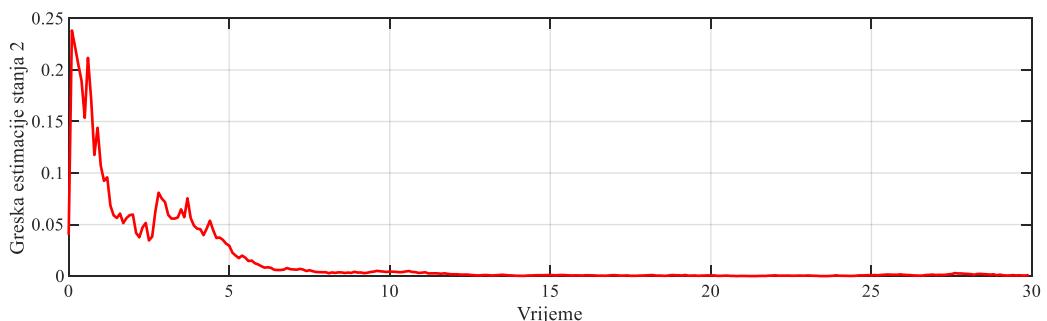


Slika 5

Kvadratna greška estimacije stanja 1 je prikazana na slici 6, dok je kvadratna greška estimacije stanja 2 prikazana na slici 7.



Slika 6



Slika 7

Kako estimirani početni uslovi nijesu bili jednaki stvarnim, može se primijetiti da je filteru potrebno određeno vrijeme dok počne pratiti realno stanje. Takođe, nakon određenog dinamičkog procesa, kada se uđe u stacionarno stanje, može se primijetiti kako Kalmanov filter grešku estimacije svodi na minimalnu vrijednost, zanemarujući šumove koji djeluju na model i mjerjenje.

Ukoliko bi bilo potrebno obezbijediti brži odziv na promjenu stanja, tj. kraći prelazni proces, bilo bi potrebno drugačije podesiti matrice Q i R . U tom slučaju, moguće je dati visoku početnu vrijednost matrici Q , koja bi se nakon nekog vremena vratila na normalnu vrijednost potrebnu za minimizaciju uticaja šuma procesa.

3. ESTIMACIJA STANJA NELINEARNIH SISTEMA

Mali broj procesa u prirodi se može predstaviti linearnim vezama između fizičkih veličina koje opisuju sistem. Ipak, i nelinearne procese je moguće modelovati koristeći različite matematičke alate i prihvatajući različite matematičke aproksimacije.

Nelinearni sistem se može predstaviti jednačinama (3) i (4). Ukoliko se vrši estimacija stanja nelinearnih sistema, potrebno je u jednačine stanja i mjerena dodati šum. Nakon dodavanja šuma, jednačine će imati oblik

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{w}, \quad (39)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}. \quad (40)$$

Princip estimacije stanja nelinearnih procesa je isti kao i kod linearnih, s tim što prilikom modelovanja treba uzeti u obzir da svaka izvedena aproksimacija (linearizacija ili neki drugi matematički postupak) dovodi do određene greške. Greška u modelu je već izražena matricom šuma \mathbf{w} , tj. u algoritmu filtera, njegovom matricom varijanse \mathbf{Q} . Radi matematičke aproksimacije, šum na stanje će biti veći, a samim tim i matrica \mathbf{Q} , te bi svaki projektovani algoritam estimacije trebao da filtrira grešku aproksimacije prilikom svog normalnog rada.

Linearni Kalmanov filter ne može vršiti estimaciju nelinearnih sistema, te je upravo zato izvedena njegova šira verzija – prošireni Kalmanov filter (EKF) [2]. EKF funkcioniše na principu pretvaranja nelinearne funkcije u polinom u okolini posljednje estimirane tačke pomoću Tejlorovog reda. Pored EKF-a, koriste se i drugi estimatori stanja nelinearnih sistema, a od posebnog značaja za ovaj rad su takozvani *Divide Difference* filtri prvog i drugog reda – DD1 i DD2 ([13] i [14]).

Ukoliko bi se vršila estimacija nelinearnog sistema pomoću Linearnog Kalmanovog filtra, bilo bi potrebno iskoristiti Njutn-Rapsonov (*Newton-Raphson*) metod [15] za rješavanje nelinearnog dijela jednačine. Osim Njutn-Rapsonovog metoda, moguće je koristiti i druge mehanizme za rješavanje nelinearnosti, ali oni neće biti razmatrani u ovom radu.

3.1. PROŠIRENI KALMANOV FILTER (EKF)

Ukoliko je proces opisan nelinearnim jednačinama, Kalmanov algoritam koji je izведен za linearne procese se ne može koristiti bez pomoćnih alata za rješavanje nelinearnosti. Upravo iz tog razloga je razvijen novi pristup rješavanju problema. Naime, postoje različite metode linearizacije nelinearne jednačine u okolini radne tačke. Jedan od načina jeste upotreba Tejlorovog reda (*Taylor series* [16]) sa upotrebom ograničenog broja starijih članova reda. Ukoliko se teži manjoj preciznosti i većoj jednostavnosti dizajna algoritma filtera, koristi se takozvani EKF prvog reda, nazvan po tome što koristi samo prvi član reda, a starije članove zanemaruje. Za složeniji dizajn i veću tačnost moguće je koristiti Tejlorov red bez zanemarivanja

drugog člana reda. Ovakav dizajn zahtijeva veću matematičku složenost, duži početni proračun i jaču memoriju računara koji obrađuje podatke, te isti nije uvijek poželjan. U zavisnosti od traženih performansi, potrebno je balansirati između jednostavnosti i preciznosti programa.

U cilju vršenja numeričkih eksperimenata u ovom radu, koristiće se samo filter prvog reda koji je najčešće zastupljen u praksi.

3.1.1. Tejlorov red

1° Funkcija sa jednom promjenjivom

Neka je data funkcija $f(x)$ definisana u okolini radne tačke x_0 . Tejlorov red je matematički koncept koji predstavlja funkciju kao beskonačnu sumu polinoma u okolini radne tačke. Da bi funkcija bila tačno određena Tejlorovim redom, potrebno je da bude glatka u okolini navedene radne tačke. U tom slučaju, bilo koju funkciju je moguće predstaviti na sljedeći način

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$$

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (41)$$

Specijalni slučaj Tejlorovog reda je slučaj kada je $x_0 = 0$ i tada se red naziva Maklorenov red.

Poznato je da svaki stariji član daje manji doprinos izgradnji kompletne funkcije, te se često stariji članovi zanemaruju. Za slučaj kada se koristi samo prvi član reda, funkcija izražena preko Tejlorovog reda ima sljedeći oblik

$$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}. \quad (42)$$

2° Funkcija sa više promjenjivih

Neka je zadat vektor sa m promjenjivih $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_m]^T$, i neka je zadata glatka funkcija koja zavisi od tog vektora $f(\mathbf{x})$. Slično funkciji sa jednom promjenjivom, i ovakva funkcija se može izraziti preko polinoma u tački $\mathbf{x}_0 = [x_1^0 \ x_2^0 \ x_3^0 \ \dots \ x_m^0]^T$ upotrebom Tejlorovog reda, i to na sljedeći način

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} \cdot (x_i - x_i^0) + \\
+ \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j} \cdot (x_i - x_i^0) \cdot (x_j - x_j^0) + \\
+ \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot (x_i - x_i^0) \cdot (x_j - x_j^0) \cdot (x_k - x_k^0) + \dots
\end{aligned} \tag{43}$$

Za slučaj kada se koristi samo prvi član reda, a ostali se zanemaruju radi jednostavnosti, jednačina će imati sljedeći oblik

$$\boxed{f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} \cdot (x_i - x_i^0)}. \tag{44}$$

3° Vektorska funkcija

Neka je zadat vektor sa m promjenjivih $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_m]^T$, i neka je zadato n glatkih funkcija koje zavise od tog vektora $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}) \ f_2(\mathbf{x}) \ f_3(\mathbf{x}) \ \dots \ f_n(\mathbf{x})]^T$. Navedene funkcije se mogu izraziti preko polinoma u tački $\mathbf{x}_0 = [x_1^0 \ x_2^0 \ x_3^0 \ \dots \ x_m^0]^T$ upotrebom Tejlorovog reda. Za slučaj kada se zanemare svi članovi reda osim prvog (što je od značaja za problematiku ovog rada), funkcije se mogu zapisati na sljedeći način

$$\boxed{\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{J}_f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}, \tag{45}$$

gdje je \mathbf{J}_f Jakobijan funkcije \mathbf{f} definisan izrazom

$$\mathbf{J}_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}. \tag{46}$$

3.1.2. Algoritam proširenog Kalmanovog filtra

Princip na kom je izведен EKF algoritam je isti kao i princip izvođenja klasičnog linearnog Kalmanovog filtra. Prilikom izvođenja se teži da budu zadovoljeni principi nepomjerenosti estimacije i minimizacije varijanse greške, čime se dolazi do matematičke definisanosti Kalmanovog pojačanja. Na ovaj način se dobija optimalno rješenje nelinearne jednačine.

Razlike EKF algoritma u odnosu na linearni KF su sljedeće:

- Jednačine kojima je opisan zašumljeni proces i mjerjenje su date izrazima (39) i (40). Prilikom izvođenja EKF algoritma, vektorske funkcije se linearizuju i zapisuju preko polinoma primjenom Tejlorovog reda preko jednačine (45) u svakom iterativnom koraku. Linearizacija se vrši u okolini posljednje poznate estimirane vrijednosti, tj. u okolini dobijene „a priori“ vrijednosti.
- Umjesto linearne zavisnosti izražene pomoću matrice C_k u jednačini (32), koristi se Jakobijan funkcije $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ u tački $\hat{\mathbf{x}}_{k^-}$, izražen kao u izrazu (46), te jednačina Kalmanovog pojačanja ima sljedeći oblik

$$\boxed{\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k^-} \mathbf{J}_{\mathbf{g}}^T(\hat{\mathbf{x}}_{k^-}) \cdot (\mathbf{J}_{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{x}}_{k^-}) \cdot \mathbf{P}_{k^-} \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{g}}^T(\hat{\mathbf{x}}_{k^-}) + \mathbf{R}_k)^{-1}}. \quad (47)$$

- Prilikom korekcija aktuelnih predikcija, upotrebom Tejlorovog reda pri izvođenju, umjesto jednačina (19) i (33), dobiće se

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}}_{k^+} = \hat{\mathbf{x}}_{k^-} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}_{k^-}))} \text{ i} \quad (48)$$

$$\boxed{\mathbf{P}_{k^+} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{J}_{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{x}}_{k^-})) \mathbf{P}_{k^-}}. \quad (49)$$

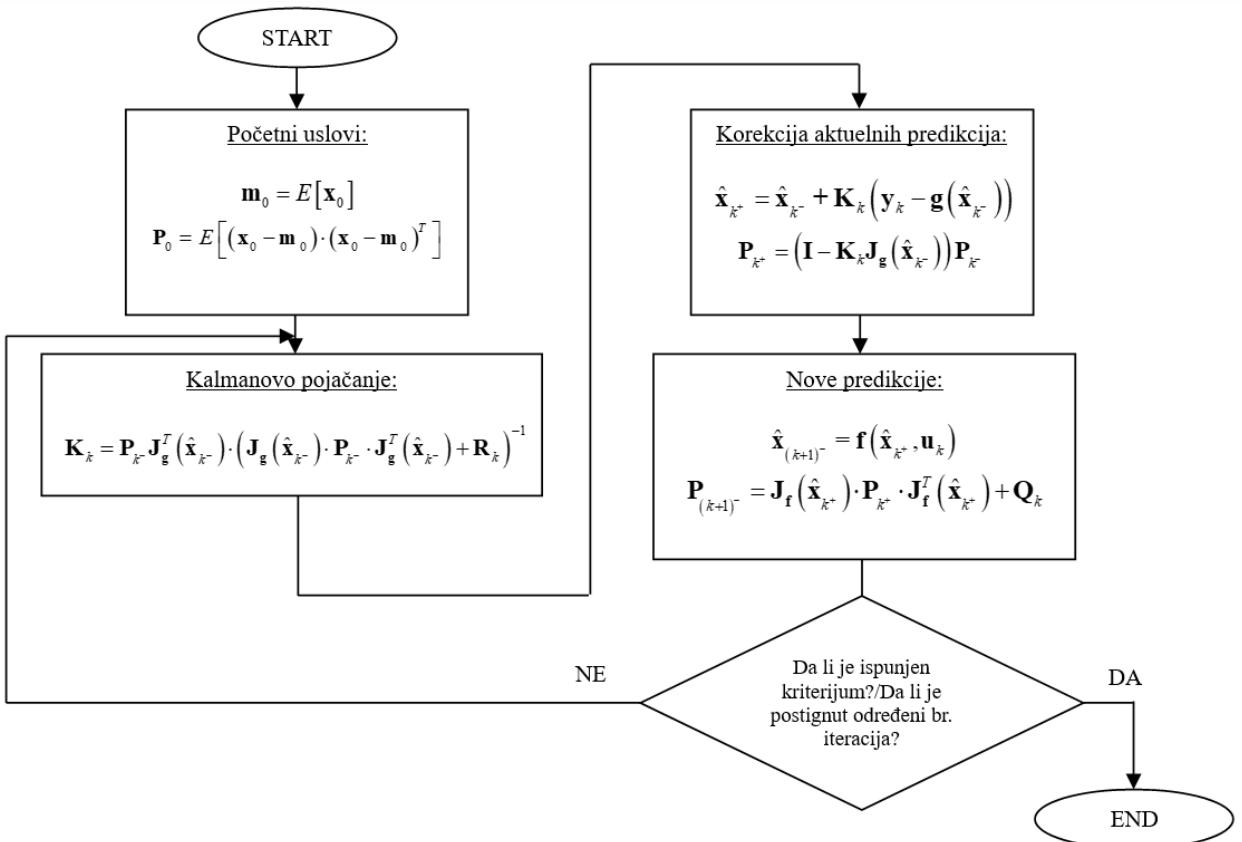
- Za dobijanje novih predikcija, umjesto jednačina (13) i (34) koriste se sljedeće jednačine

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}}_{(k+1)^-} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k^+}, \mathbf{u}_k)} \text{ i} \quad (50)$$

$$\boxed{\mathbf{P}_{(k+1)^-} = \mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}_{k^+}) \cdot \mathbf{P}_{k^+} \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{f}}^T(\hat{\mathbf{x}}_{k^+}) + \mathbf{Q}_k}, \quad (51)$$

gdje je sa $\mathbf{J}_{\mathbf{f}}$ izražen Jakobijan funkcije $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, dat izrazom (46).

Kompletan algoritam je predstavljen na slici 8.



Slika 8. EKF algoritam

3.1.3. Numerički primjer – Matematičko klatno (EKF)

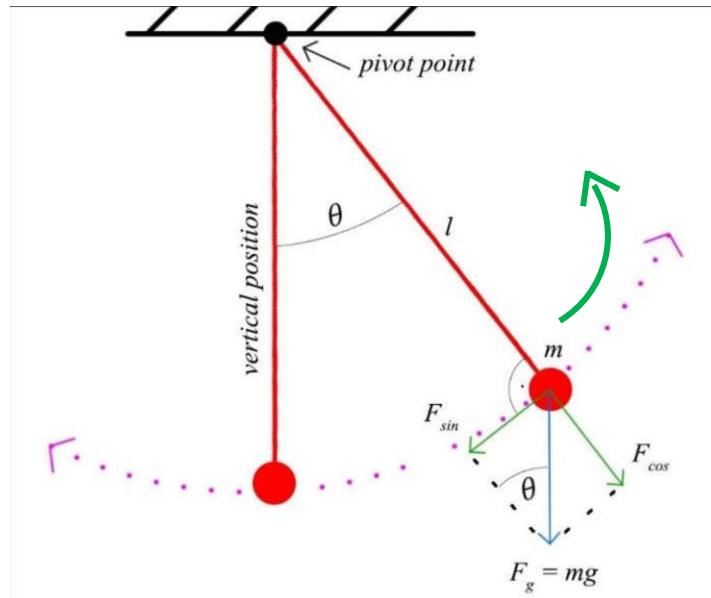
Matematičko klatno je idealizovani model stvarnog klatna u kojem se smatra da je masa skoncentrisana u jednoj tački i da je masa kanapa/niti/žice koja klatno drži zanemarljiva.

Radi prikaza rada proširenog Kalmanovog filtra, biće iskorišćen model matematičkog klatna na kojem je moguće mjeriti položaj (ugao) pomoću rotacionog enkodera. Enkoder je podložan šumovima i može se desiti da izlaz iz senzora nije potpuno tačan. Da bi estimacija bila prikazana, potrebno je izvesti model matematičkog klatna.

Na slici 9 prikazan je vizuelni prikaz matematičkog klatna [17].

Primjetno je da sila zatezanja kanapa poništava F_{\cos} komponentu gravitacione sile. Primjenom drugog Njutnovog zakona za rotaciono kretanje, dobija se sljedeće

$$J \frac{d\omega}{dt} = \tau - mgl \sin \theta - b \frac{d\theta}{dt}. \quad (52)$$



Slika 9. Vizuelni prikaz matematičkog klatna.

U jednačini (52) figurišu:

- $J = ml^2$ - moment inercije klatna
- $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ - ugaona brzina klatna
- m - masa klatna skoncentrisana u jednoj tački
- $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$ - gravitaciona konstanta
- l - dužina kanapa
- θ - ugaoni pomjeraj klatna
- b - koeficijent trenja vazduha
- τ - pogonski obrtni moment (prenesen preko tačke spajanja (*pivot point*) ili direktnim guranjem)

Trenje vazduha će biti zanemareno (idealizovano kretanje), te jednačina dobija sljedeći oblik

$$ml^2 \ddot{\theta} = \tau - mgl \sin \theta ,$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta + \frac{1}{ml^2} \tau . \quad (53)$$

Jednačina (53) predstavlja ODE model procesa kretanja matematičkog klatna. Da bi se dobio model u prostoru stanja, uvode se sljedeće promjenjive stanja

$$\begin{aligned}x_1 &= \theta, \\x_2 &= \dot{\theta}.\end{aligned}\tag{54}$$

Uzimajući da je pogonski obrtni moment upravljava ulazna veličina $\tau = u$, dalje slijedi da je

$$\dot{x}_1 = x_2,\tag{55}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 + \frac{1}{ml^2} u.\tag{56}$$

Neka je T perioda odabiranja. Vršenjem diferenciranja naprijed, dobija se da je model u prostoru stanja u diskretnom obliku

$$x_1(k+1) = T \cdot x_2(k) + x_1(k),\tag{57}$$

$$x_2(k+1) = T \cdot \left(-\frac{g}{l} \sin x_1(k) + \frac{1}{ml^2} u(k) \right) + x_2(k).\tag{58}$$

Ukoliko se uzme da model idealizuje klatno i da je radi jednostavnosti modela zanemareno trenje vazduha, jasno je da je potrebno umetnuti odgovarajući šum modela kako bi model pratio stvarno stanje procesa u prirodi. Nakon dodavanja šuma modela, jednačine imaju sljedeći oblik

$$x_1(k+1) = T \cdot x_2(k) + x_1(k) + w_1(k),\tag{59}$$

$$x_2(k+1) = T \cdot \left(-\frac{g}{l} \sin x_1(k) + \frac{1}{ml^2} u(k) \right) + x_2(k) + w_2(k).\tag{60}$$

Postavljeni rotacioni enkoder prati ugao, tj. stanje x_1 sa određenom greškom, te je

$$y(k) = x_1(k) + v(k).\tag{61}$$

U cilju izrade numeričkog eksperimenta, korišćeni su sljedeći parametri: $T = 0.01s$, $m = 2kg$, $l = 0.5m$ i $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$. Realni početni uslovi su $\mathbf{x}_0 = [0.2 \quad 0.5]^T$, dok su estimirani početni uslovi $\mathbf{m}_0 = [0.5 \quad 0.8]^T$. Realna vrijednost kovarijanse bijelog šuma stanja je $\mathbf{Q}_{\text{realno}} = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0 \\ 0 & 0.0004 \end{bmatrix}$, dok je vrijednost korišćena za rad filtra, kojom se premošćava greška linearizacije $\mathbf{Q}_{EKF} = \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.0005 & 0 \\ 0 & 0.0007 \end{bmatrix}$. Vrijednost kovarijanse bijelog šuma mjerena je $R = 0.01$, i ista takva je iskorišćena za rad filtra.

Početna vrijednost kovarijanse greške korišćena u numeričkom eksperimentu je $\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 0.09 & 0 \\ 0 & 0.09 \end{bmatrix}$.

Obrtni moment kojim se djeluje na klatno (ulazna veličina) je postavljen tako da na početku djeluje silom od $\tau = 10Nm$, a sa svakim sljedećim diskretnim odbirkom vremena gubi 3% svoje vrijednosti.

Nelinearne funkcije (prema jednačinama (39) i (40)) kojima su opisana stanja i mjerene su

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}_k) \\ f_2(\mathbf{x}_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k) + T \cdot x_2(k) \\ -\frac{g}{l} \cdot T \cdot \sin x_1(k) + x_2(k) + T \cdot \frac{1}{ml^2} u(k) \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$g(\mathbf{x}_k) = x_1(k). \quad (63)$$

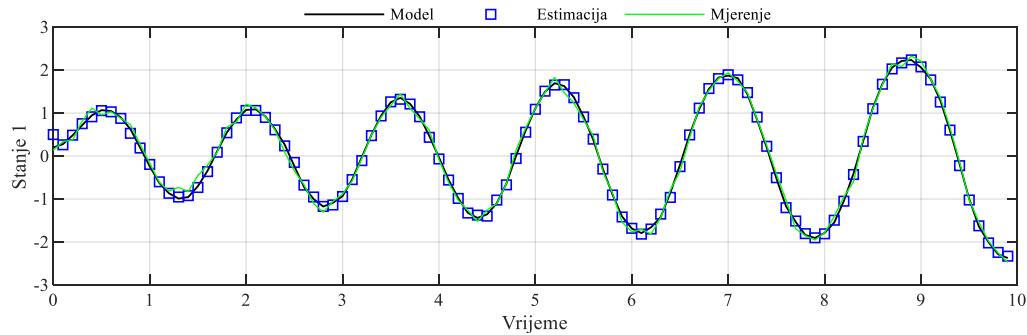
Jakobijski \mathbf{J}_f i \mathbf{J}_h određeni su na sljedeći način

$$\mathbf{J}_f = \begin{bmatrix} 1 & T \\ -\frac{g}{l} \cdot T \cdot \cos x_1(k) & 1 \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$\mathbf{J}_g = \mathbf{J}_g = [1 \ 0]. \quad (65)$$

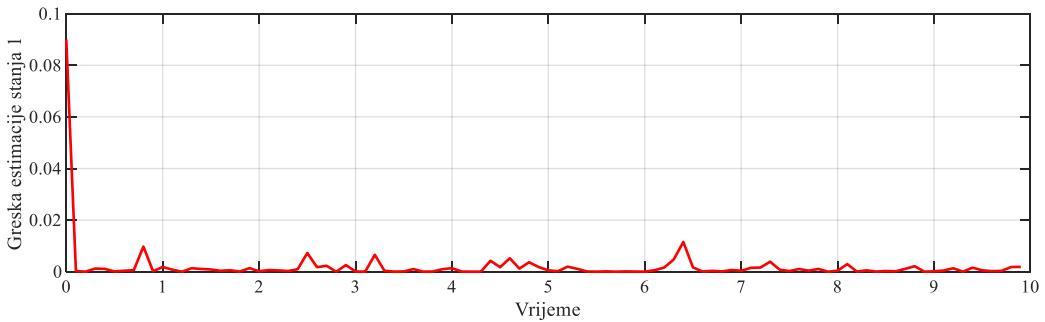
Nakon što se sve navedene vrijednosti unesu u kod programskog paketa MATLAB®, za dužinu simulacije od 10 sekundi, dobijaju se grafici koji prikazuju rad i efikasnost filtra.

Na slici 10 je prikazana je estimacija mjerene stanje 1, tj. ugaonog pomjeraja θ . Sa slike se može primijetiti da mjerene imaju određeno odstupanje zbog bijelog šuma koji djeluje na instrument, kao i da filter to odstupanje kompenzuje.



