ANALIZA ALGORITAMA ZA REKONSTRUKCIJU SIGNALA RI...

By: Miloš Brajović

As of: Dec 26, 2018 11:59:11 AM
76,068 words - 253 matches - 121 sources

Similarity Index

7%

Mode: Similarity Report ▼

paper text:

UNIVERZITET CRNE GORE ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET Miloš Brajović

ANALIZA ALGORITAMA ZA REKONSTRUKCIJU SIGNALA RIJETKIH U HERMITSKOM I FURIJEOVOM TRANSFORMACIONOM DOMENU 42

– Doktorska disertacija – Podgorica, 2018. godine ON RECONSTRUCTION ALGORITHMS FOR SIGNALS SPARSE IN HERMITE AND FOURIER DOMAINS by MSc Miloš Brajović

A thesis submitted **for the degree of Doctor of Philosophy Faculty of** Electrical Engineering **University of** 67

Montenegro Podgorica 2018 PODACI O DOKTORANDU, MENTORU I ČLANOVIMA KOMISIJE DOKTORAND

Ime i prezime: Datum i mjesto rod