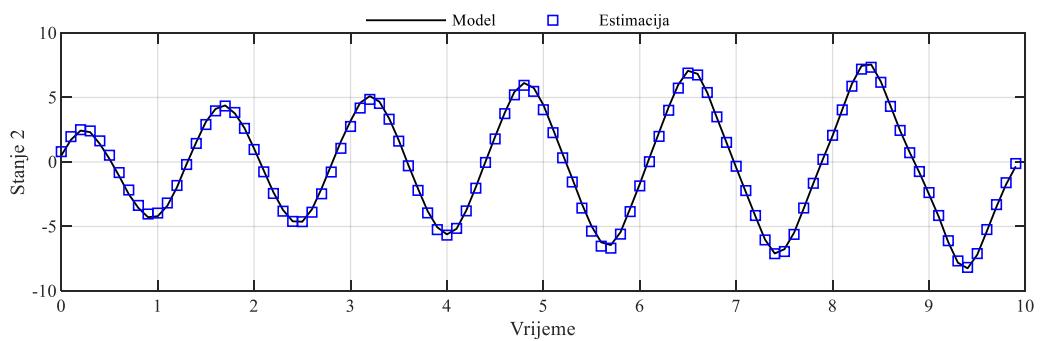
Slika 10. Estimacija ugaonog pomjeraja matematičkog klatna

Kvadratna greška estimacije stanja 1 prikazana je na slici 11. Srednja vrijednost kvadratne greške iznosi 0.0013.



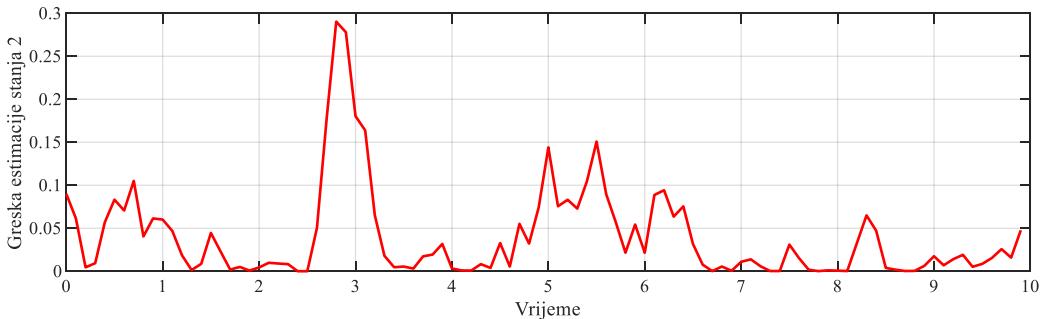
Slika 11. Kvadratna greška estimacije ugaonog pomjeraja matematičkog klatna

Iako se stanje 2, tj. ugaona brzina direktno ne mjeri pomoću mjernog instrumenta, algoritam može odrediti vrijednosti ove fizičke veličine koristeći poznati model procesa. Estimacija ugaone brzine je prikazana na slici 12.



Slika 12. Estimacija ugaone brzine matematičkog klatna

Kvadratna greška estimacije stanja 2 prikazana je na slici 13. Srednja vrijednost kvadratne greške iznosi 0.0425.



Slika 13. Kvadratna greška estimacije ugaone brzine matematičkog klatna

3.2. „DIVIDED DIFFERENCE“ (DD) FILTRI

Kako je do sada pokazano, estimacija nelinearnih procesa se može izvršiti upotrebom EKF algoritma koji je najpopularniji prilikom modelovanja nelinearnih sistema automatskog upravljanja. Ipak, postoje i druge metode, koje funkcionišu na sličnom principu kao i EKF, poput filtera „podijeljenih diferencijala“ ili na engleskom „Divided Difference“ (skraćeno DD). Mana EKF-a je upotreba Tejlorovog reda za linearizaciju nelinearnih jednačina koje opisuju proces iz

razloga što u pojedinim slučajevima funkcija neće biti diferencijabilna u radnoj tački. Tada je računanje izvoda nemoguće, a samim tim i primjena EKF-a.

DD algoritmi, opisani i izvedeni u [13] i [14] koriste drugi način linearizacije, upotrebom Stirlingove interpolacije ([18] i [19]) u okolini radne tačke. Stirlingova interpolacija ne zahtijeva računanje izvoda te može biti primijenjena na djelove nelinearne funkcije u tačkama gdje postoje singulariteti. Iako je primjena DD algoritma jednostavnija od EKF algoritma, opterećenje računarskih resursa (opterećenost RAM memorije računara koji pokreće i sprovodi algoritam) je približno isto. Dodatno, bitno je pomenuti da DD algoritmi daju slične, i u određenim slučajevima bolje rezultate od EKF-a.

3.2.1. Stirlingova interpolacija

Postoje različite metode interpolacije, a Stirlingova interpolacija je jedna od njih. Ona služi kao matematički alat koji razdvaja funkciju na polinom u okolini radne tačke (kao i Tejlorov red), upotrebom odgovarajućih odbiraka funkcije. Interpolacija se često koristi prilikom tabelarnih prikaza funkcije, napravljenih za neku dužinu intervala.

1° Funkcija sa jednom promjenjivom

Neka su operatori δ i μ definisani na sljedeći način

$$\delta f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right), \quad (66)$$

$$\mu f(x) = \frac{f\left(x + \frac{h}{2}\right) + f\left(x - \frac{h}{2}\right)}{2}, \quad (67)$$

gdje je h neki zadati interval, koji može biti odabran. Ukoliko se radi o tabelarnim podacima, interval h je interval između svake dvije zadate vrijednosti funkcije.

Pomoću datih operatora, funkcija f može biti izražena u obliku polinoma, u okolini radne tačne $x = x_0$ na sljedeći način

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0 + ph) = f(x_0) + p\mu\delta f(x_0) + \\ &+ \frac{p^2}{2!} \delta^2 f(x_0) + \left[\begin{matrix} p+1 \\ 3 \end{matrix} \right] \mu\delta^3 f(x_0) + \\ &+ \frac{p^2(p^2-1)}{4!} \delta^4 f(x_0) + \left[\begin{matrix} p+2 \\ 5 \end{matrix} \right] \mu\delta^5 f(x_0) + \dots \end{aligned} \quad (68)$$

U jednačini (68) figuriše promjenjiva p , koja je određena na sljedeći način

$$x = x_0 + ph,$$

$$p = \frac{x - x_0}{h}. \quad (69)$$

Kao i prilikom upotrebe Tejlorovog reda, i upotrebom Stirlingove interpolacije stariji članovi se mogu zanemariti radi postizanja jednostavnijeg računanja, uz dobijanje manje tačnosti kompletног izraza. Ipak, interval h ostaje podesiva veličina kojom se može postići da uticaj starijih članova bude izražen u što manjoj mjeri.

Ukoliko su zanemareni svi ostali članovi osim prva dva, dobija se da je

$$f(x) = f(x_0 + ph) = f(x_0) + p\mu\delta f(x_0) + \frac{p^2}{2!} \delta^2 f(x_0). \quad (70)$$

Član $p\mu\delta f(x_0)$ u izrazu (70) je jednak

$$\begin{aligned} p\mu\delta f(x_0) &= p\mu \left[f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{h}{2}\right) \right] = \\ &= p \left[\frac{f\left(x_0 + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) + f\left(x_0 + \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\right)}{2} - \frac{f\left(x_0 - \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) + f\left(x_0 - \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\right)}{2} \right] = \\ &= p \left[\frac{f(x_0 + h) + f(x_0) - f(x_0) - f(x_0 - h)}{2} \right] = \\ &= p \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2} \right] = \\ &= \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}}_{f'_{DD}(x_0)} (x - x_0). \end{aligned} \quad (71)$$

Na sličan način se može doći do izraza

$$\frac{p^2}{2!} \delta^2 f(x_0) = \frac{1}{2!} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2}}_{f''_{DD}(x_0)} (x - x_0)^2, \quad (72)$$

pa se izraz (68) može svesti na

$$f(x) = f(x_0) + f'_{DD}(x_0)(x - x_0) + \frac{f''_{DD}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2. \quad (73)$$

Ako se u vrijednost $f'_{DD}(x_0)$, definisanu izrazom (71) umjesto $f(x_0 + h)$ i $f(x_0 - h)$ iskoristi Tejlorov red funkcije u okolini tačke x_0 , prema formuli (41) dobija se

$$\begin{aligned} f'_{DD}(x_0) &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = \\ &= \frac{\left[f(x_0) + f'(x_0)(x_0 + h - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_0 + h - x_0)^2 + \dots \right]}{2h} - \\ &\quad - \frac{\left[f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - h - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_0 - h - x_0)^2 + \dots \right]}{2h} = \\ &= \frac{\left[f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot h^2 + \dots \right] - \left[f(x_0) - f'(x_0) \cdot h + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot h^2 - \dots \right]}{2h} = \\ &= \frac{2h \left[f'(x_0) + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot h^2 + \frac{f^{(5)}(x_0)}{5!} \cdot h^4 \dots \right]}{2h} = \\ &= f'(x_0) + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot h^2 + \frac{f^{(5)}(x_0)}{5!} \cdot h^4 \dots \end{aligned} \quad (74)$$

Sličnim postupkom se dobija izraz

$$\frac{f''_{DD}(x_0)}{2!} = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!} \cdot h^2 + \frac{f^{(6)}(x_0)}{6!} \cdot h^4 + \dots \quad (75)$$

Ako se pomoću izraza (74) i (75) predstavi izraz (73), dobiće se da je

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ &\quad + \left(\frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot h^2 + \frac{f^{(5)}(x_0)}{5!} \cdot h^4 + \dots \right) (x - x_0) + \\ &\quad + \left(\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!} \cdot h^2 + \frac{f^{(6)}(x_0)}{6!} \cdot h^4 + \dots \right) (x - x_0)^2. \end{aligned} \quad (76)$$

Prvi dio izraza (76) ne zavisi od intervala h , dok se ostatak izraza može podešiti pravilnim odabirom dužine intervala. Ovo znači da se uticaj starijih članova Tejlorovog reda u jednakosti (76) može podešavati. Za odgovarajuću vrijednost intervala h , moguće je podešiti da uticaj starijih članova reda bude minimalan.

Iako je uticaj starijih članova interpolisane funkcije prema izrazu (68) zanemaren, pokazuje se da se ispravnim odabirom intervala h može dobiti bolji rezultat nego vršenjem razdvajanja nelinearne funkcije Tejlorovim redom.

2° Funkcija sa više promjenjivih

Neka je data funkcija f u zavisnosti od vektora promjenjivih $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_m]^T$. Za slučaj kada se zanemare svi članovi reda do drugog, funkcija se u okolini radne tačke $\mathbf{x}_0 = [x_1^0 \ x_2^0 \ x_3^0 \ \dots \ x_m^0]^T$ može zapisati na sljedeći način preko Stirlingove formule za interpolaciju

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \tilde{D}_{\Delta x} f + \frac{1}{2!} \tilde{D}_{\Delta x}^2 f, \quad (77)$$

gdje je

$$\tilde{D}_{\Delta x} f = \frac{1}{h} \left(\sum_{p=1}^m \Delta x_p \mu_p \delta_p \right) f(\mathbf{x}_0) \text{ i} \quad (78)$$

$$\tilde{D}_{\Delta x}^2 f = \frac{1}{2h^2} \left(\sum_{p=1}^m \Delta x_p^2 \delta_p^2 \cdot \sum_{p=1}^m \sum_{q=1, q \neq p}^m \Delta x_p \Delta x_q (\mu_p \delta_p)(\mu_q \delta_q) \right) f(\mathbf{x}_0). \quad (79)$$

U izrazima (78) i (79) figurišu operatori δ_p i μ_p , koji su definisani kao „paricijalni“ operatori izvoda, tj.

$$\delta_p f(\mathbf{x}) = f\left(\mathbf{x} + \frac{h}{2} \mathbf{e}_p\right) - f\left(\mathbf{x} - \frac{h}{2} \mathbf{e}_p\right) \text{ i} \quad (80)$$

$$\mu_p f(\mathbf{x}) = \frac{f\left(\mathbf{x} + \frac{h}{2} \mathbf{e}_p\right) + f\left(\mathbf{x} - \frac{h}{2} \mathbf{e}_p\right)}{2}, \quad (81)$$

gdje je \mathbf{e}_p jedinični vektor sa jedinicom na mjestu p , a Δx_p je definisano kao

$$\Delta x_p = x_p - x_p^0. \quad (82)$$

3° Vektorska funkcija

Neka je zadat vektor sa m promjenjivih $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_m]^T$, i neka je zadato n funkcija koje zavise od tog vektora $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}) \ f_2(\mathbf{x}) \ f_3(\mathbf{x}) \ \dots \ f_n(\mathbf{x})]^T$. Navedene

funkcije se mogu izraziti preko polinoma u tački $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 & \dots & x_m^0 \end{bmatrix}^T$ upotrebom Stirlingove interpolacije. Za slučaj kada se zanemare svi članovi reda do drugog (što je od značaja za problematiku ovog rada), funkcije se mogu zapisati na sljedeći način

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \begin{bmatrix} \tilde{D}_{\Delta x} f_1 \\ \dots \\ \tilde{D}_{\Delta x} f_n \end{bmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} \tilde{D}_{\Delta x}^2 f_1 \\ \dots \\ \tilde{D}_{\Delta x}^2 f_n \end{bmatrix}. \quad (83)$$

3.2.2. Filtar prvog reda - DD1

1° Uvodna razmatranja

Neka je uvedena smjena sljedećeg oblika

$$\mathbf{z} = \mathbf{S}_x^{-1} \mathbf{x}, \quad (84)$$

gdje je \mathbf{S}_x Čoleski faktor (*Cholesky factor*) kovarijacione matrice

$$\mathbf{P}_x = \mathbf{S}_x \mathbf{S}_x^T. \quad (85)$$

Upotrebom ove smjene, dolazi se do stohastičkog razdvajanja promjenjivih, pa različiti elementi vektora \mathbf{z} postaju međusobno nekorelirani (kovarijansa elemenata z_i i z_j za $\forall i \neq j$ je jednaka nuli), sa jediničnom varijasom, što se matematički zapisuje kao

$$E[(\mathbf{z} - E[\mathbf{z}]) \cdot (\mathbf{z} - E[\mathbf{z}])^T] = E[\Delta \mathbf{z} \cdot \Delta \mathbf{z}^T] = \mathbf{I}. \quad (86)$$

Takođe, neka je za svaku funkciju $f(\mathbf{x})$ zadata funkcija $\tilde{f}(\mathbf{z}) = f(\mathbf{x})$ određena za $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$. Takođe, smatra se da su elementi $\Delta \mathbf{z} = \mathbf{z} - E[\mathbf{z}]$ razvrstani prema raspodjeli nulte srednje vrijednosti, tj. u ovom radu će se smatrati da podliježu Gausovoj raspodjeli.

2° Promjenjive prilikom aproksimacije prvog reda

Kako je ranije navedeno, primjenom interpolacije, zanemarujući sve starije članove osim prvog, dobija se aproksimacija prvog reda. Primjenom ovakve aproksimacije, račun se pojednostavljuje, računarsko opterećenje se smanjuje, ali se i pravi određena greška aproksimacije.

U aproksimaciji prvog reda, funkcija $f(\mathbf{x})$ je interpolisana u okolini tačke $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 & \dots & x_m^0 \end{bmatrix}^T$, tj. tačke $\mathbf{z}_0 = \mathbf{S}_x^{-1} \mathbf{x}_0$ na sljedeći način

$$y = f(\mathbf{x}) = \tilde{f}(\mathbf{z})$$

$$y = \tilde{f}(\mathbf{z}_0 + \Delta \mathbf{z}) \approx \tilde{f}(\mathbf{z}_0) + \tilde{D}_{\Delta z} \tilde{f}. \quad (87)$$

Uzimajući u obzir da je $E[\Delta \mathbf{z}] = 0$, i jednačinu (78) preko koje je $\tilde{D}_{\Delta z} \tilde{f}$ definisano, jasno je da je

$$\hat{y} = E[\tilde{f}(\mathbf{z})] = E[\tilde{f}(\mathbf{z}_0) + \tilde{D}_{\Delta z} \tilde{f}] = \tilde{f}(\mathbf{z}_0) = f(\mathbf{x}_0), \quad (88)$$

gdje je sa \hat{y} označena estimirana vrijednost funkcije.

Kovarijansa greške estimacije, u oznaci P_y predstavljena je kao

$$\begin{aligned} P_y &= E[(f(\mathbf{x}) - \hat{y}) \cdot (f(\mathbf{x}) - \hat{y})^T] = \\ &= E[(\tilde{f}(\mathbf{z}) - \hat{y}) \cdot (\tilde{f}(\mathbf{z}) - \hat{y})^T] = \\ &= E[(\tilde{f}(\mathbf{z}_0) + \tilde{D}_{\Delta z} \tilde{f} - \tilde{f}(\mathbf{z}_0)) \cdot (\tilde{f}(\mathbf{z}_0) + \tilde{D}_{\Delta z} \tilde{f} - \tilde{f}(\mathbf{z}_0))^T] = \\ &= E[\tilde{D}_{\Delta z} \tilde{f} \cdot \tilde{D}_{\Delta z} \tilde{f}^T] = \\ &= E\left[\left(\frac{1}{h} \left(\sum_{p=1}^m \Delta z_p \mu_p \delta_p\right) \tilde{f}(\mathbf{z}_0)\right) \cdot \left(\frac{1}{h} \left(\sum_{p=1}^m \Delta z_p \mu_p \delta_p\right) \tilde{f}(\mathbf{z}_0)\right)^T\right] = \\ &= \frac{\sigma_2}{h^2} \sum_{p=1}^m (\mu_p \delta_p (\tilde{f}(\mathbf{z}_0))) \cdot (\mu_p \delta_p (\tilde{f}(\mathbf{z}_0)))^T. \end{aligned} \quad (89)$$

U izrazu figuriše vrijednost σ_2 koja je definisana kao $\sigma_2 = E[\Delta z_p^2]$, a koja prema izrazu (86) iznosi $\sigma_2 = 1$.

Ukoliko se uzme u obzir izraz (71) i ukoliko se izvrši transformacija prema promjenjivoj \mathbf{x} izraz (89) će dobiti sljedeći oblik

$$\begin{aligned} P_y &= \frac{1}{4h^2} \sum_{p=1}^m (\tilde{f}(\mathbf{z}_0 + h\mathbf{e}_p) - \tilde{f}(\mathbf{z}_0 - h\mathbf{e}_p)) \cdot (\tilde{f}(\mathbf{z}_0 + h\mathbf{e}_p) - \tilde{f}(\mathbf{z}_0 - h\mathbf{e}_p))^T = \\ &= \frac{1}{4h^2} \sum_{p=1}^m (f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{s}_{x,p}) - f(\mathbf{x}_0 - h\mathbf{s}_{x,p})) \cdot (f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{s}_{x,p}) - f(\mathbf{x}_0 - h\mathbf{s}_{x,p}))^T, \end{aligned} \quad (90)$$

gdje je sa $\mathbf{s}_{x,p}$ označen vektor koji predstavlja p -tu kolonu matrice Čoleskijevog faktora \mathbf{S}_x .

Još jedna veličina od značaja koja ima značenje u algoritmu filtra DD1 jeste takozvana kros-kovarijansa greške u oznaci \mathbf{P}_{xy} koja je definisana kao

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{xy} &= E \left[(\mathbf{x} - E[\mathbf{x}]) \cdot (f(\mathbf{x}) - \hat{y})^T \right] = \\
&= E \left[(\mathbf{S}_x (\mathbf{z} - E[\mathbf{z}])) \cdot (\tilde{f}(\mathbf{z}_0) + \tilde{D}_{\Delta z} \tilde{f} - \tilde{f}(\mathbf{z}_0))^T \right] = \\
&= E \left[(\mathbf{S}_x \Delta \mathbf{z}) \cdot (\tilde{D}_{\Delta z} \tilde{f})^T \right] = \\
&= E \left[\sum_{p=1}^m (\mathbf{s}_{x,p} \Delta z_p) \cdot \left(\frac{1}{h} \left(\sum_{p=1}^m \Delta z_p \mu_p \delta_p \right) \tilde{f}(\mathbf{z}_0) \right)^T \right] = \\
&= \frac{\sigma_2}{h} \left(\sum_{p=1}^m \mathbf{s}_{x,p} (\mu_p \delta_p \tilde{f}(\mathbf{z}_0))^T \right) = \\
&= \frac{1}{2h} \sum_{p=1}^m \mathbf{s}_{x,p} (\tilde{f}(\mathbf{z}_0 + h \mathbf{e}_p) - \tilde{f}(\mathbf{z}_0 - h \mathbf{e}_p))^T.
\end{aligned}$$

Ukoliko se izrazi pomoću promjenjive x , dobija se da je

$$\mathbf{P}_{xy} = \frac{1}{2h} \sum_{p=1}^m \mathbf{s}_{x,p} (f(\mathbf{x}_0 + h \mathbf{s}_{x,p}) - f(\mathbf{x}_0 - h \mathbf{s}_{x,p}))^T. \quad (91)$$

Prema [13], podešavanje veličine h je izvršeno tako da distribucija veličine $\Delta \mathbf{z}$ bude odgovarajuća. Ispostavlja se da će najbolji rezultat, tj. najbolje preslikavanje Tejlorovog reda, razmatrano u jednačini (76) biti zadovoljeno ukoliko je $h^2 = \sigma_4$. Za Gausovu distribuciju biće $\sigma_4 = 3\sigma_2 = 3$, te je h određeno kao

$$h^2 = 3. \quad (92)$$

3° DD1 Algoritam

Neka je dat neki nelinearni sistem, opisan jednačinama (39) i (40). Ukoliko se šumovi uključe u nelinearnu funkciju kao argument funkcije, moguće je izraze zapisati i kao

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \text{ i} \quad (93)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \quad (94)$$

Šumovi koji djeluju na mjerjenje su opisani jednačinama (5) i (6), uz to da je izvršeno stohastičko razdvajanje matrice \mathbf{R} po sljedećem

$$\mathbf{R} = \mathbf{S}_v \cdot \mathbf{S}_v^T, \quad (95)$$

gdje je \mathbf{S}_v Čoleskijev faktor.

Šumovi koji djeluju na stanja, opisani su jednačinama (7) i (8), uz to da je izvršeno stohastičko razdvajanje matrice \mathbf{Q} po sljedećem

$$\mathbf{Q} = \mathbf{S}_w \cdot \mathbf{S}_w^T, \quad (96)$$

gdje je \mathbf{S}_w Čoleskijev faktor.

DD1 algoritam se gradi prema istom principu kao EKF, uz razliku da ne koristi Tejlorov red, već Stirlingovu interpolaciju funkcije u okolini rane tačke. Prema [13], Kalmanovo pojačanje se može izraziti kao

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}_{xy}(k) \cdot \mathbf{P}_y^{-1}(k), \quad (97)$$

gdje je

$$\mathbf{P}_y(k) = \mathbf{S}_y(k) \cdot \mathbf{S}_y^T(k). \quad (98)$$

U izrazu (98) figuriše vrijednost $\mathbf{S}_y(k)$, koja se može dobiti iz Čoleskijevih faktora $\mathbf{S}_{yx}^{(1)}(k)$ i $\mathbf{S}_{yy}^{(1)}(k)$, vršenjem Hausholderove trianguliracije (*Householder triangularization* [20]) kao

$$\mathbf{S}_y(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{yx}^{(1)}(k) & \mathbf{S}_{yy}^{(1)}(k) \end{bmatrix}. \quad (99)$$

Čoleskijevi faktori $\mathbf{S}_{yx}^{(1)}(k)$ i $\mathbf{S}_{yy}^{(1)}(k)$ su određeni podijeljenim diferencijalima, prema izvedenoj formuli (91) i definisani su sljedećim izrazima

$$\mathbf{S}_{yx}^{(1)}(k) = \left\{ S_{yx}^{(1)}(k)_{(i,j)} \right\} = \left\{ \frac{g_i(\hat{\mathbf{x}}_{k^-} + h\mathbf{s}_{(x,j)^-}, \hat{\mathbf{v}}_k) - g_i(\hat{\mathbf{x}}_{k^-} - h\mathbf{s}_{(x,j)^-}, \hat{\mathbf{v}}_k)}{2h} \right\}, \quad (100)$$

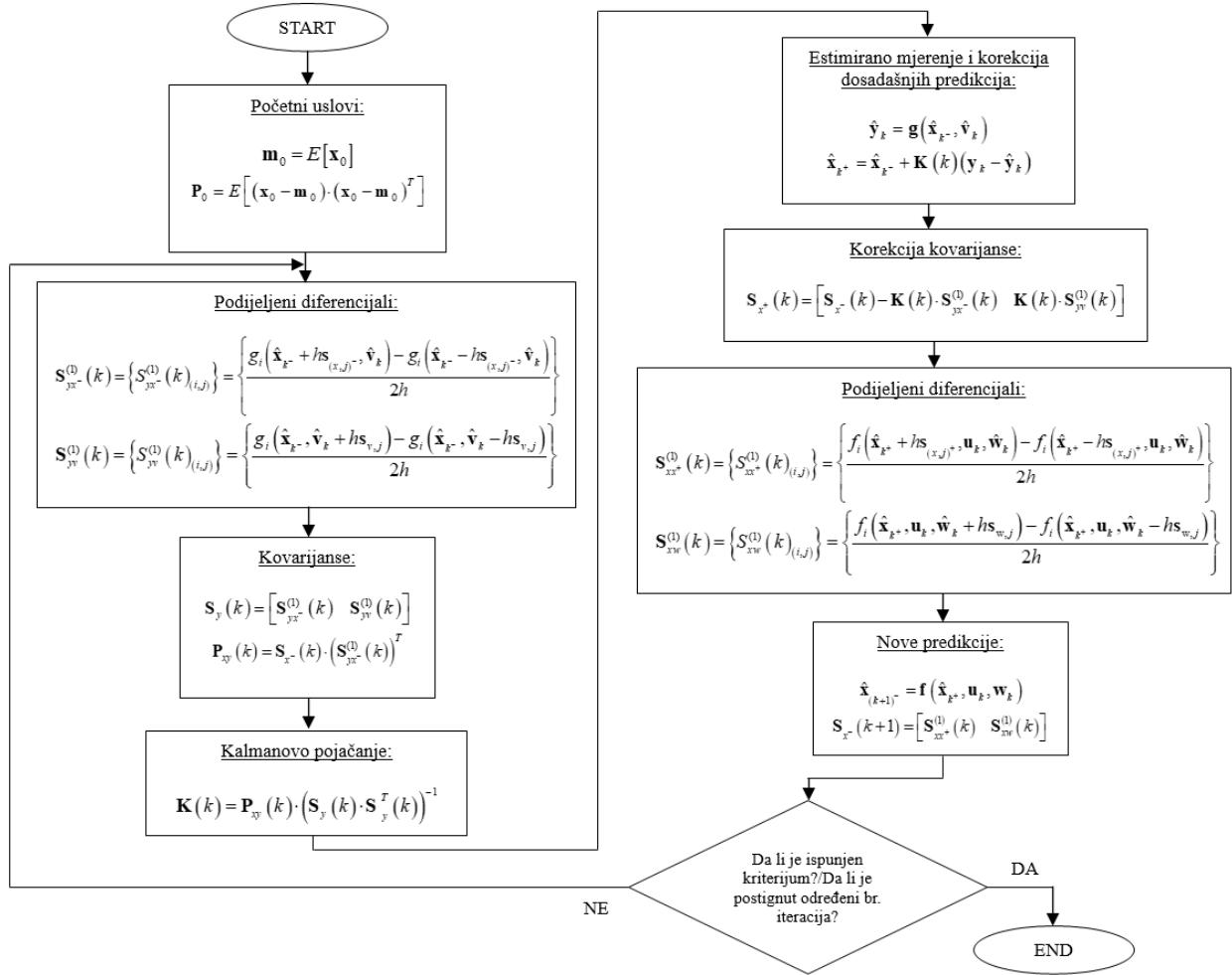
$$\mathbf{S}_{yy}^{(1)}(k) = \left\{ S_{yy}^{(1)}(k)_{(i,j)} \right\} = \left\{ \frac{g_i(\hat{\mathbf{x}}_{k^-}, \hat{\mathbf{v}}_k + h\mathbf{s}_{v,j}) - g_i(\hat{\mathbf{x}}_{k^-}, \hat{\mathbf{v}}_k - h\mathbf{s}_{v,j})}{2h} \right\}. \quad (101)$$

U izrazima (100) i (101) figurišu vektori $\mathbf{s}_{(x,j)^-}$ i $\mathbf{s}_{v,j}$, koji predstavljaju vektor kolone matrica \mathbf{S}_{x^-} i \mathbf{S}_v . Matrica \mathbf{S}_v je definisana izrazom (95), dok je matrica \mathbf{S}_{x^-} Čoleskijev faktor kovarijanse greške „a priori“ stanja definisan kao

$$\mathbf{P}_{x^-} = \mathbf{S}_{x^-}(k) \cdot \mathbf{S}_{x^-}^T(k). \quad (102)$$

Da bi se dobilo pojačanje \mathbf{K}_k prema izrazu (97), potrebno je izračunati i kros-kovarijansu $\mathbf{P}_{xy}(k)$. Ona je definisana kao

$$\mathbf{P}_{xy}(k) = \mathbf{S}_{x^-}(k) \cdot \left(\mathbf{S}_{yx^-}^{(1)}(k) \right)^T. \quad (103)$$



Slika 14. DD1 algoritam

Ažuriranje veličine $\mathbf{S}_x(k)$ za „a posteriori“ trenutak se vrši slaganjem Čoleskijevih faktora i vršenjem Hausholderove triangulizacije

$$\mathbf{S}_{x^+}(k) = \left[\mathbf{S}_{x^-}(k) - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{S}_{yx^-}^{(1)}(k) \quad \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{S}_{yv}^{(1)}(k) \right], \quad (104)$$

dok će njena vrijednost za sljedeći „a priori“ trenutak biti

$$\mathbf{S}_{x^-}(k+1) = \left[\mathbf{S}_{xx^+}^{(1)}(k) \quad \mathbf{S}_{xw}^{(1)}(k) \right]. \quad (105)$$

U jednačini (105) figurišu vrijednosti podijeljenih diferencijala definisanih prema formuli (91) i prikazani su kao

$$\mathbf{S}_{xx^+}^{(1)}(k) = \left\{ S_{xx^+}^{(1)}(k) \right\}_{(i,j)} = \left\{ \frac{f_i\left(\hat{\mathbf{x}}_{k^+} + h\mathbf{s}_{(x,j)^+}, \mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{w}}_k\right) - f_i\left(\hat{\mathbf{x}}_{k^+} - h\mathbf{s}_{(x,j)^+}, \mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{w}}_k\right)}{2h} \right\}, \quad (106)$$

$$\mathbf{S}_{xw}^{(1)}(k) = \left\{ S_{xw}^{(1)}(k) \right\}_{(i,j)} = \left\{ \frac{f_i\left(\hat{\mathbf{x}}_{k^+}, \mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{w}}_k + h\mathbf{s}_{w,j}\right) - f_i\left(\hat{\mathbf{x}}_{k^+}, \mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{w}}_k - h\mathbf{s}_{w,j}\right)}{2h} \right\}. \quad (107)$$

Matrica \mathbf{S}_w je definisana izrazom (96), a element $\mathbf{s}_{(x,j)^+}$ je vektor kolone j matrice \mathbf{S}_{x^+} koja predstavlja Čoleskijev faktor matrice kovarijanse greške i definisana je kao

$$\mathbf{P}_{k^+} = \mathbf{S}_{x^+}(k) \cdot \mathbf{S}_{x^+}^T(k). \quad (108)$$

Kompletan algoritam DD1 filtra, gdje je opisani postupak dat redom kojim ga treba vršiti, prikazan je na slici 14.

4° Numerički primjer – Matematičko klatno (DD1)

Neka je zadat model matematičkog klatna opisan u poglavlju 3.1.3. jednačinama (59) i (60). Mjerenje se vrši prema jednačini (61).

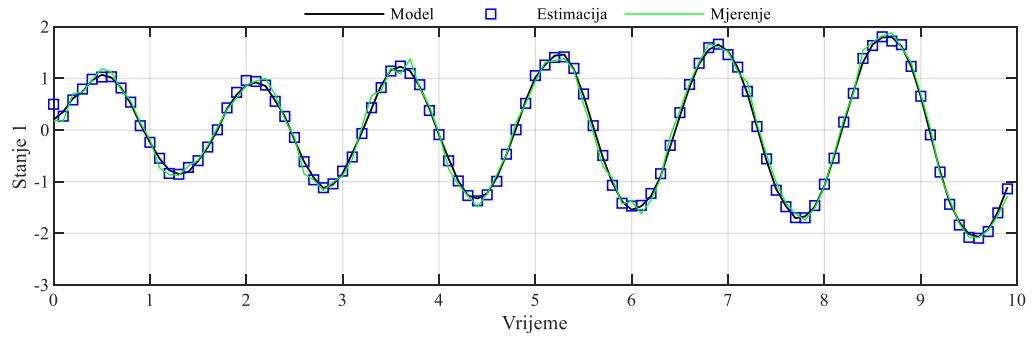
U cilju izrade numeričkog eksperimenta, korišćeni su sljedeći parametri: $T = 0.01$, $m = 2kg$, $l = 0.5m$ i $g_{ubrz} = 9.81 \frac{m}{s^2}$. Realni početni uslovi su $\mathbf{x}_0 = [0.2 \ 0.5]^T$, dok su estimirani početni uslovi $\mathbf{m}_0 = [0.5 \ 0.8]^T$. Realna vrijednost kovarijanse bijelog šuma stanja je $\mathbf{Q}_{realno} = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0 \\ 0 & 0.0004 \end{bmatrix}$, i kao takva je iskorišćena za rad filtra $\mathbf{Q}_{realno} = \mathbf{Q}_{DD1}$. Vrijednost kovarijanse bijelog šuma mjerenja je $R = 0.01$ i ista takva je iskorišćena za rad filtra.

Početna vrijednost kovarijanse greške korišćena u numeričkom eksperimentu je $\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 0.09 & 0 \\ 0 & 0.09 \end{bmatrix}$.

Obrtni moment kojim se djeluje na klatno (ulazna veličina) je postavljen tako da na početku djeluje silom od $\tau = 10Nm$, a sa svakim sljedećim diskretnim odbirkom vremena gubi 3% svoje vrijednosti.

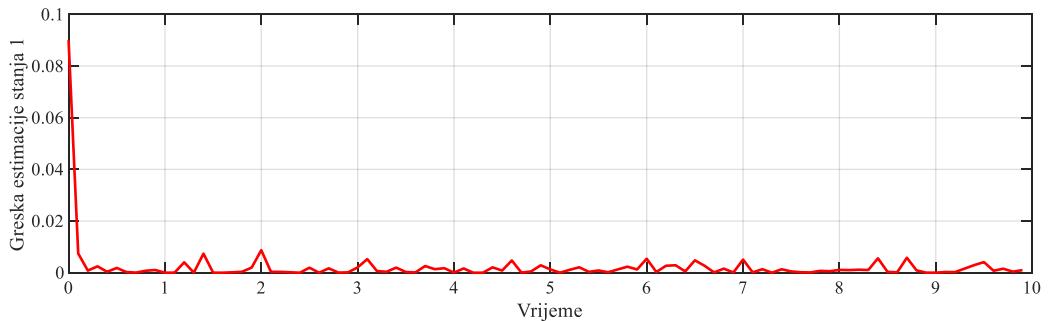
Nakon što se sve navedene vrijednosti unesu u kod programskog paketa MATLAB®, za dužinu simulacije od 10 sekundi, dobijaju se grafici koji prikazuju rad i efikasnost filtra.

Na slici 15 je prikazana je estimacija mjerene stanja 1, tj. ugaonog pomjeraja θ . Sa slike se može primjetiti da mjereno ima određeno odstupanje zbog bijelog šuma koji djeluje na instrument, kao i da filter to odstupanje kompenzuje.



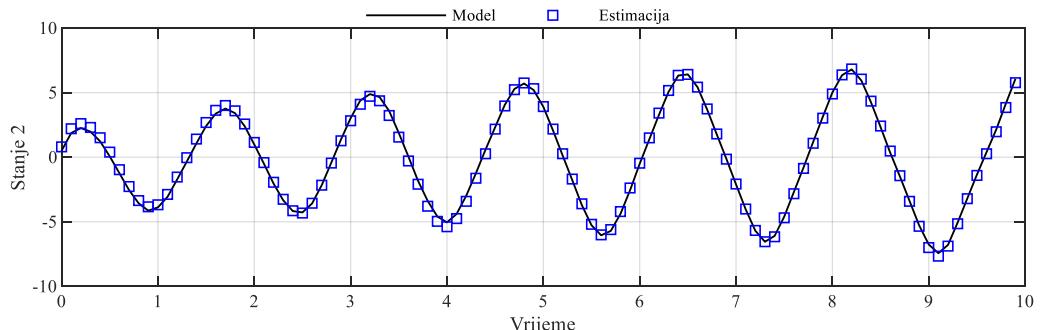
Slika 15. Estimacija ugaonog pomjeraja matematičkog klatna

Kvadratna greška estimacije stanja 1 prikazana je na slici 16. Srednja vrijednost kvadratne greške iznosi 0.0016.



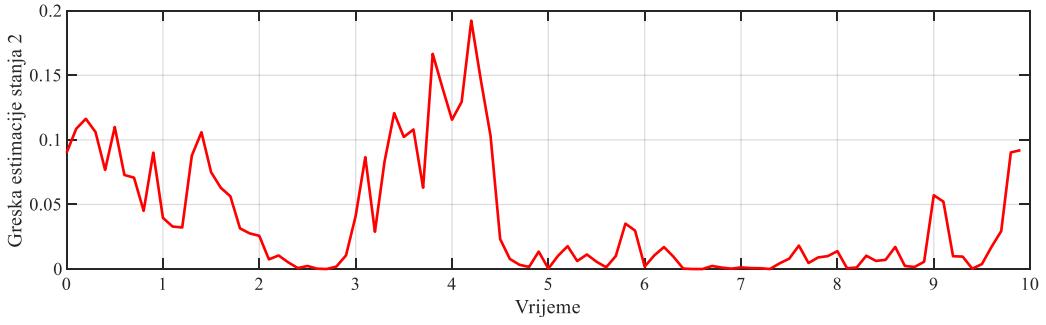
Slika 16. Kvadratna greška estimacije ugaonog pomjeraja matematičkog klatna

Estimacija ugaone brzine je prikazana na slici 17.



Slika 17. Estimacija ugaone brzine matematičkog klatna

Kvadratna greška estimacije stanja 2 prikazana je na slici 18. Srednja vrijednost kvadratne greške iznosi 0.0928.



Slika 18. Kvadratna greška estimacije ugaone brzine matematičkog klatna

3.2.3. Filter drugog reda – DD2

1° Promjenjive prilikom aproksimacije drugog reda

Primjenom interpolacije, zanemarujući sve starije članove do drugog, dobija se aproksimacija drugog reda. Primjenom ovakve aproksimacije, računarsko opterećenje se smanjuje, a greška aproksimacije je po pravilu manja nego u slučaju aproksimacije prvog reda.

U aproksimaciji drugog reda, funkcija $f(\mathbf{x})$ je interpolisana u okolini tačke $\mathbf{x}_0 = [x_1^0 \ x_2^0 \ x_3^0 \ \dots \ x_m^0]^T$, tj. tačke $\mathbf{z}_0 = \mathbf{S}_x^{-1} \mathbf{x}_0$ na sljedeći način

$$y = f(\mathbf{x}) = \tilde{f}(\mathbf{z})$$

$$y = \tilde{f}(\mathbf{z}_0 + \Delta\mathbf{z}) \approx \tilde{f}(\mathbf{z}_0) + \tilde{D}_{\Delta z} \tilde{f} + \frac{1}{2!} \tilde{D}_{\Delta z}^2 \tilde{f}. \quad (109)$$

Koristeći slične metode izvođenja kao za aproksimaciju prvog reda, dobija se da je

$$\begin{aligned} \hat{y} &= E[\tilde{f}(\mathbf{z})] = E\left[\tilde{f}(\mathbf{z}_0) + \tilde{D}_{\Delta z} \tilde{f} + \frac{1}{2!} \tilde{D}_{\Delta z}^2 \tilde{f}\right] = \\ &= \tilde{f}(\mathbf{z}_0) + \frac{1}{2!} \tilde{D}_{\Delta z}^2 \tilde{f} = \\ &= \tilde{f}(\mathbf{z}_0) + \frac{\sigma_2}{2h^2} \sum_{p=1}^m \delta_p^2 \tilde{f}(\mathbf{z}_0). \end{aligned} \quad (110)$$

Izraz (110) je dobijen uzimajući u obzir jednakost (79), prepostavku da su različiti elementi vektora \mathbf{z} međusobno nekorelirani (tj. da je $E[\Delta z_i \cdot \Delta z_j^T] = 0$ za $\forall i \neq j$), kao i da je kovarijansa $E[\Delta z_i \cdot \Delta z_i^T] = \sigma_2 = 1$. Upotrebom izraza (72) dobija se da je

$$\begin{aligned}
\hat{y} &= \tilde{f}(\mathbf{z}_0) + \frac{1}{2h^2} \sum_{p=1}^m \tilde{f}(\mathbf{z}_0 + h\mathbf{e}_p) + \tilde{f}(\mathbf{z}_0 - h\mathbf{e}_p) - 2\tilde{f}(\mathbf{z}_0) = \\
&= \tilde{f}(\mathbf{z}_0) - \frac{1}{2h^2} \cdot m \cdot 2\tilde{f}(\mathbf{z}_0) + \frac{1}{2h^2} \sum_{p=1}^m \tilde{f}(\mathbf{z}_0 + h\mathbf{e}_p) + \tilde{f}(\mathbf{z}_0 - h\mathbf{e}_p) = \\
&= \frac{h^2 - m}{h^2} \tilde{f}(\mathbf{z}_0) + \frac{1}{2h^2} \sum_{p=1}^m \tilde{f}(\mathbf{z}_0 + h\mathbf{e}_p) + \tilde{f}(\mathbf{z}_0 - h\mathbf{e}_p) \\
&= \frac{h^2 - m}{h^2} f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2h^2} \sum_{p=1}^m f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{s}_{x,p}) + f(\mathbf{x}_0 - h\mathbf{s}_{x,p}). \tag{111}
\end{aligned}$$

Primjenom sličnog postupka, dobija se da je

$$\begin{aligned}
P_y &= \frac{\sigma_2}{4h^2} \sum_{p=1}^m (\tilde{f}(\mathbf{z}_0 + h\mathbf{e}_p) - \tilde{f}(\mathbf{z}_0 - h\mathbf{e}_p)) \times \\
&\quad \times (\tilde{f}(\mathbf{z}_0 + h\mathbf{e}_p) - \tilde{f}(\mathbf{z}_0 - h\mathbf{e}_p))^T + \\
&+ \frac{\sigma_4 - \sigma_2^2}{4h^2} \sum_{p=1}^m (\tilde{f}(\mathbf{z}_0 + h\mathbf{e}_p) + \tilde{f}(\mathbf{z}_0 - h\mathbf{e}_p) - 2\tilde{f}(\mathbf{z}_0)) \times \\
&\quad \times (\tilde{f}(\mathbf{z}_0 + h\mathbf{e}_p) + \tilde{f}(\mathbf{z}_0 - h\mathbf{e}_p) - 2\tilde{f}(\mathbf{z}_0))^T. \tag{112}
\end{aligned}$$

Uzimajući da je $\sigma_2 = 1$ i $h^2 = \sigma_4 = 3\sigma_2 = 3$, dobija se da je

$$\begin{aligned}
P_y &= \frac{1}{4h^2} \sum_{p=1}^m (f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{s}_{x,p}) - f(\mathbf{x}_0 - h\mathbf{s}_{x,p})) \times \\
&\quad \times (f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{s}_{x,p}) - f(\mathbf{x}_0 - h\mathbf{s}_{x,p}))^T + \\
&+ \frac{h^2 - 1}{4h^2} \sum_{p=1}^m (f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{s}_{x,p}) + f(\mathbf{x}_0 - h\mathbf{s}_{x,p}) - 2f(\mathbf{x}_0)) \times \\
&\quad \times (f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{s}_{x,p}) + f(\mathbf{x}_0 - h\mathbf{s}_{x,p}) - 2f(\mathbf{x}_0))^T. \tag{113}
\end{aligned}$$

Kros kovarijansa ima isti oblik kao i prilikom aproksimacije prvog reda

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{xy} &= E \left[(\mathbf{S}_x \Delta \mathbf{z}) \cdot \left(\tilde{D}_{\Delta z} \tilde{f} + \frac{1}{2} \tilde{D}_{\Delta z}^2 \tilde{f} \right)^T \right] = \\
&= \frac{1}{2h} \sum_{p=1}^m \mathbf{s}_{x,p} (f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{s}_{x,p}) - f(\mathbf{x}_0 - h\mathbf{s}_{x,p}))^T. \tag{114}
\end{aligned}$$

2° DD2 Algoritam

Kao i kod DD1 algoritma, sistem je opisan nelinearnim jednačinama (93) i (94). Čoleskijevi faktori \mathbf{S}_v i \mathbf{S}_w su definisani prema jednačinama (95) i (96). Kalmanovo pojačanje je opisano jednačinom (97), a varijansa greške mjerena u odnosu na model jednačinom (98). Ipak, vrijednost $\mathbf{S}_y(k)$ u slučaju DD2 filtera ima i podijeljene diferencijale drugog reda, te je jednačina koja ga opisuje sljedeća

$$\mathbf{S}_y(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{yx^-}^{(1)}(k) & \mathbf{S}_{yy}^{(1)}(k) & \mathbf{S}_{yx^-}^{(2)}(k) & \mathbf{S}_{yy}^{(2)}(k) \end{bmatrix}. \quad (115)$$

Podijeljeni diferencijali prvog reda su već definisani izrazima (100) i (101), dok se podijeljeni diferencijali drugog reda definišu po uzoru na izraz (113) i jednaki su

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{yx^-}^{(2)}(k) &= \left\{ S_{yx^-}^{(2)}(k)_{(i,j)} \right\} = \\ &= \left\{ \frac{\sqrt{h^2 - 1}}{2h} \cdot \left[g_i \left(\hat{\mathbf{x}}_{k^-} + h \mathbf{s}_{(x,j)^-}, \hat{\mathbf{v}}_k \right) + g_i \left(\hat{\mathbf{x}}_{k^-} - h \mathbf{s}_{(x,j)^-}, \hat{\mathbf{v}}_k \right) - 2g_i \left(\hat{\mathbf{x}}_{k^-}, \hat{\mathbf{v}}_k \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (116)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{yy}^{(2)}(k) &= \left\{ S_{yy}^{(2)}(k)_{(i,j)} \right\} = \\ &= \left\{ \frac{\sqrt{h^2 - 1}}{2h} \cdot \left[g_i \left(\hat{\mathbf{x}}_{k^-}, \hat{\mathbf{v}}_k + h \mathbf{s}_{v,j} \right) + g_i \left(\hat{\mathbf{x}}_{k^-}, \hat{\mathbf{v}}_k - h \mathbf{s}_{v,j} \right) - 2g_i \left(\hat{\mathbf{x}}_{k^-}, \hat{\mathbf{v}}_k \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (117)$$

Matrica \mathbf{S}_{x^-} definisana je kao u relaciji (102). Kros kovarijansa, koja figuriše u izrazu za Kalmanovo pojačanje, definisana je izrazom (103), kao i za DD1 filter.

Razlika u filtru drugog reda se javlja u ažuriranju veličina, pa je

$$\mathbf{S}_{x^+}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{x^-} - \mathbf{K} \cdot \mathbf{S}_{yx^-}^{(1)} & \mathbf{K} \cdot \mathbf{S}_{yy}^{(1)} & \mathbf{K} \cdot \mathbf{S}_{yx^-}^{(2)} & \mathbf{K} \cdot \mathbf{S}_{yy}^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (118)$$

Vrijednost matrice \mathbf{S}_{x^-} u trenutku $(k+1)$ će biti

$$\mathbf{S}_{x^-}(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{xx^+}^{(1)}(k) & \mathbf{S}_{xw}^{(1)}(k) & \mathbf{S}_{xx^+}^{(2)}(k) & \mathbf{S}_{xw}^{(2)}(k) \end{bmatrix}, \quad (119)$$

dok su podijeljeni diferencijali drugog reda definisani kao

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{xx^+}^{(2)}(k) &= \left\{ S_{xx^+}^{(2)}(k)_{(i,j)} \right\} = \\ &= \left\{ \frac{\sqrt{h^2 - 1}}{2h} \cdot \left[f_i \left(\hat{\mathbf{x}}_{k^+} + h \mathbf{s}_{(x,j)^+}, \mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{w}}_k \right) + f_i \left(\hat{\mathbf{x}}_{k^+} - h \mathbf{s}_{(x,j)^+}, \mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{w}}_k \right) - 2f_i \left(\hat{\mathbf{x}}_{k^+}, \mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{w}}_k \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (120)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{xw}^{(2)}(k) &= \left\{ S_{xw}^{(2)}(k)_{(i,j)} \right\} = \\ &= \left\{ \frac{\sqrt{h^2 - 1}}{2h} \cdot \left[f_i(\hat{\mathbf{x}}_{k^+}, \mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{w}}_k + h\mathbf{s}_{w,j}) + f_i(\hat{\mathbf{x}}_{k^+}, \mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{w}}_k - h\mathbf{s}_{w,j}) - 2f_i(\hat{\mathbf{x}}_{k^+}, \mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{w}}_k) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (121)$$

Pored ovih izmjena, zbog izraza (111), potrebno je drugačije računati estimirano mjerjenje i novu predikciju, pa je

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}_k &= \frac{h^2 - m_x - m_v}{h^2} \cdot \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}_{k^-}, \hat{\mathbf{v}}_k) + \\ &+ \frac{1}{2h^2} \sum_{p=1}^{m_x} \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}_{k^-} + h\mathbf{s}_{(x,p)^-}, \hat{\mathbf{v}}_k) + \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}_{k^-} - h\mathbf{s}_{(x,p)^-}, \hat{\mathbf{v}}_k) + \\ &+ \frac{1}{2h^2} \sum_{p=1}^{m_v} \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}_{k^-}, \hat{\mathbf{v}}_k + h\mathbf{s}_{v,p}) + \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}_{k^-}, \hat{\mathbf{v}}_k - h\mathbf{s}_{v,p}), \end{aligned} \quad (122)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{(k+1)^-} &= \frac{h^2 - m_x - m_w}{h^2} \cdot \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k^+}, \mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{w}}_k) + \\ &+ \frac{1}{2h^2} \sum_{p=1}^{m_x} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k^+} + h\mathbf{s}_{(x,p)^+}, \mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{w}}_k) + \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k^+} - h\mathbf{s}_{(x,p)^+}, \mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{w}}_k) + \\ &+ \frac{1}{2h^2} \sum_{p=1}^{m_w} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k^+}, \mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{w}}_k + h\mathbf{s}_{w,p}) + \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k^+}, \mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{w}}_k - h\mathbf{s}_{w,p}). \end{aligned} \quad (123)$$

DD2 algoritam se može izvršiti prema šemi sa slike 14 koja opisuje DD1 algoritam, uz predložene dopune podijeljenih diferencijala i izmjene pojedinih veličina.

3° Numerički primjer – Matematičko klatno (DD2)

Neka je zadat model matematičkog klatna opisan u poglavlju **3.1.3.** jednačinama (59) i (60). Mjerjenje se vrši prema jednačini (61).

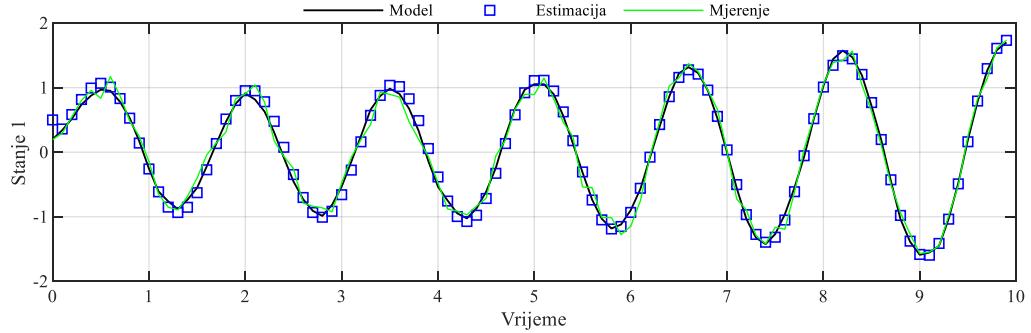
U cilju izrade numeričkog eksperimenta, korišćeni su sljedeći parametri: $T = 0.01$, $m = 2kg$, $l = 0.5m$ i $g_{ubrz} = 9.81 \frac{m}{s^2}$. Realni početni uslovi su $\mathbf{x}_0 = [0.2 \ 0.5]^T$, dok su estimirani početni uslovi $\mathbf{m}_0 = [0.5 \ 0.8]^T$. Realna vrijednost kovarijanse bijelog šuma stanja je $\mathbf{Q}_{realno} = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0 \\ 0 & 0.0004 \end{bmatrix}$, i kao takva je iskorišćena za rad filtra $\mathbf{Q}_{realno} = \mathbf{Q}_{DD2}$. Vrijednost kovarijanse bijelog šuma mjerjenja je $R = 0.01$ i ista takva je iskorišćena za rad filtra.

Početna vrijednost kovarijanse greške korišćena u numeričkom eksperimentu je $\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 0.09 & 0 \\ 0 & 0.09 \end{bmatrix}$.

Obrtni moment kojim se djeluje na klatno (ulazna veličina) je postavljen tako da na početku djeluje silom od $\tau = 10 \text{ Nm}$, a sa svakim sljedećim diskretnim odbirkom vremena gubi 3% svoje vrijednosti.

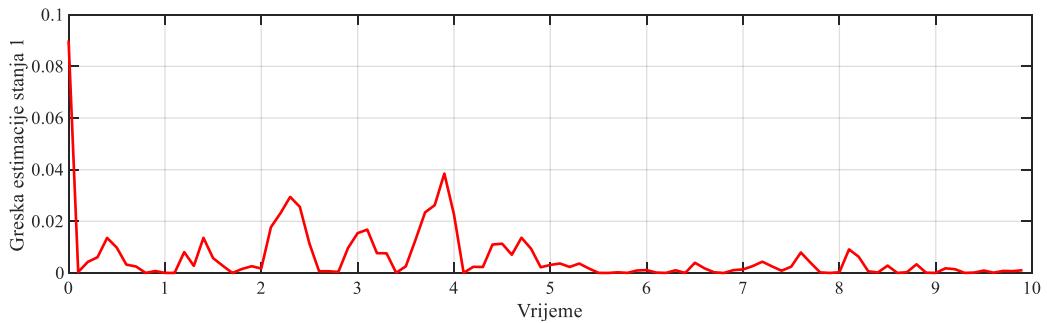
Nakon što se sve navedene vrijednosti unesu u kod programskog paketa MATLAB®, za dužinu simulacije od 10 sekundi, dobijaju se grafici koji prikazuju rad i efikasnost filtra.

Na slici 19 je prikazana je estimacija mjerjenog stanja 1, tj. ugaonog pomjeraja θ . Sa slike se može primijetiti da mjerjenje ima određeno odstupanje zbog bijelog šuma koji djeluje na instrument, kao i da filter to odstupanje kompenzuje.



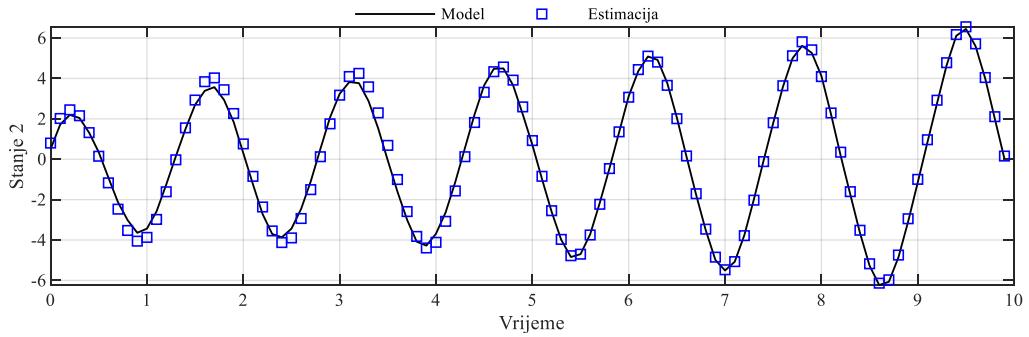
Slika 19. Estimacija ugaonog pomjeraja matematičkog klatna

Kvadratna greška estimacije stanja 1 prikazana je na slici 20. Srednja vrijednost kvadratne greške iznosi 0.0053.



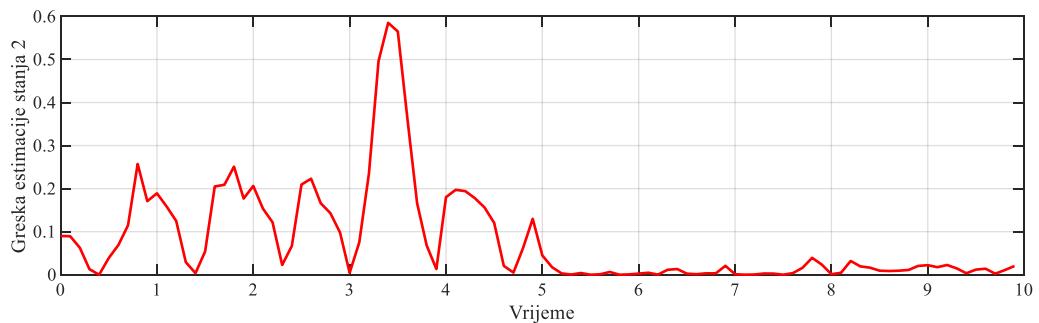
Slika 20. Kvadratna greška estimacije ugaonog pomjeraja matematičkog klatna

Estimacija ugaone brzine je prikazana na slici 21.



Slika 21. Estimacija ugaone brzine matematičkog klatna

Kvadratna greška estimacije stanja 2 prikazana je na slici 22. Srednja vrijednost kvadratne greške iznosi 0.0790.



Slika 22. Kvadratna greška estimacija ugaone brzine matematičkog klatna

3.3. LINEARNI KALMANOV FILTAR SA NJUTN-RAPSONOVIM METODOM

Da bi linearni Kalmanov filter mogao da estimira proces sa nelinearnim vezama među komponentama stanja sistema potrebno je primijeniti drugačiji pristup. Naime, jednačine koje preko linearnih veza prikazuju dinamiku procesa je moguće iskoristiti dok je dinamiku nelinearne jednačine potrebno minimizovati ili prikazati najsličnijom linearom vezom (npr. $\dot{\mathbf{x}}_{\text{nelinearno}} = 0$). U tom slučaju bi postojao linearni i nelinearni dio estimacije. Linearni dio se rješava preko linearog Kalmanovog filtra, a nelinearni dio se može riješiti u nekoliko koraka:

- Riješiti „a priori“ i „a posteriori“ nelinearne jednačine stanja sa minimalnom dinamikom uz linearne jednačine pomoću Kalmanovog filtra.
- Uzeti vrijednost dobijenu iz filtra kao početnu ulaznu vrijednost za NR (Njutn-Rapson) algoritam i izvršiti rješavanje nelinearne jednačine za određeni broj iteracija.
- Iskoristiti vrijednost dobijenu NR metodom za sljedeći iterativni korak KF-a.

3.3.1. Njutn-Rapsonov metod

Jedan od metoda rješavanja nelinearne jednačine jeste NR metod. Ovaj metod ima osobinu najbrže konvergencije prema tačnom rješenju, ukoliko je podešena početna vrijednost dovoljno blizu stvarnoj vrijednosti [15]. Mana ovog metoda je u tome što je potrebno računanje prvog izvoda funkcije da bi se izračunalo rješenje (prvi izvod funkcije ne mora biti definisan u svakoj tački).

Neka je data funkcija $f(x)$ definisana u okolini tačke x_k . Razdvajanjem funkcije na Tejlorov red u okolini tačke x_k dobija se da je

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + (x_{k+1} - x_k) f'(x_k) + \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} f''(x_k) + \dots$$

Ukoliko se zanemare stariji članovi od prvog i ukoliko se traži rješenje funkcije $f(x_{k+1}) = 0$, dobija se da je

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + (x_{k+1} - x_k) f'(x_k) = 0,$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (124)$$

Jednačina (41) upućuje na iterativni metod dobijanja rješenja uvođenjem funkcije

$$\phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \quad (125)$$

Za slučaj vektorske funkcije sa više promjenjivih, važi sljedeće

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{J}_f^{-1}(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_k), \quad (126)$$

gdje je $\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_k)$ Jakobijan funkcije \mathbf{f} .

4. DINAMIČKI MODEL VJETROELEKTRANE

Do 2022. godine, ukupni svjetski kapacitet snage vjetra se povećao na 906 GW, pri čemu je najveći proizvođač energije u odnosu na prethodni period bila Kina [21]. Poređenja radi, kapacitet snage vjetra 2021. godine je bio 743 GW [22], a 2014. godine 336 GW [23].

Energija nuklearnih procesa koji se dešavaju na najbližoj zvijezdi, Suncu, se prenosi do planete Zemlje u vidu zračenja. Zračenjem se zagrijavaju čestice vazduha koje imaju različitu gustinu na različitim nadmorskim visinama. Sa povećanjem nadmorske visine, gustina vazduha je manja, te je i temperatura ambijenta (vazduha) manja. Zbog disbalansa temperature dolazi do razmjene toplosti i do kretanja vazdušnih čestica. Kretanje vazdušnih čestica naziva se vjetar i posjeduje odgovarajuću energiju. Energija vjetra se može iskoristiti konvertovanjem iste u mehaničku energiju lopatica turbine, a zatim uz pomoć generatora u električnu energiju. Električna energija je najpraktičnija za upotrebu i kao takva se može iskoristiti na različite načine.

Da bi se dodatno unaprijedio sistem proizvodnje električne energije dobijene konverzijom kinetičke energije vjetra, posljednjih godina se radi na unapređenju sistema upravljanja vjetroelektranom.

Kroz istorijski razvoj vjetroelektrana, pojavljuju se elektrane sa konstantnom i promjenjivom brzinom, a uz razvoj energetske elektronike i poluprovodničkih kola, pojavljuju se različiti mehanizmi i tehnike upravljanja elektranama. U nastavku je dat metod konverzije energije vjetra u električnu, zatim kratak pregled vrsta vjetroelektrana i metoda upravljanja elektranom, a nakon toga je izведен matematički model vjetroelektrane koji se koristi u numeričkom eksperimentu.

4.1. KONVERZIJA ENERGIJE VJETRA

Energija vjetra postoji u prirodi i kako je ranije navedeno, moguće je iskoristiti je konverzijom u električnu energiju. Energija vjetra spada u tzv. „zelenu“ energiju, što znači da spada u obnovljive izvore energije, te je veoma poželjno koristiti je. Kako je izvedeno u [25], a kao što se navodi u [26] matematička jednačina kojom je opisana snaga vjetra je

$$P_w = \frac{1}{2} \rho A v^3. \quad (127)$$

Snaga označava potrošnju energije u vremenu $\left(P_w = \frac{dE_w}{dt} \right)$ te je jednakošću (127)

definisana i energija koja se nalazi u vjetru. U izrazu (127) figurišu

- ρ - gustina vazduha,

- $A = \pi R^2$ - površina kroz koju vjetar protiče (R je poluprečnik kruga kroz koji se odvija strujanje vazduha),
- v - brzina kojom se kreću vazdušne čestice, tj. brzina vjetra.

Primjenom trenutno dostupne tehnologije, konverzija energije vjetra se može izvršiti samo djelimično, na šta utiče koeficijent snage vjetroturbine (C_p), te je snaga (energija) prenijeta na mehaničke djelove turbine jednaka

$$P_r = \frac{1}{2} \rho A v^3 C_p. \quad (128)$$

Koeficijent snage vjetroturbine, takođe poznat kao efikasnost rotora turbine, ima teorijsku maksimalnu vrijednost 0.593 ili 59.3%. Ova vrijednost se zasniva na Betzovom limitu – teorijskom limitu maksimalne efikasnosti moguće za vjetroturbinu.

U praktičnim dizajnima, maksimalno ostvarivi C_p varira na osnovu dizajna i tipa turbine. Za brze turbine sa dvije lopatice, maksimalni C_p obično iznosi između 0.4 i 0.5. Za sporije turbine sa više lopatica, maksimalni C_p se kreće između 0.2 i 0.4.

Znajući da je ugaona brzina rotora turbine jednaka $\omega_r = \frac{v_{lopatica}}{R}$ i da je $A = \pi R^2$, moment sile (obrtni moment) rotora turbine se može dobiti na sljedeći način

$$\begin{aligned} T_r &= \frac{P_r}{\omega_r} = \frac{1}{2} \rho A v^3 C_p \cdot \frac{1}{\omega_r} = \\ &= \frac{1}{2} \rho \pi R^2 v^3 C_p \cdot \frac{R}{v} = \\ &= \frac{1}{2} \rho \pi R^3 v^2 C_p. \end{aligned} \quad (129)$$

Koeficijent C_p se odnosi na obrtni moment i razlikuje se od C_T zato što $v_{lopatica}$ (brzina lopatica turbine) nije jednaka v (brzini vjetra). Važi da je $C_T = \frac{C_p}{\lambda}$. Ova veličina je funkcija tzv. odnosa brzina λ (*tip speed ratio*) i ugla zakriviljenja lopatica β . Odnos brzina λ se definiše kao

$$\lambda = \frac{v_{lopatica}}{v} = \frac{\omega_r R}{v}. \quad (130)$$

Ugao zakriviljenja lopatica β je najčešće upravljiva veličina. Ukoliko postoji mogućnost upravljanja uglom zakriviljenja lopatica, na spoju lopatica i glavnog vratila turbine se nalazi mehanički sklop sa zupčanicima i motorima. Kada motor dobije signal, preko zupčanika se

podešava zakriviljenost lopatica i time se reguliše brzina okretanja turbine. Ovo je samo jedan od načina upravljanja vjetroelektranom, o čemu će biti više riječi u poglavlju 4.3.

Koeficijent snage (momenta) je funkcija koja se najčešće dobija aerodinamičkim modelovanjem i vršenjem različitih simulacija prije izgradnje elektrane. Kako konstrukcija lopatica utiče na koeficijent snage, aerodinamičko modelovanje i testiranje je bitno izvršiti prije proizvodnje. Analizom dobijenih rezultata je moguće izvršiti promjene dizajna lopatica tako da se optimizuje koeficijent snage.

C_p i C_T zavise od brzine vjetra, od konstrukcijskog dizajna turbine, kao i veličine i oblika lopatica, te se razlikuju za svaku pojedinačnu elektranu. Ovo znači da se najčešće dobijaju prema tabelarnim podacima dobijenim eksperimentalnim putem i nemaju preciznu analitičku funkciju. Ipak, upotrebom različitih dostupnih matematičkih i softverskih alata, tabelarni rezultati se mogu transformisati u analitičku funkciju odgovarajuće tačnosti. U cilju modelovanja vjetroelektrane, u ovom radu će biti korišćen analitički model funkcije faktora snage prikazan formulom

$$\bar{C}_T(\lambda, \beta) = c_1 \left(1 + c_2 (\beta + c_3)^{\frac{1}{2}} \right) + \frac{c_4}{\lambda} \left(c_5 \lambda_i(\lambda, \beta) - c_6 \beta - c_7 \beta^{c_8} - c_9 \right) e^{-c_{10} \lambda_i(\lambda, \beta)}, \quad (131)$$

uzimajući da je $\lambda > 0$ i da je

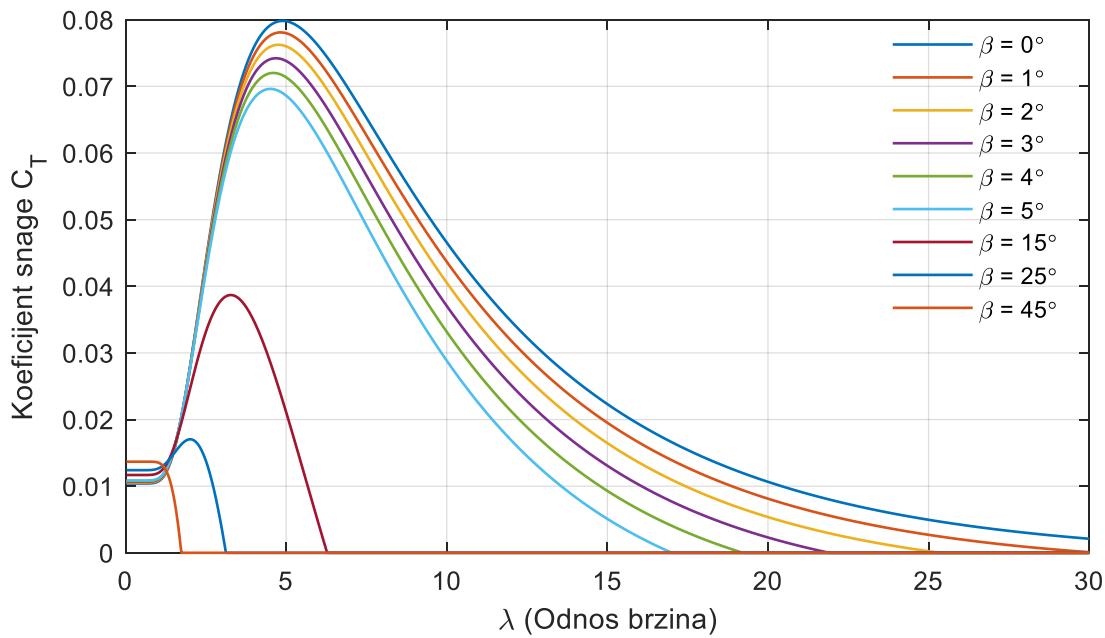
$$\lambda_i(\lambda, \beta) := \frac{1}{\lambda + 0.08\beta} - \frac{0.035}{c_{11} + c_{12}\beta^3}. \quad (132)$$

Da bi se isključile negativne vrijednosti koje funkcija može dobiti, koristi se

$$C_T(\lambda, \beta) = \bar{C}_T(\lambda, \beta) \cdot \frac{1 + sign(\bar{C}_T(\lambda, \beta))}{2}. \quad (133)$$

U ovom radu numerički eksperiment će biti vršen sa NREL 5MW turbinom, opisanom u radovima [26] i [27], gdje su parametri „c” sljedeći: $c_1 = 0.005$, $c_2 = 1.53$, $c_3 = 0.5$, $c_4 = 0.18$, $c_5 = 121$, $c_6 = 27.9$, $c_7 = 198$, $c_8 = 2.36$, $c_9 = 5.74$, $c_{10} = 11.35$, $c_{11} = 16.1$ i $c_{12} = 201$.

Na slici 23 prikazana je zavisnost analitičkog oblika funkcije $C_T(\lambda, \beta)$ od odnosa brzina λ i ugla zakriviljenosti lopatica β .



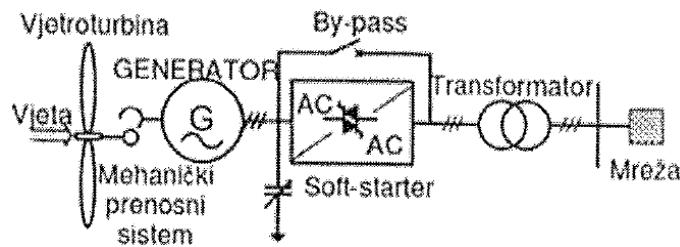
Slika 23. Zavisnost analitičkog oblika koeficijenta snage od odnosa brzina λ i ugla zakrivljenosti lopatica β

4.2. PODJELA VJETROTURBINA

Vjetroelektrane se mogu podijeliti na više načina, a uglavnom prema tipu turbine koji se koristi. Osnovna podjela je prema brzini okretanja vratila rotora generatora – na turbine sa konstantnom brzinom i promjenjivom brzinom. Poznata je i podjela turbina prema zemlji u kojoj je većinski zastupljena, pa prema tome postoje npr. Danske i Američke turbine. Još jedna od podjela bi bila prema mehaničkom prenosu snage i to na turbine sa mehaničkim razvodnikom pogona i direktnе turbine (kod kojih je vratilo rotora turbine i vratilo rotora generatora isto).

4.2.1. Vjetroturbine sa konstantnom brzinom (danski tip turbine)

Danski tip turbine bio je popularan osamdesetih godina dvadesetog vijeka, a kako su ove turbine masovno korištene u Danskoj, dobile su naziv danske turbine. Ovaj tip turbine koristi asinhronu mašinu sa kaveznim rotorom, koja se pokreće preko soft-startera za zalijetanje mašine (mašina mora početi da radi kao motor). Asinhrona mašina je preko transformatora direktno povezana na mrežu. Šema danske turbine data je na slici 24.



Slika 24. Danski tip vjetroturbine

Ovakav tip turbine zahtijeva kompenzator reaktivne energije (kondenzatorske baterije), što je veliki nedostatak. Takođe, kako se koristi konstantna brzina, ova mašina ne posjeduje

mogućnost upravljanja i ima najmanji procenat ekstraktovane električne energije iz energije vjetra. Zbog nemogućnosti upravljanja brzinom okretanja vratila rotora, Kalmanovi i slični algoritmi estimacije se ne mogu implementirati na navedenu elektranu, te ovaj tip turbine nije od interesa za dalje proučavanje.

4.2.2. Vjetroturbine sa djelimično promjenjivom brzinom

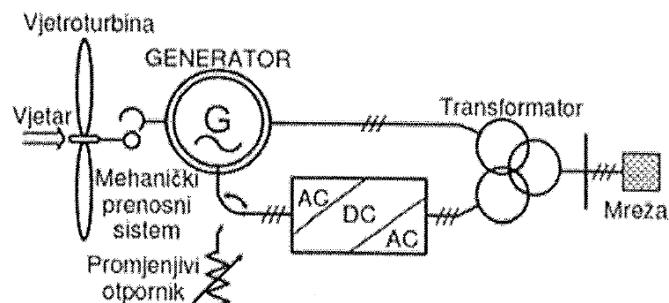
Odmah nakon danskog modela turbine nastale su turbine sa djelimično promjenjivom brzinom obrtanja i sa promjenjivom otpornošću namotaja rotora. Šema ovog tipa turbine igleda isto kao kod danskog, uz dodatak da je namotaj rotora redno povezan sa otpornikom promjenjive otpornosti (zbog čega se može koristiti samo namotana asinhrona mašina). Otpornost ovog namotaja definiše mogući opseg promjene brzine (najčešće je to samo oko 10% iznad sinhrone brzine). Pored navedenih nedostataka danskog tipa vjetroturbine, ovaj tip ima i nedostatak u tome što se na dodatnom otporniku stvaraju dodatni Džulovi gubici.

Ovaj tip vjetroturbine se koristi kada oscilacije vjetra nijesu velike (kada su oscilacije limitirane i poznate). Često se zovu i „OptiSlip“ turbine jer je klizanje asinhronre mašine ograničeno. Upravo zbog veoma ograničenog upravljanja, tehnike sa primjenom nelinearnih opserverima stanja nemaju smisla, te ni ovaj tip vjetroturbine nije od interesa za dalje proučavanje u ovom radu.

4.2.3. Vjetroturbine sa promjenjivom brzinom

1° Upotreba konvertora u kolu rotora

Šema vjetroturbine sa promjenjivom brzinom uz upotrebu konvertora u kolu rotora je prikazana na slici 25.



Slika 25. Vjetroturbina sa promjenjivom brzinom obrtanja sa upotrebom konvertora u kolu rotora

Ovaj tip vjetroturbine se primjenjuje kod dvostrano napajanog asinhronog generatora. Stator takvog generatora povezan je sa energetskom mrežom preko tronamotajnog transformatora. Tercijar tronamotajnog transformatora služi za povezivanje sa energetskim pretvaračem (AC/DC/AC). Ovaj pretvarač uzima struju iz mreže, ispravlja je u jednosmjernu, a zatim kolu rotora vraća naizmjeničnu, ali proizvoljne/kontrolisane amplitude, frekvencije i faznog stava. Energetski pretvarač kontroliše frekvenciju struje rotora, a samim tim i brzinu rotora (klizanje mašine). Kompenzator vrši i kompenzaciju reaktivne energije, čime se eliminise

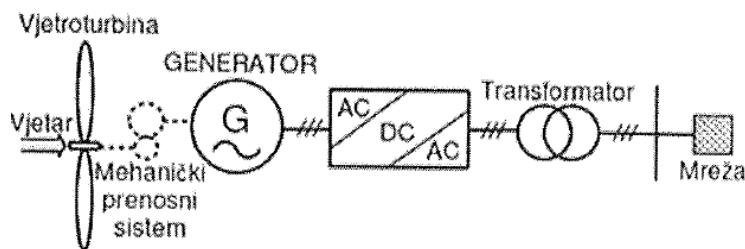
potreba za kondenzatorskim baterijama. Snaga energetskog pretvarača je najčešće oko 30% nominalne snage vjetrogeneratora.

Za ovaj tip generatora je moguće vršiti kompletno upravljanje kontrolisanjem struje rotora preko energetskog pretvarača. Ipak, za ovakav dizajn turbine je potrebno koristiti tronamotajni transformator koji dodatno poskupljuje dizajn, pa i to treba uzeti u obzir prilikom planiranja i projektovanja.

Ovaj tip vjetroturbine se može koristiti u kombinaciji sa nelinearnim opserverima stanja.

2° Stalna upotreba konvertora

Šema vjetroturbine sa promjenjivom brzinom uz stalnu upotrebu konvertora prikazana je na slici 26.



Slika 26. Vjetroturbina sa promjenjivom brzinom obrtanja, uz stalnu upotrebu konvertora

Ovaj tip turbine kompenzuje reaktivnu snagu potrebnu za rad generatora pomoću konvertora. Takođe, konvertor preko transformatora povezuje generator na mrežu. Kod ovog tipa vjetroturbine, korišćeni generator je najčešće generator sa nezavisnom pobudom (klasični sinhroni generator) ili sa permanentnim magnetima. Na ovaj dizajn je moguće implementirati i kaveznu asinhronu mašinu. Ovaj tip turbine je najpraktičniji jer konstatno koristi energetski pretvarač za upravljanje brzinom okretanja osovine rotora. Na taj način je moguće u svakom trenutku iskoristiti maksimalnu energiju iz energije vjetra.

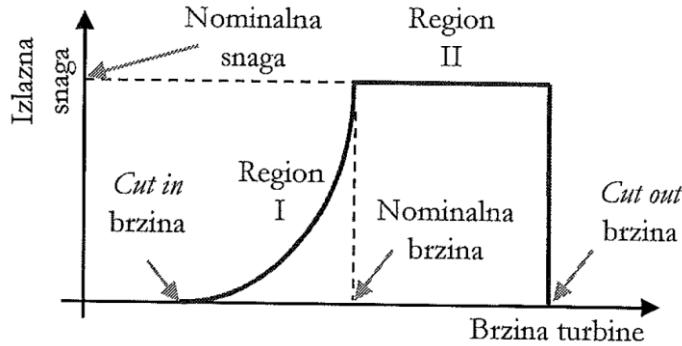
Ovaj tip turbine je najpraktičniji za upravljanje, te je na njemu moguće primijeniti nelinearne opservere stanja.

4.3. UPRAVLJANJE VJETROELEKTRANOM

Vjetroelektrane se konstruišu za određeni opseg brzine vjetra koji se pojavljuje na određenom području. Cilj upravljanja elektranom je iskorišćavanje maksimalne dostupne kinetičke energije iz vazduha, ali i zaštita konstrukcije i komponenti elektrane, kao i mreže, od oštećenja.

Zavisnost izlazne snage od brzine okretanja vratila turbine prikazana je na slici 27. Na slici, *cut-in* brzina predstavlja brzinu pri kojoj vjetrogenerator počinje da proizvodi energiju, te je prije dostizanja ove brzine turbina zakočena. Do postizanja nominalne brzine, kriva eksponencijalno raste i proizvodnja električne energije se povećava. Pri postizanju nominalne brzine, postiže se i nominalna snaga elektrane odakle će daljim rastom brzine, snaga ostajati ista.

Cut-out brzina se odnosi na brzinu okretanja vratila turbine koja bi dovela do oštećenja mehaničkih ili električnih komponenti turbine i generatora. Ovo je maksimalna projektovana brzina do koje je dozvoljen rad turbine. Bitno je napomenuti da se dizajn vjetroturbine može prilagoditi veoma velikim brzinama vjetra, međutim takav dizajn je zahtjevniji za izradu i skuplji, a veoma velike brzine vjetra nijesu česta pojava. Ispostavlja se da je isplativije konstruisati upravljački mehanizam koji će vjetroturbinu zaustaviti i odvojiti sa mreže pri veoma velikoj brzini.



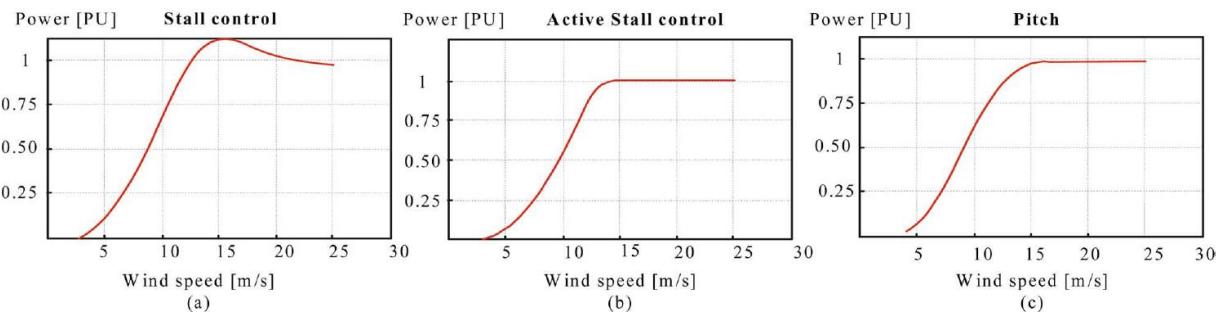
Slika 27. Zavisnost izlazne snage od brzine okretanja vratila turbine

Upravljanje vjetroelektranom se može izvršiti kontrolisanjem dvije veličine:

- Ugao zakriviljenja lopatica β ,
- Brzina okretanja vratila rotora generatora ω_g .

4.3.1. Upravljanje elektranom sa konstantnom brzinom

Za danski tip turbine, sa konstantnom brzinom okretanja vratila rotora, moguće je samo djelimično upravljanje. Na slici 28 prikazani su različite metode upravljanja elektranom konstantne brzine okretanja vratila rotora generatora [28].



Slika 28. Metode upravljanja elektranom konstantne brzine okretanja vratila rotora generatora

Na slici 28 (a) prikazan je metod upravljanja kada nije moguće okretati lopatice turbine, te se samim dizajnom lopatica reguliše izlazna snaga. Na slici 28 (b) prikazan je metod kontrole kada je okretanje lopatica turbine moguće samo djelimično, radi umanjenja brzine okretanja. Na ovaj način je moguće zaštiti komponente turbine i generatora od oštećenja. Slika 28 (c)

predstavlja metod upravljanja elektranom pomoću pune kontrole ugla zakrivljenja lopatica β . Za elektrane sa konstantnom brzinom okretanja rotora, ovo je najoptimalniji način upravljanja koji se može postići.

Vjetroelektrane sa djelimično promjenjivom ili promjenjivom brzinom obrtanja vratila rotora generatora mogu mijenjati jačinu struje rotora te samim tim mogu postići bolje upravljanje.

4.3.2. Upravljanje elektranom sa promjenjivom brzinom – MPPT metod

Sa slike 23, vidi se zavisnost koeficijenta snage (momenta) od odnosa brzina λ . Odnos brzina je definisan jednakošću (130). Uzimajući da je ω_r , ugaona brzina vratila rotora turbine, direktno srazmjerna sa ω_g , ugaonom brzinom vratila rotora generatora, zaključuje se da se upravljanjem brzinom ω_g kontroliše odnos brzina λ , a samim tim i koeficijent snage.

Odabirom odgovarajućeg odnosa brzina i odgovarajuće krive koeficijenta snage prema uglu zakretanja lopatica turbine β , moguće je maksimalno iskoristiti kinetičku energiju vjetra. Praćenje tačke maksimalne snage se naziva MPPT (*Maximum Power Point Tracking*) metod. Ovaj metod je moguće ostvariti na različite načine [28].

1° TSR kontrola

Kontrola odnosa brzina λ ($TSR = Tip Speed Ration$) se ostvaruje praćenjem brzine vjetra koja dolazi na turbinu. Brzina vjetra se mjeri uređajem anemometrom i najčešće se mjeri u jednoj tački (na vrhu tornja elektrane). Dobijena informacija sa senzora se proslijedi sistem automatskog upravljanja koji prilagođava brzinu okretanja vratila rotora generatora. Na taj način je moguće u svakom trenutku postići maksimum na krivoj koeficijenta snage i iskoristiti maksimum iz energije vjetra.

2° PSF (*Power Signal Feedback*) kontrola

Kontrola izlazne snage se može vršiti i bez upotrebe senzora brzine vjetra, upotrebom modela elektrane. Ovaj metod koristi model tako da kroz simulacije (najčešće upotrebom opservera stanja) dođe do informacije o izlaznoj snagi. Dovodeći u vezu izlaznu snagu i brzinu vjetra, moguće je podesiti brzinu generatora tako da bude iskorišćen maksimum iz energije vjetra.

3° HCS (*Hill Climbing Searching*) kontrola

Ovaj metod kontrole je veoma sličan MPPT šemama korišćenim u fotovoltažnim sistemima [28]. Princip ovog metoda je sljedeći – ukoliko se brzina turbine poveća, izlazna snaga će se takođe povećati, u suprotnom, brzinu turbine je potrebno smanjiti. Ovaj metod praćenja tačke maksimalne snage nije pogodan za velike vjetroturbine jer je na njima teško podešavati brzinu turbine za kratko vrijeme.

4° Kontrola upotrebom nelinearnih estimatora stanja

Najčešće je moguće kombinovati različite metode kako bi se ostvarilo praćenje tačke maksimalne snage. Mana svih ranije navedenih metoda upravljanja su nedovoljna preciznost anemometra ili modela vjetroturbine sa kojim se raspolaže. Kako je informacija o brzini vjetra ključna za određivanje upravljačkog signala, a jednačina koja opisuje konverziju energije vjetra u mehaničku (i kasnije električnu) je izuzetno nelinearna, zaključuje se da je potrebno koristiti nelinearne opservere stanja. Upotrebom nelinearnih opservera, moguće je smanjiti nepreciznosti modela i mjernog instrumenta, te ostvariti optimalno upravljanje.

4.3.3. Ograničenja u upravljanju

Sinhrona i asinhrona mašina se projektuju za odgovarajući jačinu struje kroz namotaje rotora. Različitoj ugaonoj brzini okretanja vratila rotora ω_g odgovara različita struja armature I_a . Za različite električne mašine, u skladu sa njihovim dizajnom postoji ograničenje određeno maksimalno dozvoljenom strujom kroz namotaj i maksimalno dozvoljenim naponom kola rotora ili statora. Ove veličine je potrebno uskladiti sa dizajnom sistema automatskog upravljanja kako se sistemu ne bi zadao upravljački signal koji bi mogao da dovede do prekoračenja maksimalnih vrijednosti i uništenja električnih ili mehaničkih komponenti elektrane.

4.4. MODEL VJETROELEKTRANE

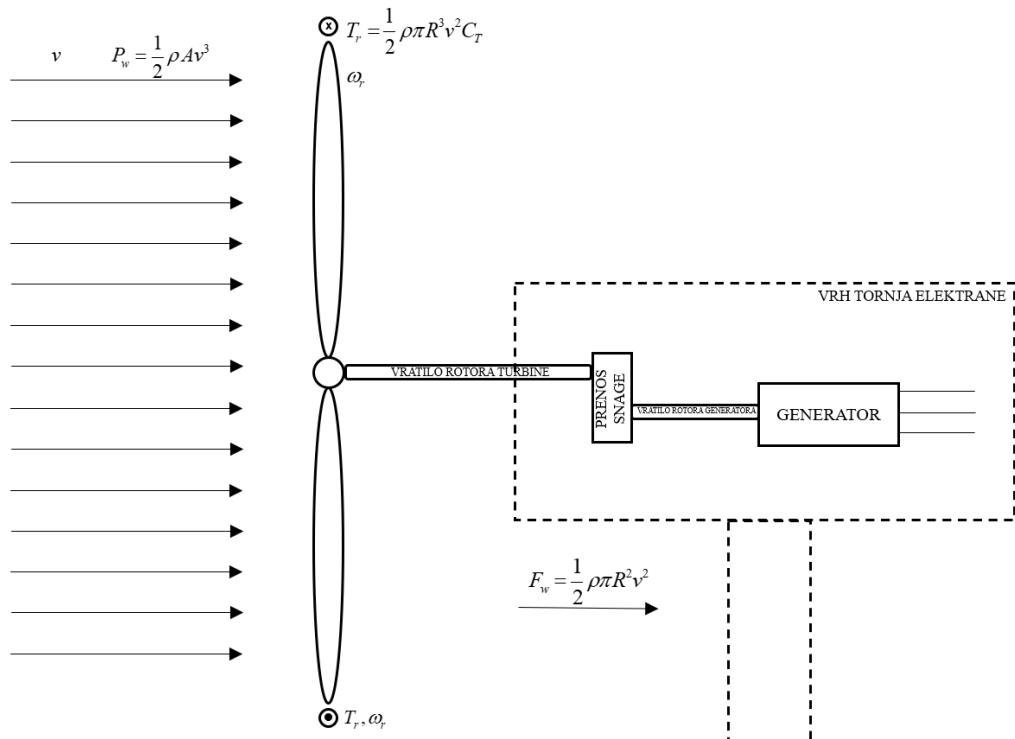
Konstruisanje matematičkog modela vjetroelektrane se vrši spajanjem aerodinamičkog, mehaničkog, električnog i drugih modela [29]. Za potrebe ovog rada, biće iskorišćeno kombinovanje aerodinamičkog i mehaničkog modela.

Glavni cilj matematičkog modela jeste dobijanje zavisnosti izlazne snage od brzine vjetra. Na taj način, moguće je postići odgovarajuće upravljanje elektranom sa ciljem da se iskoristi maksimum energije vjetra, uz minimalno opterećenje na mehaničke i električne komponente elektrane.

4.4.1. Aerodinamički model

U ukupnom modelu turbine, aerodinamički model je izuzetno nelinearan i značajno otežava proces estimacije brzine vjetra. Aerodinamički model opisuje konverziju energije vjetra u mehaničku i opisan je jednačinama (129)-(133).

Na slici 29 prikazan je šematski prikaz djelovanja energije vjetra.



Slika 29. Šematski prikaz djelovanja energije vjetra

Aerodinamički efekat djeluje na lopatice turbine i proizvodi obrtni moment vratila rotora turbine T_r , ali djeluje i na toranj elektrane koji se pod uticajem sile vjetra F_w uvija. Pravolinijska sila koju izaziva energija vjetra jednaka je

$$F_w = \frac{1}{2} \rho \pi R^2 v^2, \quad (134)$$

dok se dio koji se prenosi na toranj elektrane umanjuje za koeficijent pravolinijske sile C_F , koji ima slična svojstva kao i koeficijent obrtnog momenta (snage). Sila koja djeluje na toranj jednaka je

$$F_T = \frac{1}{2} \rho \pi R^2 v^2 C_F. \quad (135)$$

Mjerni instrument kojim se mjeri brzina vjetra, anemometar, postavlja se na vrh tornja, i mjeri brzinu vjetra u jednoj tački. Ipak, površina na koju djeluje vjetar obuhvata krug čiji je poluprečnik dužina lopatice turbine. Kako lopatica turbine može biti dugačka preko 100 metara, brzina vjetra kroz površinu $R^2 \pi = 100^2 \cdot \pi = 31416 m^2$ nije jednaka i može imati blage varijacije. Upravo takve varijacije je moguće modelovati bijelim šumom.

Prilikom modelovanja, upravo iz navedenog razloga, praksa je da se koristi tzv. efektivna brzina vjetra. Ova veličina se razlikuje od brzine vjetra u jednoj tački i predstavlja srednju brzinu vjetra kroz površinu kruga čiji je poluprečnik dužina lopatice turbine. Vrijednost efektivne brzine vjetra je vrijednost koja utiče na prenos energije vjetra i formiranje izlazne snage.

4.4.2. Mehanički model

Modeli vjetroelektrana mogu imati i do dvadeset stepeni slobode [27], čime obuhvataju kompletну dinamiku elemenata elektrane. Za potrebe estimacije efektivne brzine vjetra nije potrebno poznavati kompletну dinamiku procesa, te se odgovarajuće veličine mogu zanemariti. Iz ovog razloga, upravljački dizajn turbine treba da bude što jednostavniji, i da obuhvati dominantne veličine koje utiču na dinamiku procesa.

Uticaj pretvarača povezanog na generator neće biti analiziran u ovom radu, već će biti proučeni procesi do formiranja obrtnog momenta vratila rotora generatora. Obrtni moment omogućava okretanje vratila i indukovanje električne energije u namotajima statora, bilo da se radi o sinhronoj ili o asinhronoj mašini. Što je veći obrtni moment, veća je proizvedena električna energija.

Uloga elektroenergetskog pretvarača (konvertora) je opisana u poglavlju 4.2.3. Za dobijanje ukupne izlazne snage, potrebno je oduzeti snagu koja se troši na rad konvertora, kao i snagu transformatora, koji povezuje generator na mrežu od izlazne snage generatora.

Pored svega navedenog, u modelu korišćenom u ovom radu, smatraće se da je dinamika konvertora zanemarljiva, tj. da se proces podešavanja ugaone brzine vratila rotora generatora vrši trenutno, kada konvertor pošalje odgovarajući električni signal.

U opštem slučaju, mehanički model turbine izведен je iz Njutnovog drugog zakona za kružno i pravolinijsko kretanje i predstavljen je matričnom diferencijalnom jednačinom

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{z}), \quad (136)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{f}_r(\mathbf{z}) + \mathbf{f}_g. \quad (137)$$

U jednačini (136) figurišu

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_T + N \cdot m_L & N \cdot m_L & 0 & 0 \\ N \cdot m_L & N \cdot m_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_g \end{bmatrix}, \quad (138)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N \cdot d_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_s & -d_s \\ 0 & 0 & -d_s & d_s \end{bmatrix} \mathbf{i} \quad (139)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N \cdot k_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_S & -k_S \\ 0 & 0 & -k_S & k_S \end{bmatrix}. \quad (140)$$

Promjenjive koje se nalaze u matricama \mathbf{M} , \mathbf{D} i \mathbf{K} su definisane kao mase, koeficijenti trenja i sile inertnosti (ekvivalentno sili zatezanja opruge) za toranj (indeks „T”), lopatice (indeks „L“) i svedene vrijednosti na generatoru i turbini (indeks „S“). Sve vrijednosti su prikazane na slikama 30, 31 i 32.

U jednačini (136), nalazi se vektor promjenjivih $\mathbf{z} = [v \quad \omega_r \quad \beta]^T$. Navedene promjenjive su fizičke veličine koje utiču na koeficijente C_T (iz jednačine (129)) i C_F (iz jednačine (135)). Pomjeraj tornja y_T , pomjeraj lopatica y_L , ugaoni pomjeraj vratila rotora turbine θ_r i ugaoni pomjeraj vratila rotora generatora θ_g grupisani su u vektor $\mathbf{q} = [y_T \quad y_L \quad \theta_r \quad \theta_g]^T$. Pravolinijska sila koja djeluje na komponente elektrane $F_T(\mathbf{z})$ opisana izrazom (135), obrtni moment vratila rotora turbine $T_r(\mathbf{z})$ i obrtni moment vratila rotora generatora T_g grupisani su u vektor sila

$$\mathbf{f}_r(\mathbf{z}) = [F_T(\mathbf{z}) \quad F_T(\mathbf{z}) \quad T_r(\mathbf{z}) \quad 0]^T, \quad (141)$$

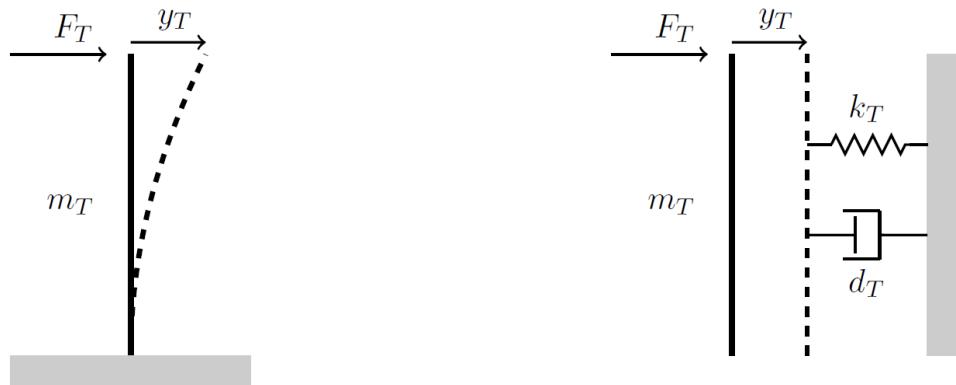
$$\mathbf{f}_g(\mathbf{z}) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad -T_g]^T. \quad (142)$$

Obrtni moment vratila rotora generatora će se smatrati upravljivom veličinom koju je moguće podešavati pomoću konvertora.

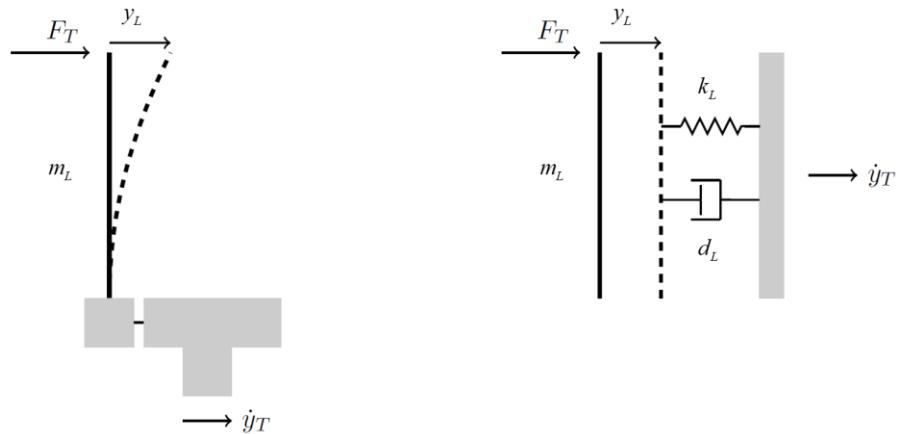
Dodatno, u mehanički model turbine je potrebno dodati jednačinu upravljanja uglom zakretanja lopatica β . Naime, željena vrijednost ugla zakretanja se ne može postići u istom trenutku, već je potrebno proći odgovarajući dinamički proces da bi se željena vrijednost dostigla. Dinamika ovog procesa se može opisati kašnjenjem prvog reda, jednačinom

$$\dot{\beta} = -\frac{1}{\tau_\beta} \beta + \frac{1}{\tau_\beta} \beta_d, \quad (143)$$

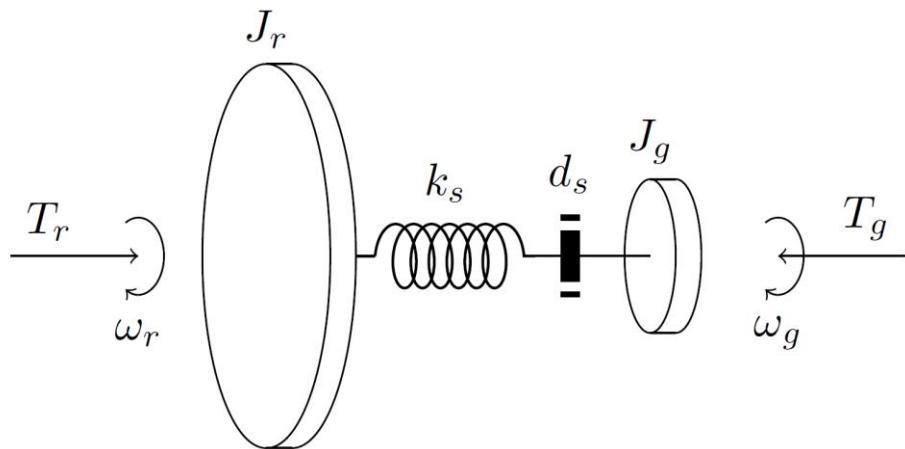
gdje je β_d željena vrijednost ugla zakretanja lopatica, a τ_β vremensko kašnjenje.



Slika 30. Pomjeraj, masa i koeficijenti sile trenja i inertnosti tornja



Slika 31. Pomjeraj, masa i koeficijent sile trenja i inertnosti lopatica



Slika 32. Moment inercije vratila rotora turbine i generatora. Svedeni koeficijenti trenja i sile inercije

4.4.3. Model u prostoru stanja

Kako je ranije naglašeno, ne utiče isto na efektivnu brzinu vjetra svaka fizička veličina pomenuta u izvođenju aerodinamičkog i mehaničkog modela elektrane. Pravolinijska sila F_T , koja djeluje na lopatice i toranj, praveći horizontalni pomjeraj ima veoma mali, gotovo zanemarljiv uticaj na estimaciju brzine vjetra. Iz tog razloga, u modelu prostora stanja koji će biti

korišćen za numerički eksperiment u poglavlju 5, pravolinijska sila neće biti uzeta u obzir. Njeno djelovanje biće kompenzovano pojačavanjem „nesigurnosti“ u izvedeni model.

Zanemarujući pravolinijske komponente, matrice mase, koeficijenta trenja i inercije imaju oblike

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} J_r & 0 \\ 0 & J_g \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_s & -d_s \\ -d_s & d_s \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_s & -k_s \\ -k_s & k_s \end{bmatrix}. \quad (144)$$

Vektori sile imaju oblike

$$\mathbf{f}_r(\mathbf{z}) = [T_r(\mathbf{z}) \ 0]^T \text{ i } \mathbf{f}_g(\mathbf{z}) = [0 \ -T_g]^T, \quad (145)$$

dok vektor \mathbf{q} ima oblik

$$\mathbf{q} = [\theta_r \ \theta_g]^T. \quad (146)$$

Vršeći matrično množenje prema jednačinama (136) i (137), i uređenjem izraza, dobija se da je

$$\ddot{\theta}_r = -\frac{d_s}{J_r}\dot{\theta}_r + \frac{d_s}{J_r}\dot{\theta}_g - \frac{k_s}{J_r}\theta_r + \frac{k_s}{J_r}\theta_g + \frac{1}{J_r} \cdot T_r, \quad (147)$$

$$\ddot{\theta}_g = \frac{d_s}{J_g}\dot{\theta}_r - \frac{d_s}{J_g}\dot{\theta}_g + \frac{k_s}{J_g}\theta_r - \frac{k_s}{J_g}\theta_g - \frac{1}{J_g} \cdot T_g. \quad (148)$$

Promjena brzine vjetra može se matematički zapisati kao

$$\dot{v} = 0, \quad (149)$$

ili diferencijalnom jednačinom prvog reda sa određenim kašnjenjem. Ova jednačina se ne mora uvrstiti u model prostora stanja, već se može uključiti u jednačine ukoliko je to potrebno za određeni nelinearni estimator stanja.

Uzimajući u obzir jednačine (143), (147) i (148), vektor promjenjivih stanja se može definisati kao

$$\mathbf{x} = [\theta_s \ \dot{\theta}_r \ \dot{\theta}_g]^T, \quad (150)$$

$$\theta_s = \theta_r - \theta_g. \quad (151)$$

Na ovaj način, jednačine koje opisuju model prostora stanja su

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_3, \quad (152)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k_s}{J_r}x_1 - \frac{d_s}{J_r}x_2 + \frac{d_s}{J_r}x_3 + \frac{1}{J_r} \cdot T_r, \quad (153)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{k_s}{J_g}x_1 + \frac{d_s}{J_g}x_2 - \frac{d_s}{J_g}x_3 - \frac{1}{J_g} \cdot u_1. \quad (154)$$

Upravljive veličine definisane su kao

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} T_g & \beta_d \end{bmatrix}^T, \quad (155)$$

pri čemu se druga upravljava veličina odnosi na upravljanje uglom zakretanja lopatica turbine i ne modeluje se sa ostalim promjenjivim stanja, već odvojeno, a dinamika promjene ugla opisana je jednačinom (143).

U jednačini (153) koja se odnosi na stanje „2“ figuriše veličina T_r koja je definisana jednakostima (129)-(133) i funkcija je promjenjivih stanja, brzine vjetra i ugla zakretanja lopatica turbine $T_r = T_r(x_2, v, \beta)$. Ukoliko se brzina v odredi kao četvrta promjenjiva stanja, onda će važiti $T_r = T_r(x_2, x_4, \beta)$, ali se četvrta promjenjiva stanja može odrediti i direktno kao $x_4 = T_r$, za koju bi važilo $\dot{x}_4 = 0$ ukoliko estimator to podržava.

U diskretnom obliku, jednačine (152)-(154) imaju oblik

$$x_1(k+1) = (x_2(k) - x_3(k)) \cdot T + x_1(k), \quad (156)$$

$$x_2(k+1) = \left(-\frac{k_s}{J_r}x_1(k) - \frac{d_s}{J_r}x_2(k) + \frac{d_s}{J_r}x_3(k) + \frac{1}{J_r} \cdot T_r(k) \right) \cdot T + x_2(k), \quad (157)$$

$$x_3(k+1) = \left(\frac{k_s}{J_g}x_1(k) + \frac{d_s}{J_g}x_2(k) - \frac{d_s}{J_g}x_3(k) - \frac{1}{J_g} \cdot u_1(k) \right) \cdot T + x_3(k). \quad (158)$$

5. REZULTATI SIMULACIJA

5.1. POSTAVKA EKSPERIMENTA

Numerički eksperimenti izvršeni su u softverskom paketu MATLAB®. Za sve izvršene eksperimente, perioda odabiranja postavljena je na vrijednost $T = 0.01\text{s}$. Vrijeme estimacije je 10s ili 50s , u zavisnosti od eksperimenta.

Da bi se pokazale različite performanse filtara u različitim uslovima i da bi se izveli zaključci o upravljanju vjetroelektranom primjenom nelinearnih opservera, izvršene su simulacije u četiri različita slučaja. Razmatran je rad ranije izvedenih algoritama i njihova primjenjivost u upravljanju vjetroelektranom. Faktori koji mogu uticati na rad filtara koji su uzeti u obzir prilikom izbora simulacije su brzina promjene efektivne brzine vjetra i broj korišćenih senzora. Razmatrani su sljedeći slučajevi:

- Brza promjena efektivne brzine vjetra: DD1, DD2, EKF i KF-NR (linearni Kalmanov filter sa Njutn-Rapsonovim metodom)
- Spora promjena efektivne brzine vjetra: DD1, DD2, EKF i KF-NR
- Estimacija sa jednim senzorom: DD1, DD2 i EKF
- Estimacija sa dva senzora: DD1, DD2 i EKF

Prva dva eksperimenta upoređuje KF-NR filter, u odnosu na ostale algoritme. U ovim eksperimentima koristiće se dva senzora.

Eksperimenti u kojima se ne koristi KF-NR filter analizira mogućnosti upravljanja vjetroelektranom sa jednim i sa dva senzora.

5.1.1. Efektivna brzina vjetra

Promjena efektivne brzine vjetra analizirana je u dva različita slučaja:

- Brzina vjetra se mijenja brzo. Dinamika promjene brzine je opisana kašenjenjem nakon kojeg vjetar dostiže drugu vrijednost. Tada je brzina vjetra opisana na sljedeći način

$$\dot{v} = -\frac{1}{\tau_v} v + \frac{1}{\tau_v} v_{\text{novo}} . \quad (159)$$

Kašnjenje je odabранo kao $\tau_v = 0.3\text{s}$. Vrijednosti koje uzima brzina vjetra kroz vrijeme simulacije su zadate vektorom $vrijednosti = [17 \ 22 \ 25 \ 32 \ 25 \ 15]$.

- Brzina vjetra se mijenja sporo, dinamika promjene opisana je jednačinom (159), Kašnjenje je odabранo kao $\tau_v = 2\text{s}$. Vrijednosti koje uzima brzina vjetra kroz vrijeme simulacije zadate su istim vektorom kao pri brzoj promjeni.

Tako zadatoj brzini vjetra dodat je signal $0.1 \cdot randn$ (bijeli šum varijanse 0.01) u svakom diskretnom odbirku, kako bi simulirani signal na što bolji način preslikao stvarnu brzinu vjetra.

Uobičajena *cut-out* brzina vjetra je $v_{cut-off} = [25-30] \frac{m}{s}$, pa je u ovom slučaju uzeto da je

$$v_{cut-off} = 30 \frac{m}{s}, \text{ što je implementirano u upravljanje elektranom.}$$

5.1.2. Definisanje parametara elektrane

Vjetroelektrana korišćena u eksperimentima je opisana u radovima [26] i [27]. Radi se o NREL 5MW vjetroturbini, čiji je koeficijent snage određen izrazima (131)-(133), sa koeficijentima „c“ definisanim u poglavlju 4.1.

$$\text{Parametri turbine su sljedeći: } N = 3 \text{ (broj lopatica turbine)}, R = 63m, \rho = 1.225 \frac{kg}{m^3}, J_r = 38759227 kg \cdot m^2, J_g = 5025347 kg \cdot m^2, k_s = 867637000 Nm, d_s = 6215000 Nms \text{ i } \tau_\beta = 4s.$$

Napomena: Parametri su svedeni na stranu generatora, tj. prenosni odnos mehanizma zupčanika je uzet u obzir. Takođe, parametri k_s i d_s su svedeni kao zajednički za stranu rotora turbine i rotora generatora.

5.1.3. Definisanje modela u prostoru stanja za svaki pojedinačni estimator

1° Linearni Kalmanov filter sa Njutn-Rapsonovim metodom

Kako linearni Kalmanov algoritam ne može estimirati nelinearne jednačine, to je potrebno postaviti obrtni moment rotora turbine T_r kao četvrto promjenjivu. U ovom slučaju je vektor promjenjivih stanja

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta_s & \dot{\theta}_r & \dot{\theta}_g & T_r \end{bmatrix}^T. \quad (160)$$

Dinamika promjenjivih stanja sistema opisana je jednačinama (156)-(158), uz jednačinu za četvрто stanje

$$x_4(k+1) = x_4(k). \quad (161)$$

Kada se izvrši estimacija stanja, potrebno je odrediti brzinu vjetra primjenom Njutn-Rapsonovog metoda. Efektivna brzina vjetra može se odrediti iz estimirane vrijednosti T_r i to definisanjem funkcije kao u (124). Na taj način definisana je funkcija

$$f(v) = T_{r_estimirano} - \frac{1}{2} \rho v^2 \pi R^3 C_T(\lambda(v), \beta) = 0, \quad (162)$$

i iz nje se može dobiti vrijednost efektivne brzine vjetra.

Prilikom estimacije, broj iteracija Njutn-Rapsonovog iterativnog algoritma postavljen je na 15.

2° EKF, DD1 i DD2 algoritmi

Za nelinearne algoritame nije potrebno rješavati nelinearnu jednačinu već se ona može intergrisati direktno uz ostale jednačine. Iz tog razloga se kao četvrta promjenjiva stanja bira efektivna brzina vjetra. Vektor promjenjivih stanja je

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta_s & \dot{\theta}_r & \dot{\theta}_g & v \end{bmatrix}^T, \quad (163)$$

a jednačina koja opisuje dinamiku četvrte promjenjive stanja ostaje ista kao za linearni Kalmanov filter (161).

5.1.4. Šumovi pri estimaciji i parametri filtara

1° Šum stanja

Kako je prikazani sistem izrazito nelinearan, sama nelienarnost predstavlja šum stanja, te on nije direktno inkorporiran u simulacioni model. Takođe, četvrti stanje je dodato „vještački“, jer ne postoji jednačina koja direktno opisuje brzinu vjetra izraženu preko ostalih promjenjivih. To znači da je pretpostavljeni šum koji djeluje na navedeno stanje veoma jak. Različite vrijednosti matrice Q navedene su u pojedinačnim numeričkim eksperimentima.

2° Šum mjerena

Da bi se utvrdila efektivna brzina vjetra korišćen je **anemometar** koji neposredno mjeri brzinu na vrhu tornja i **tahometar** za mjerjenje ugaone brzine obrtanja vratila rotora generatora (može se koristiti i hall-ov senzor ili optički enkoder). Šum mjerena anemometrom predstavljen je bijelim šumom srednje vrijednosti 0 i varijanse 0.25, dok je šum mjerena ugaone brzine predstavljen bijelim šumom srednje vrijednosti 0 i varijanse 0.01. Uzimajući realne vrijednosti varijansi, matrica varijanse šuma određena je kao

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \text{za šum mjerena ugaone brzine;} \\ \text{za šum mjerena anemometrom.} \end{array} \quad (164)$$

3° Tunovanje filtara

Vrijednosti matrica Q i R koje su korišćene u krajnjem modelu rezultat su podešavanja tj. tunovanja filtara. Podešavanje matrice R izvršeno je prema jačini varijanse šuma koji djeluje na mjerni instrument (vrijednosti matrice R podešene su kao jednake poznatoj varijansi šuma). Ova vrijednost može se odrediti prilično precizno prije pokretanja simulacija. Sa druge strane, zbog izrazite nelinearnosti modela vjetroelektrane i nepredvidivosti fluktuacija brzine vjetra u vremenu, vrijednost matrice Q dobijena je na osnovu više izvršenih simulacionih eksperimenata. Ispostavlja se da je model vjetroelektrane veoma osjetljiv, te i veoma mala promjena vrijednosti matrice Q može dovesti do divergencije algoritama. Ipak, nakon što se jednom utvrdi vrijednost

koja daje optimalan rezultat (vrijednost koja kompenzuje grešku napravljenu linearizacijom Tejlorovog reda ili Stirlingove interpolacije), kao i grešku aproksimacija korišćenih u samom modelu, moguće je postići odgovarajuće upravljanje elektranom.

5.1.5. Upravljanje

Upravljanje elektranom izvršeno je na način da se dobije maksimalan izlazni obrtni moment (tj. maksimalna izlazna električna snaga), uzimajući u obzir ograničenje elektrane u električnom i mehaničkom smislu. Ukoliko brzina vjetra dostigne vrijednost iznad $v_{cut-off} = 30 \frac{m}{s}$ elektrana će početi da mijenja ugao zakretanja lopatica prema $\beta = 90^\circ$ (prema dinamici opisanoj izrazom (143)) i podesiće vrijednost odnosa brzina na $\lambda = 3$. Upravljanje odnosom brzina regulisano je upotreborom PI regulatora sa vrijednostima $K_p = -4.379 \cdot 10^6$ i $K_i = -9.985 \cdot 10^6$.

Pri normalnim okolnostima, kada elektrana nema ograničenja, vrijednosti će se podesiti na $\lambda = 4.5$ i $\beta = 5^\circ$.

Napomena: Optimalna vrijednost odnosa brzina λ određena je na osnovu grafika sa slike 23.

5.2. REZULTATI EKSPERIMENTA

5.2.1. Brza promjena efektivne brzine vjetra: DD1, DD2, EKF i KF-NR

Izvođenjem numeričkog eksperimenta prema postavci navedenoj u poglavlju 5.1. za slučaj sa brzom promjenom efektivne brzine vjetra dobijen je rezultat estimacije predstavljen na slici 33. Vrijeme estimacije postavljeno je na 50 sekundi. Vrijednost matrice varijanse šuma stanja za filtere DD1, DD2 i EKF su

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^9 \end{bmatrix}, \quad (165)$$

a vrijednost za linearni Kalmanov filter sa Njutn-Rapsonovim metodom je

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 10^{-10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \cdot 10^{11} \end{bmatrix}. \quad (166)$$

Neka je greška estimacije u diskretnom trenutku k označena sa $e_k = x_{\text{stvarno}_k} - x_{\text{estimirano}_k}$. Srednja kvadratna greška estimacije (SKG) stanja sistema određena je kao suma kvadrata greške

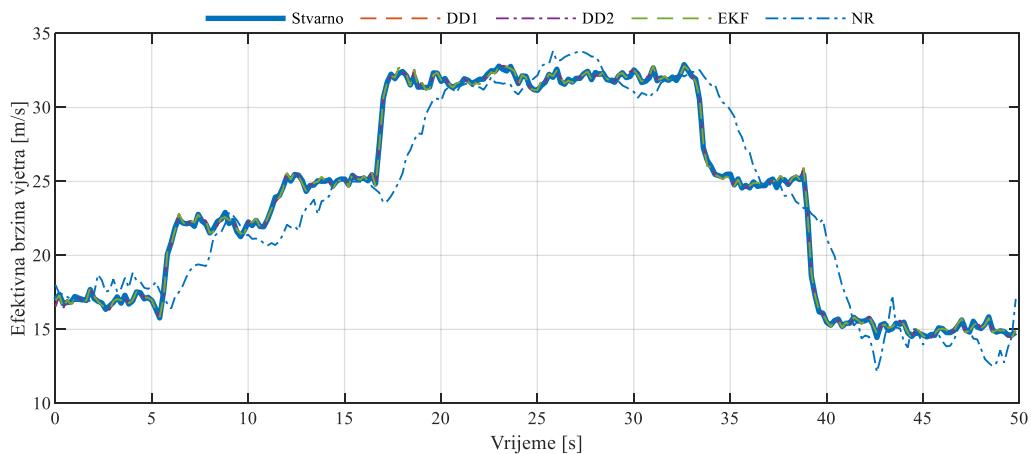
u svakom diskretnom odbirku simulacije podijeljena sa ukupnim brojem odbiraka, tj. ukoliko postoji n diskretnih odbiraka, SKG je određena izrazom

$$SKG = \frac{\sum_{k=1}^n e_k^2}{n}. \quad (167)$$

Srednje kvadratne greške estimacije prikazane su u tabeli 1.

Tabela 1. Srednja kvadratna greška estimacije efektivne brzine vjetra

Tip filtra	DD1	DD2	EKF	NR
Srednja kvadratna greška estimacije efektivne brzine vjetra	0.1561	0.1561	0.1561	5.6746



Slika 33. Estimacija brze promjene, uključujući poređenje sa NR metodom

Sa slike 33 i iz tabele 1 primjećuje se da filteri DD1, DD2 i EKF prate promjene brzine vjetra na odgovarajući način uz minimalnu grešku estimacije, dok linearni filter sa NR metodom nije u mogućnosti da isprati dinamiku promjene i pravi veću grešku estimacije.

Iz tabele 1, a ni sa slike, nije moguće vidjeti razliku greške koju prave filtri EKF, DD1 i DD2. Radi poređenja performansi ova tri filtra, izvršena je dopunska analiza greški koju prave različiti filtri. Razlika greški prikazana je u tabeli 2.

Tabela 2. Razlika SKG filtera DD1, DD2 i EKF pri estimaciji

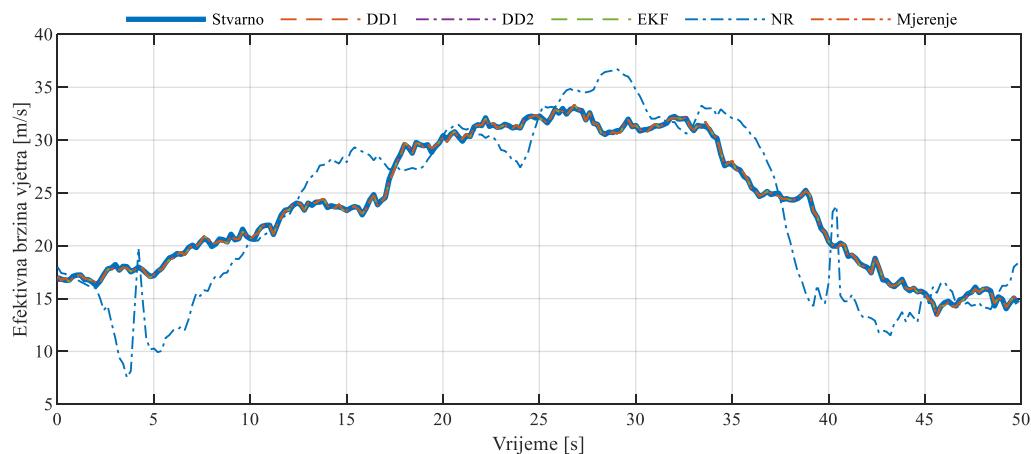
$SKG_{DD1} - SKG_{DD2}$	$SKG_{DD1} - SKG_{EKF}$	$SKG_{DD2} - SKG_{EKF}$
-3.8164e-17	-6.8048e-08	-6.8048e-08

Iz tabele 2 vidi se da filtri DD1 i DD2 vrše estimaciju gotovo na isti način, sa razlikom u SKG reda 10^{-17} , pri čemu DD1 daje neznatno bolji rezultat. Oba filtra daju bolju estimaciju od EKF-a, pri čemu se razlika vidi tek u osmoj decimali.

Zbog velike greške estimacije, zaključuje se da linearni Kalmanov filter u kombinaciji sa Njutn-Rapsonovim metodom nije moguće koristiti za složenije tehnike upravljanja, te da nije praktično koristiti ovu tehniku u realnom slučaju.

5.2.2. Spora promjena efektivne brzine vjetra: DD1, DD2, EKF i KF-NR

Izvođenjem numeričkog eksperimenta prema postavci navedenoj u poglavljiju 5.1. za slučaj sa sporom promjenom efektivne brzine vjetra dobijen je rezultat estimacije predstavljen na slici 34. Vrijeme estimacije postavljeno je na 50 sekundi. Vrijednost matrice varijanse šuma stanja za filtre DD1, DD2 i EKF određena je izrazom (165), a za linearni Kalmanov filter sa Njutn-Rapsonovim metodom izrazom (166).



Slika 34. Estimacija spore promjene, uključujući poređenje sa NR metodom

Srednje kvadratne greške estimacije, dobijene prema izrazu (167), prikazane su u tabeli 3.

Tabela 3. Srednja kvadratna greška estimacije efektivne brzine vjetra

Tip filtra	DD1	DD2	EKF	NR
Srednja kvadratna greška estimacije efektivne brzine vjetra	0.1429	0.1429	0.1429	14.4016

Kao i u prethodnom slučaju, greška koju prave filtri EKF, DD1 i DD2 je jako mala. Radi poređenja performansi ova tri filtra, izvršena je dopunska analiza greški koju prave različiti filtri. Razlika greški prikazana je u tabeli 4.

Tabela 4. Razlika SKG filtara DD1, DD2 i EKF pri estimaciji

$SKG_{DD1} - SKG_{DD2}$	$SKG_{DD1} - SKG_{EKF}$	$SKG_{DD2} - SKG_{EKF}$
1.9429e-16	2.3654e-06	2.3654e-06

Iz tabele 4 vidi se da filtri DD1 i DD2 vrše estimaciju gotovo na isti način, sa razlikom u SKG reda 10^{-16} , pri čemu DD2 daje neznatno bolji rezultat. Oba filtra daju lošiju estimaciju od EKF-a, pri čemu se razlika vidi tek u šestoj decimali.

Sa slike 34 i iz tabele 3 primjećuje se da KF-NR filter ne može ispratiti promjene brzine vjetra u vremenu čak ni pri sporijoj promjeni što potvrđuje da ovaj tip filtracije treba koristiti samo pri teorijskoj analizi, dok u praksi nije primjenjiva.

Prva dva eksperimenta pokazala su da KF-NR metod može izvršiti estimaciju brzine, ali da su dobijeni rezultati mnogo lošiji nego kod ostalih filtera i da je prilikom projektovanja upravljanja potrebno iskoristiti neki od preostala tri nelinearna opservera stanja. Naredna dva eksperimenta biće izvršena bez razmatranja KF-NR filtra.

5.2.3. Estimacija sa jednim senzorom: DD1, DD2 i EKF

Izvođenjem numeričkog eksperimenta prema postavci navedenoj u poglavlju 5.1. za slučaj sa brzom promjenom efektivne brzine vjetra i sa jednim korišćenim senzorom (tahometrom), dobijen je rezultat estimacije predstavljen na slici 35. Vrijeme estimacije postavljeno je na 10 sekundi. Vrijednost matrice varijanse šuma stanja za različite filtre predstavljena je u tabeli 5. Vrijednosti pojedinačnih matrica dobijene su *tunovanjem* (podesavanjem) estimatora stanja.

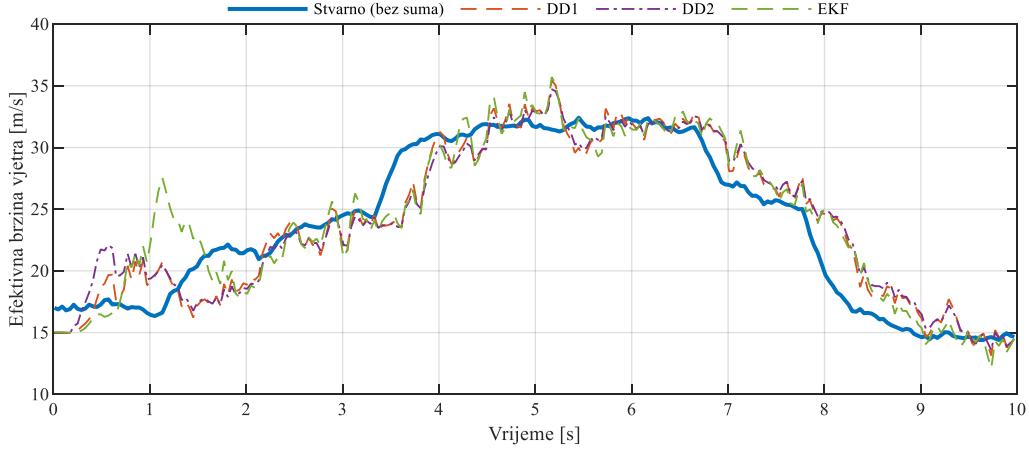
Tabela 5. Vrijednosti matrice varijanse greške šuma stanja

Vrijednosti matrice varijanse greške šuma stanja			
DD1	DD2	EKF	
$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 10^m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2e-1 \end{bmatrix}, \quad m = -8$	$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 10^m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1e3 \end{bmatrix}, \quad m = -10$	$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 10^m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1e-1 \end{bmatrix}, \quad m = -10$	

Srednje kvadratne greške estimacije, dobijene prema izrazu (167), prikazane su u tabeli 6.

Tabela 6. Srednje kvadratne greške estimacije različitih filtera

Srednja kvadratna greška /Tip filtra	DD1	DD2	EKF
Stanje x_1	1.5404e-06	1.4341e-06	1.1537e-05
Stanje x_2	8.2409e-04	8.2576e-04	0.0020
Stanje x_3	6.6483e-04	6.3441e-04	0.0018
Stanje x_4 (ef. brzina vjetra)	5.6136	6.5567	7.1762

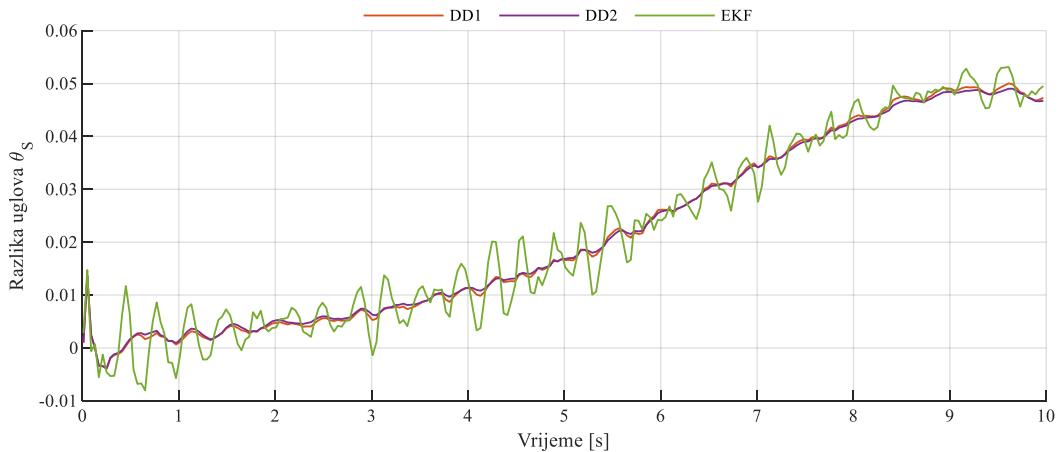


Slika 35. Estimacija sa jednim senzorom (sa tachometrom)

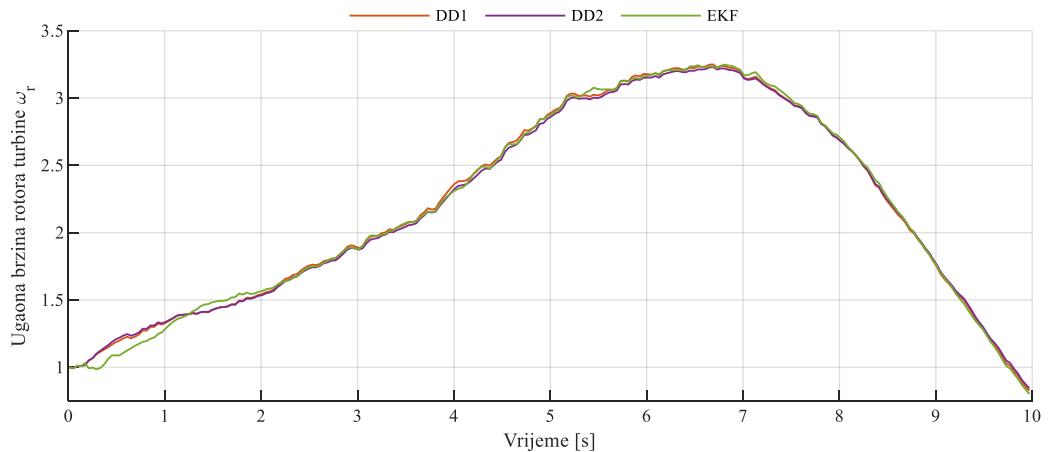
Sa slike 35 i iz tabele 6 primjećuje se da je greška estimacije efektivne brzine vjetra u ovom slučaju velika i da estimirana brzina značajno odstupa od stvarne. Dodatno, zbog uslova perzistentnosti eksitacije [30], upravljanje nije bilo moguće izvesti na odgovarajući način kako je bilo objašnjeno u poglavlju 5.1.5. Ugao β bilo je nemoguće postaviti na vrijednost 90° jer u tom slučaju elektrana ne proizvodi električnu energiju i upravljački signal ima vrijednost 0, što onemogućava estimatoru da tačno odredi efektivnu brzinu vjetra. U skladu sa tim, ugao β postavljen je na vrijednost 5° i nije mijenjan u toku upravljanja.

Zbog greške u estimaciji trenutak stvarnog dostizanja *cut-out* brzine i trenutak kada estimatori dobiju tu informaciju nije isti. U praksi, ukoliko bi se uspostavilo ovakvo upravljanje, sistem bi nepotrebno bio izložen prevelikoj brzini u određenom vremenskom intervalu što bi nakon određenog perioda dovelo do oštećenja mehaničkih i električnih komponenti.

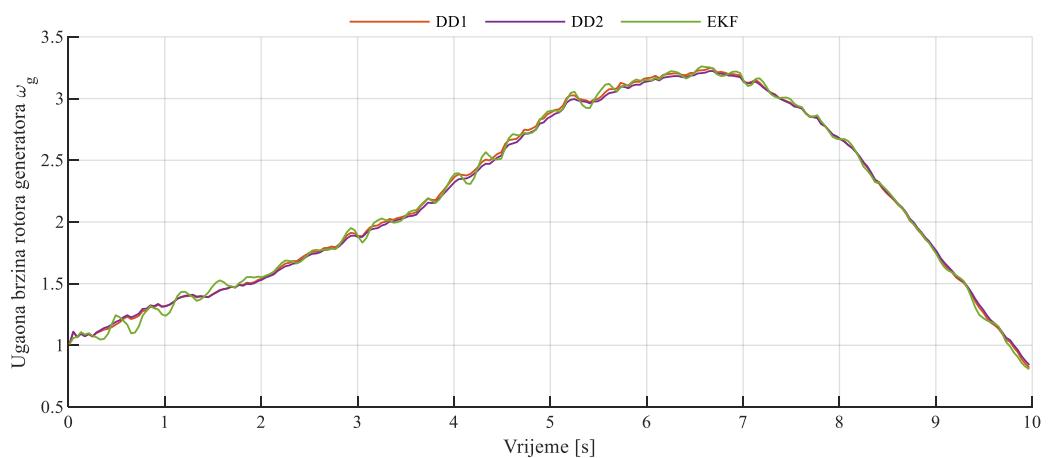
Estimacije stanja x_1 , x_2 i x_3 prikazane su na slikama 36, 37 i 38, respektivno.



Slika 36. Estimacija stanja x_1

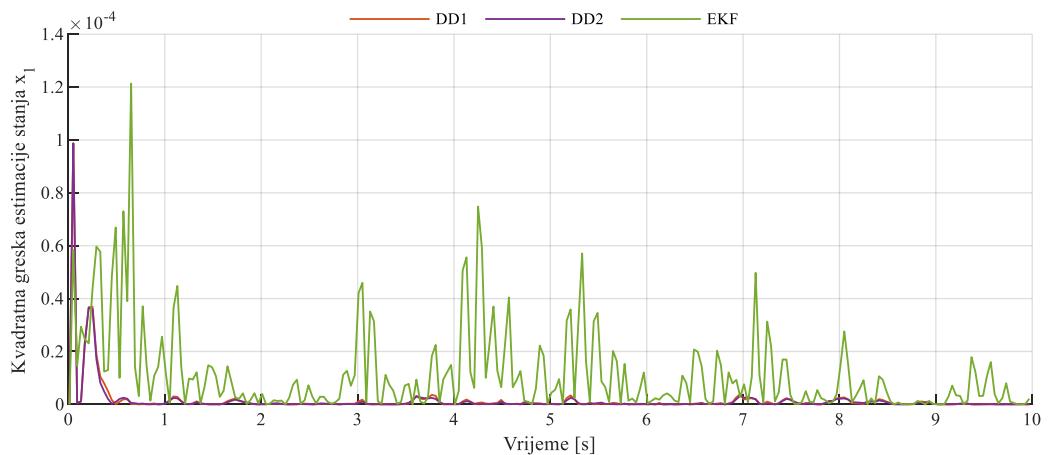


Slika 37. Estimacija stanja x_2

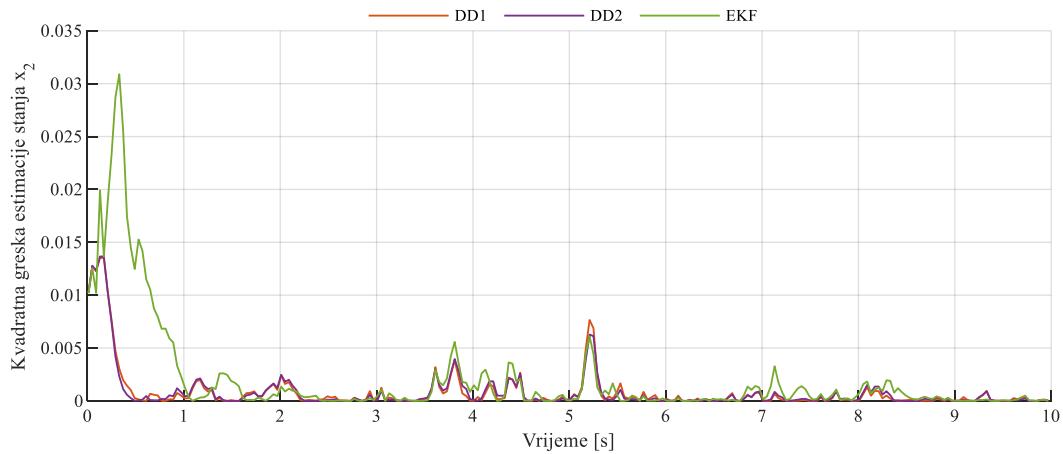


Slika 38. Estimacija stanja x_3

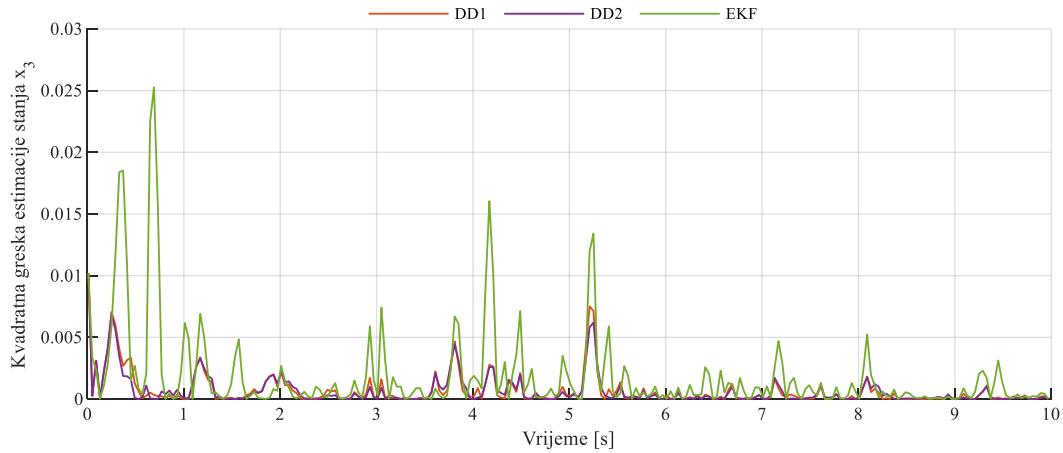
Kvadratne greške u vremenu za stanja x_1 , x_2 , x_3 i x_4 prikazane su na slikama 39, 40, 41 i 42 respektivno.



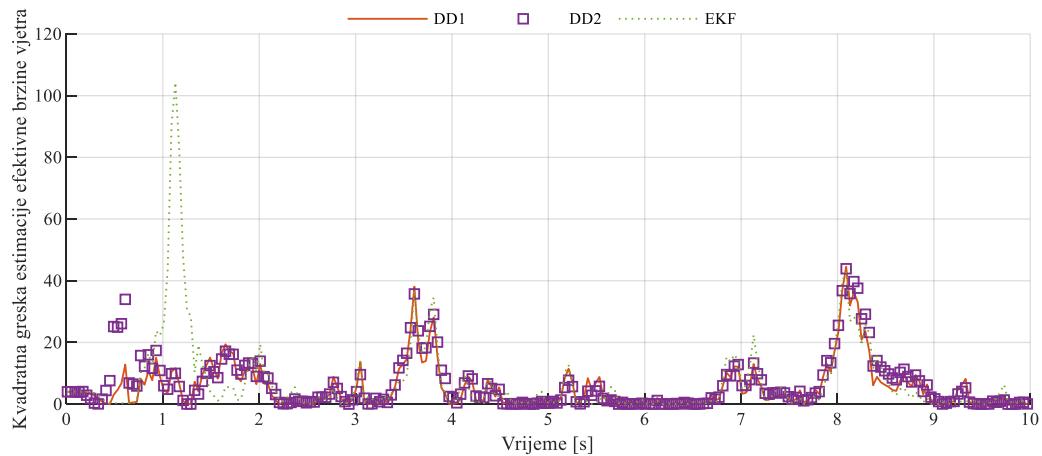
Slika 39. Kvadratna greška stanja x_1



Slika 40. Kvadratna greška stanja x_2



Slika 41. Kvadratna greška stanja x_3

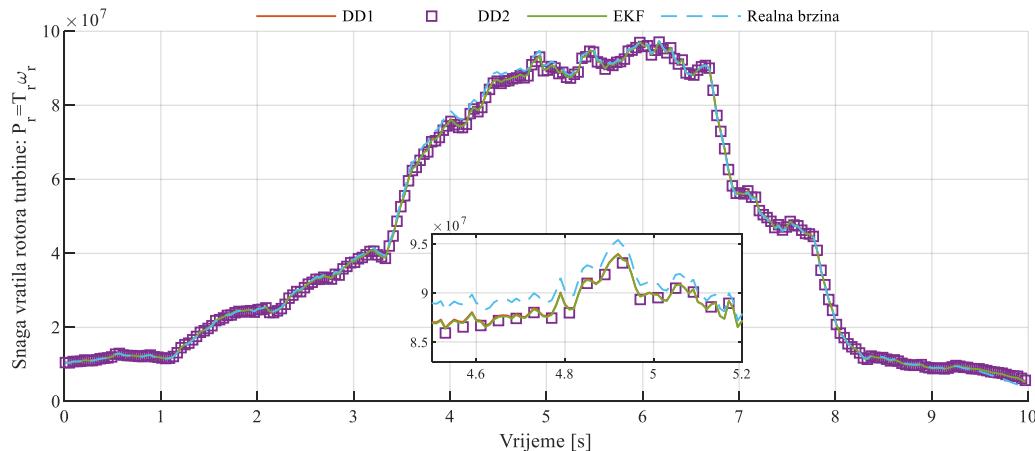


Slika 42. Kvadratna greška stanja $x_4 = v$

Sa slike 42 i iz tabele 6, može se zaključiti da je efektivnu brzinu vjetra najbolje estimirao DD1 filter.

Upravljački signal koristi informaciju o estimiranom stanju x_2 te je i precizna estimacija ovog stanja bitna za upravljanje elektranom. Iz tabele 6 vidi se da je stanje x_2 najbolje estimirao filter DD1, te se očekuje da će upravljanje sa ovim filtrom dati najbolje rezultate.

Smisao uspostavljanja ovakvog upravljanja je postizanje maksimalne snage vratila rotora turbine u vremenu, tj. iskorišćavanje maksimalne električne energije koja se može dobiti iz energije vjetra uz zaštitu električnih i mehaničkih komponenti elektrane. Na slici 43 prikazana je snaga vratila rotora turbine.



Slika 43. Snaga vratila rotora turbine.

Srednja vrijednost snage dobijene u vremenu, za upravljanje ostvareno u kombinaciji sa različitim algoritmima estimacije prikazana je u tabeli 7. Takođe, prikazane su vrijednosti koje bi snaga imala ukoliko bi bila dostupna informacija o realnoj efektivnoj brzini vjetra.

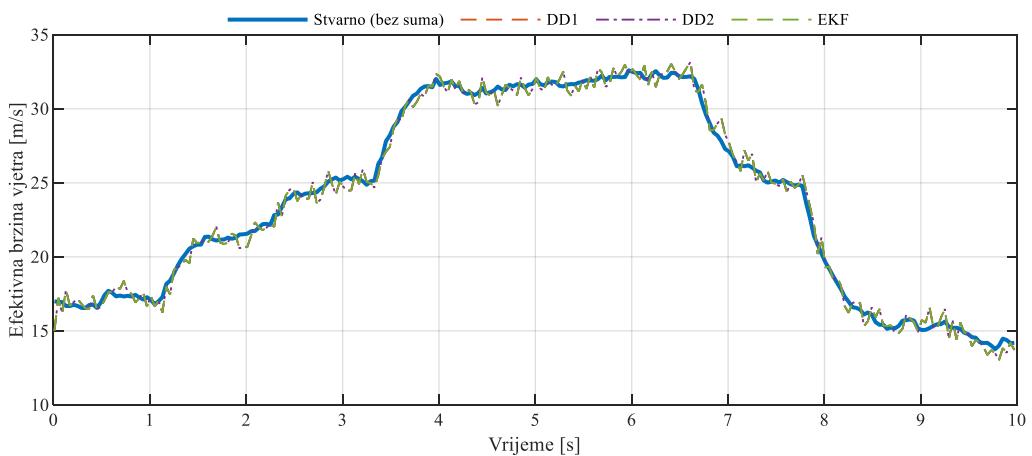
Tabela 7. Srednje vrijednosti snage vratila rotora turbine u vremenu

Tip filtra	DD1	DD2	EKF	Stvarna brzina
Snaga vratila rotora turbine $P_r = T_r \cdot \omega_r$ [W]	4.4316e+07	4.4195e+07	4.4305e+07	4.4609e+07

Sa slike 43 i iz tabele 7 zaključuje se da se najveća snaga dobija upravljanjem u kombinaciji sa DD1 filtrom dok DD2 daje najlošiji rezultat. Međutim, sa slika 35 i 43 može se vidjeti da u vremenu kada vjetar ima brzinu veću od kritične, elektrana i dalje proizvodi električnu energiju i na taj način dovodi do mogućeg oštećenja električnih i mehaničkih komponenti.

5.2.4. Estimacija sa dva senzora: DD1, DD2 i EKF

Izvođenjem numeričkog eksperimenta prema postavci navedenoj u poglavљу 5.1. za slučaj sa brzom promjenom efektivne brzine vjetra, sa dva postavljena senzora dobijen je rezultat estimacije predstavljen na slici 44. Vrijeme estimacije postavljeno je na 10 sekundi. Vrijednost matrice varijanse šuma stanja za filtere DD1, DD2 i EKF određena je izrazom (165).



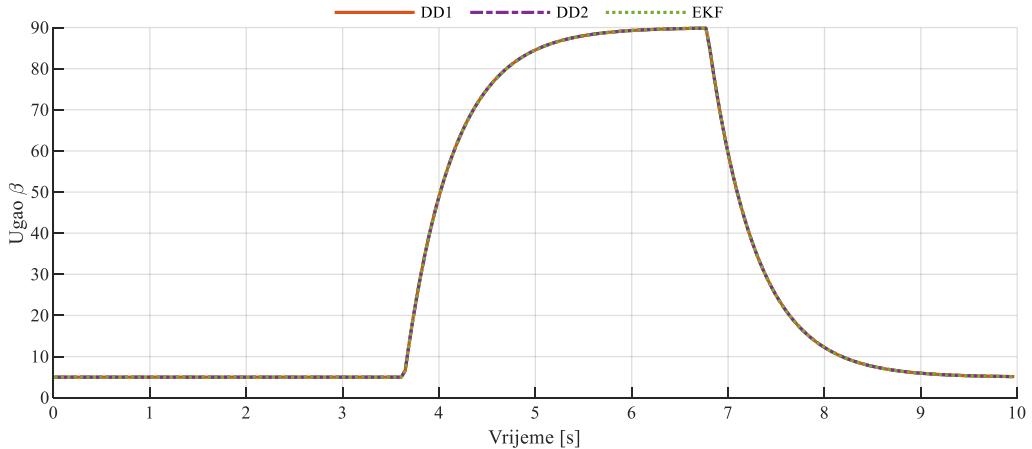
Slika 44. Estimacija brze promjene: DD1, DD2 i EKF

Srednje kvadratne greške estimacije, dobijene prema izrazu (167), prikazane su u tabeli 8.

Tabela 8. Srednje kvadratne greške estimacije različitih filtrova

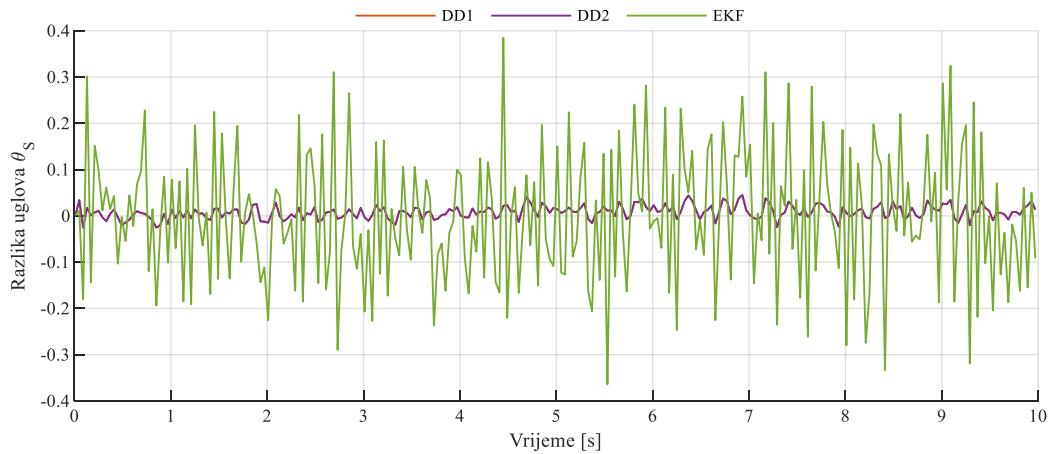
Srednja kvadratna greška / Tip filtra	DD1	DD2	EKF
Stanje x_1	1.5335e-04	1.5336e-04	0.0142
Stanje x_2	8.9170e-04	8.9517e-04	0.0213
Stanje x_3	0.0251	0.0251	0.1568
Stanje x_4 (ef. brzina vjetra)	0.1757	0.1757	0.1754

Upravljanje je vršeno pomoću ugla β i odnosa brzina λ , na način kako je objašnjeno u poglavlju 5.1.4. Promjena ugla β u skladu sa upravljanjem prikazana je na slici 45.

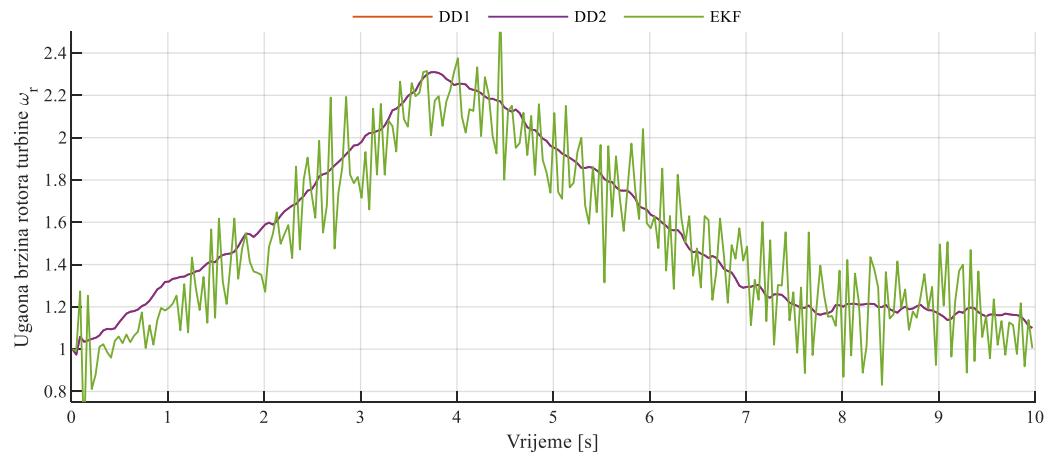


Slika 45. Promjena ugla β prilikom upravljanja elektranom

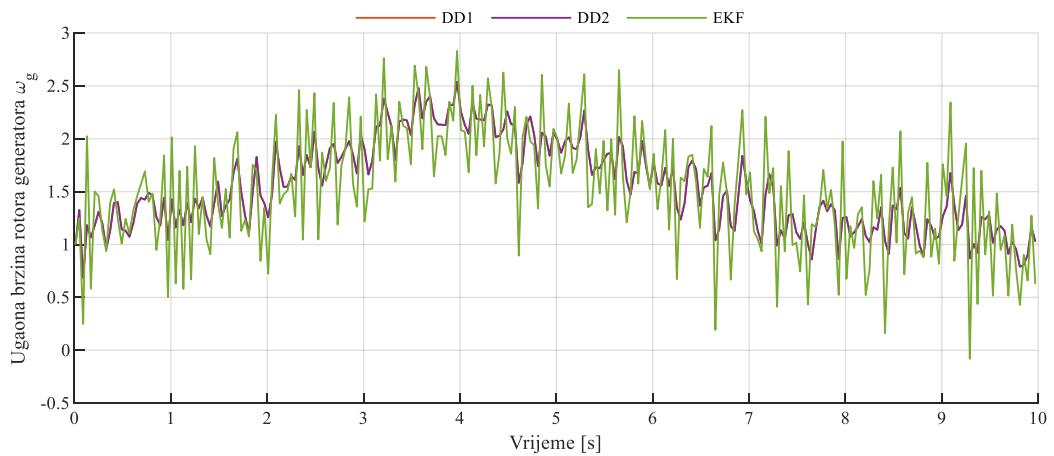
Estimacije stanja x_1 , x_2 i x_3 prikazane su na slikama 46, 47 i 48, respektivno. Kvadratne greške u vremenu za stanja x_1 , x_2 , x_3 i x_4 prikazane su na slikama 51, 52, 53 i 54 respektivno.



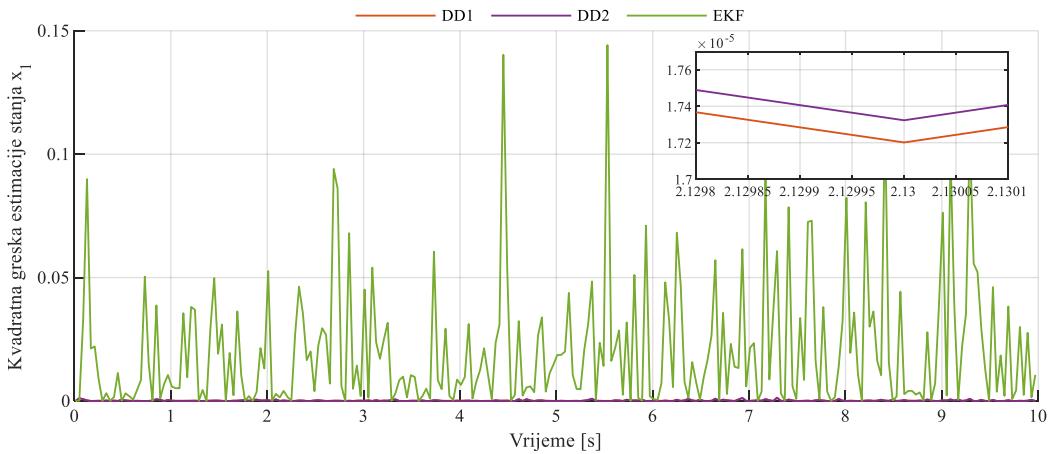
Slika 46. Estimacija stanja x_1



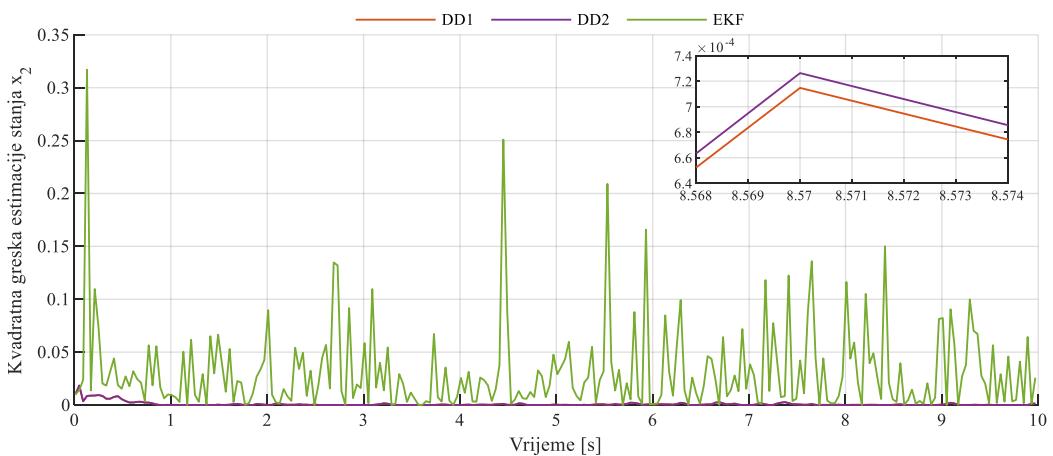
Slika 47. Estimacija stanja x_2



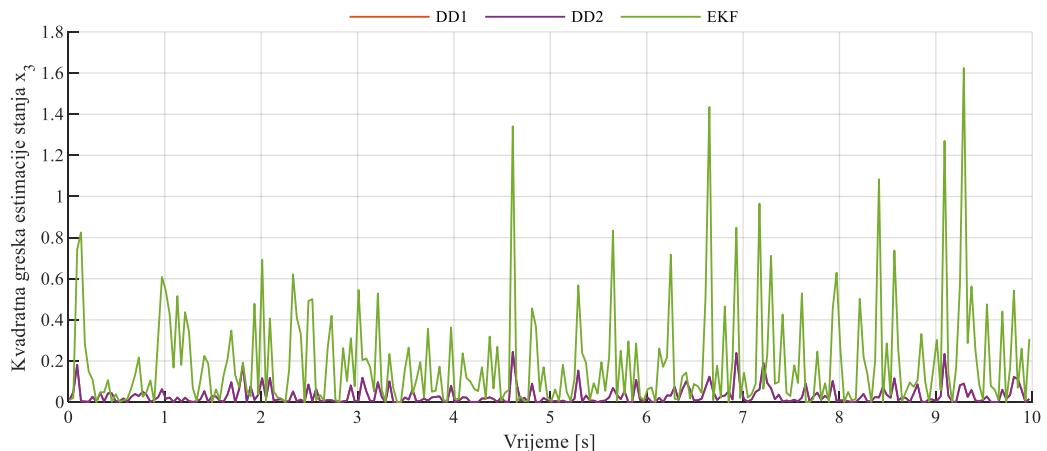
Slika 48. Estimacija stanja x_3



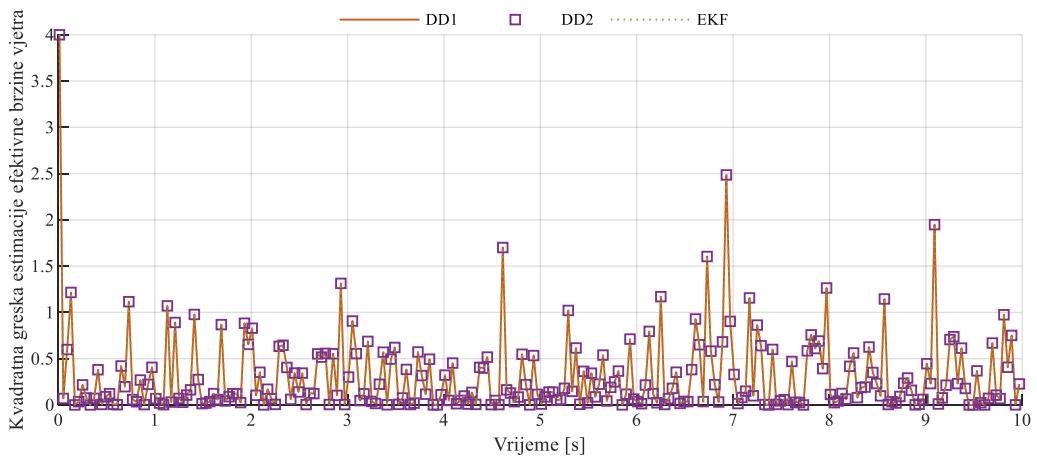
Slika 49. Kvadratna greška stanja x_1



Slika 50. Kvadratna greška stanja x_2



Slika 51. Kvadratna greška stanja x_3



Slika 52. Kvadratna greška stanja $x_4 = v$

Sa slike 44, slike 52 i iz tabele 8 primjećuje se da sva tri filtera vrše dobru estimaciju efektivne brzine vjetra, te da se pomoću njih može izvesti odgovarajuće upravljanje vjetroelektranom.

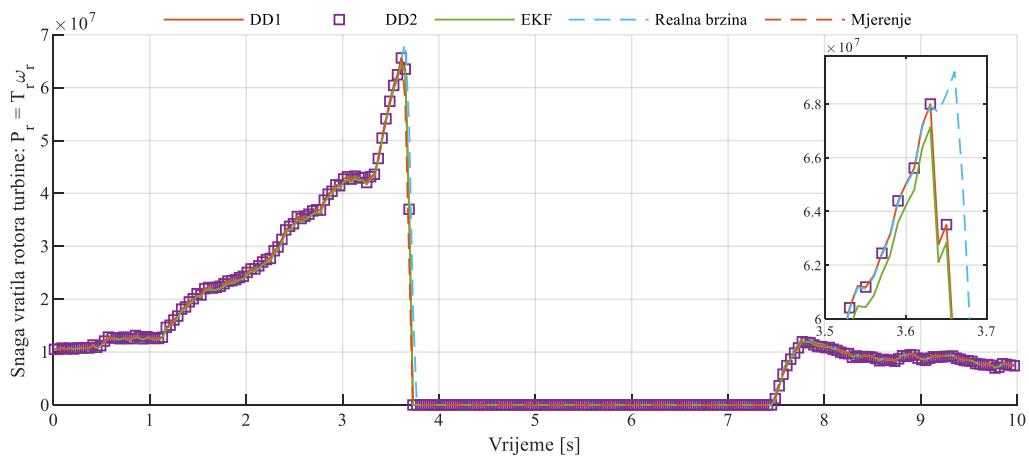
Posmatranjem slike 44 i 45 primjetno je da se ugao β mijenja kada brzina pređe kritičnu vrijednost od $v_{cut-off} = 30 \frac{m}{s}$, u trenutku $t = 3.65s$. Kočenje elektrane prekida se kada se brzina vrati na vrijednost ispod kritične, u trenutku $t = 6.77s$.

Sa slike 49 i 50, kao i iz tabele 8, može se zaključiti da je razliku uglova θ_s (stanje x_1) i ugaonu brzinu vratila rotora turbine ω_r (stanje x_2) najbolje estimirao DD1 filter. Sa slike 51 i iz tabele 8 primjećuje se da su ugaonu brzinu vratila rotora generatora ω_g (stanje x_3), koje se mjeri tahometrom, najbolje estimirali DD1 i DD2 filtri.

Iz tabele 8, a ni sa slike 44, nije moguće vidjeti jasnu razliku greške koju prave filtri DD1 i DD2, dok je moguće uočiti da oba daju lošiju estimaciju od EKF-a. Radi poređenja performansi ova dva filtra, provjerena je vrijednost razlike srednje kvadratne greške filtara DD1 i DD2 i utvrđeno je da ona iznosi: $SKG_{DD1} - SKG_{DD2} = -5.2736e-16$. Na ovaj način, pokazano je da filtri DD1 i DD2 vrše estimaciju gotovo na isti način, sa razlikom u SKG reda 10^{-16} , pri čemu DD1 daje neznatno bolji rezultat.

Upravljački signal koristi informaciju o estimiranom stanju x_2 te je i precizna estimacija ovog stanja bitna za upravljanje elektranom. Kako je ranije konstatovano, stanje x_2 najbolje je estimirao filter DD1, te se od ovog filtra očekuje rezultat sa najboljim upravljanjem.

Smisao uspostavljanja upravljanja elektranom je postizanje maksimalne snage vratila rotora u vremenu, tj. iskorišćavanje maksimalne električne energije koja se može dobiti iz energije vjetra, uz zaštitu mehaničkih i električnih komponenti elektrane. Na slici 53 prikazana je snaga vratila rotora turbine.



Slika 53. Snaga vratila rotora turbine

Srednje vrijednosti snage dobijene u vremenu, za upravljanje ostvareno u kombinaciji sa različitim algoritmima estimacije prikazana je u tabeli 9. Takođe, prikazane su vrijednosti koje bi snaga imala ukoliko bi bila dostupna informacija o realnoj efektivnoj brzini vjetra, i vrijednosti snage dobijene korišćenjem samo informacije o efektivnoj brzini vjetra, dobijenoj od anemometra.

Tabela 9. Srednje vrijednosti snage vratila rotora turbine u vremenu

Tip filtra	DD1	DD2	EKF	Stvarna brzina	Mjerena brzina
Snaga vratila rotora turbine $P_r = T_r \cdot \omega_r$ [W]	1.2191e+07	1.2192e+07	1.2076e+07	1.2405e+07	1.2173e+07

Sa slike 53 i iz tabele 9 zaključuje se da se najveći obrtni moment dobija kada se koristi DD2 filter, dok upravljanje sa EKF-om daje najmanju snagu. Snaga koja se dobija pomoću upravljanja uz DD1 i DD2 algoritme veća je od snage dobijene kada se koristi samo anemometar. Takođe, sa slike 44 i 53 može se vidjeti da u vremenu kada vjetar ima brzinu veću od kritične, elektrana ne proizvodi električnu energiju i na taj način štiti električne i mehaničke komponente od oštećenja.

6. ZAKLJUČAK

Zaključak ovog rada temelji se na sprovedenim istraživanjima i numeričkim eksperimentima u vezi sa estimacijom efektivne brzine vjetra korišćenjem nelinearnih opservera stanja. Kroz ovaj rad analizirane su različite metode estimacije stanja, počevši od Kalmanovog filtra za linearne sisteme, preko proširenog Kalmanovog filtra (EKF), pa sve do naprednijih algoritama poput „Divided Difference“ filtara (DD1 i DD2). U svakoj od ovih metoda, ključna je bila procjena tačnosti i osjetljivosti algoritama u prisustvu šuma, kao i njihove mogućnosti da obezbijede tačne estimacije stanja u dinamičnim uslovima.

Jedan od ključnih doprinosa rada jeste prikaz kako različiti pristupi modelovanju i filtraciji mogu da poboljšaju performanse upravljanja vjetroelektranama. U numeričkom dijelu rada je demonstrirano da primjena proširenih i „Divided Difference“ filtara omogućava efikasnu estimaciju ključnih fizičkih veličina kao što su ugaona brzina i obrtni moment turbine, čak i u prisustvu šuma u mjerenu i modelu.

Rezultati eksperimenata pokazali su da preciznost estimacije zavisi od pravilne postavke filtera i podešavanja parametara, pri čemu se posebna pažnja mora posvetiti modelovanju šuma i početnim uslovima sistema. Budući da je rad obuhvatio simulacije različitih tipova filtera, jasno je da svaki od njih ima svoje prednosti i ograničenja u zavisnosti od specifičnosti problema koji se rješava. Konkretno, pokazalo se da najveću izlaznu snagu ostvaruje elektrana koja koristi upravljački algoritam sa DD2 filtrom, dok je EKF algoritam omogućio najbolju estimaciju efektivne brzine vjetra, uz lošiju estimaciju ostalih stanja.

Zbog stalnog razvoja u oblasti obnovljivih izvora energije, dalja istraživanja mogu uključivati poboljšanje adaptivnih algoritama u realnim uslovima, analizu uticaja starijih članova Tejlorovog reda, kao i optimizaciju softverskih rješenja za precizniju i bržu estimaciju stanja sistema.

LITERATURA

- [1] R. E. Kalman and R. Buey, “A new approach to linear filtering and prediction theory,” Trans. ASME, J. Basic Eng., vol. 83, no. Series D, pp. 95–108, 1961.
- [2] G. Welch and G. Bishop, “An Introduction to the Kalman Filter.”
- [3] S. J. Julier, J. K. Uhlmann, and H. F. Durrant-Whyte, “A new approach for filtering nonlinear systems,” in *Proceedings of 1995 American Control Conference-ACC'95*, 1995, vol. 3, pp. 1628–1632.
- [4] S. Julier and J. K. Uhlmann, “A general method for approximating nonlinear transformations of probability distributions,” 1996.
- [5] S. J. Julier and J. K. Uhlmann, “New extension of the Kalman filter to nonlinear systems,” in *Signal processing, sensor fusion, and target recognition VI*, 1997, vol. 3068, pp. 182–193.
- [6] C. Bohn, “Recursive Parameter Estimation for Nonlinear Continuous-Time Systems through Sensitivity-Model-Based Adaptive Filters,” 2000.
- [7] J. Wiklander, “Performance comparison of the Extended Kalman Filter and the Recursive Prediction Error Method,” 2003.
- [8] C. Suliman, C. Cruceru, and F. Moldoveanu, “Mobile Robot Position Estimation Using the Kalman Filter,” *Sci. Bull. Petru Maior Univ. Tigr. Mures*, vol. 6, no. 23, pp. 75–78, 2009.
- [9] A. Javaheri, D. Lautier, and A. Galli, “Filtering in Finance,” *Wilmott*, vol. 2003, no. 3, pp. 67–83, 2003, doi: 10.1002/wilm.42820030315.
- [10] K. Matović, “Калманов филтер и његове модификације с применом у праћењу покретног циља,” 2021.
- [11] S. Despotović: Matematički Modeli u Analizi Elektroenergetskih Sistema, ZJE, Beograd 1965. god.
- [12] Chaturverdi, Devendra K. (2010) – Modeling and Simulation of Systems using MATLAB and Simulink
- [13] M. Nørgaard, N. K. Poulsen, and O. Ravn, “New developments in state estimation for nonlinear systems,” *Automatica*, vol. 36, no. 11, pp. 1627–1638, Nov. 2000, doi: 10.1016/S0005-1098(00)00089-3.
- [14] C. D. Karlgaard and H. Schaub, “Huber-based divided difference filtering,” *J. Guid. Control. Dyn.*, vol. 30, no. 3, pp. 885–891, 2007, doi: 10.2514/1.27968.
- [15] Johan Verbeke & Ronald Cools (1995) The Newton-Raphson method, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 26:2, 177-193, DOI: 10.1080/0020739950260202
- [16] Brook Taylor (1715), “Methodus incrementorum directa et inversa”
- [17] Čerkala, J., Jadlovska, A., & Szűrös, Š. (2015). “3D Visualization of Mechatronic Systems using OpenGL”, Proceedings of the Faculty of Electrical Engineering and Informatics of the Technical University of Košice.

- [18] J. F. Steffensen, "Interpolation," 1927.
- [19] C. E. Froberg, "Introduction to numerical analysis." Reading, 1970.
- [20] L. N. Trefethen, "Householder triangularization of a quasimatrix," *IMA Journal of Numerical Analysis*, vol. 30, no. 4, pp. 887–897, oct 2010.
- [21] M. Hutchinson, F. Zhao, "Global Wind Report 2023," *Glob. Wind Energy Counc.*, 2023.
- [22] J. Lee and F. Zhao, "Global Wind Report 2021," *Glob. Wind Energy Counc.*, 2021.
- [23] The World Wind Energy Association, "2014 Report Half-year," *2014 half -year Rep.*, vol. 1, p. 8, 2014.
- [24] M. Hutchinson, F. Zhao, "Global Wind Report 2023," *Glob. Wind Energy Counc.*, 2023.
- [25] Ofualagba, G., and Ubeku, E. U., "Wind Energy Conversion System - Wind Turbine Modeling", *IEEE*, 2008.
- [26] V. Vukadinović, L. Martinović, Ž. Zečević, and B. Krstajić, "Comparative analysis of Kalman-type filters for effective wind speed estimation," *2021 25th Int. Conf. Inf. Technol. IT 2021*, no. February, pp. 3–6, 2021, doi: 10.1109/IT51528.2021.9390116.
- [27] S. Georg, H. Schulte, and H. Aschemann, "Control-oriented modelling of wind turbines using a Takagi-Sugeno model structure," in *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Jun. 2012, pp. 1–8. doi: 10.1109/FUZZ-IEEE.2012.6251302.
- [28] Z. Chen, J. M. Guerrero, F. Blaabjerg, "A Review of the State of the Art of Power Electronics for Wind Turbines," *IEEE Transactions on Power Electronics*, 24(8), 2009. <https://doi.org/10.1109/TPEL.2009.2017082>
- [29] J. F. W. Eds *et al.*, "Advances in Industrial Control, WT Modeling," *Media*, p. 267, 2011.
- [30] M. Green and J. B. Moore, "Persistence of excitation in linear systems," *Systems & Control Letters*, vol. 7, no. 5, pp. 351-360, 1986.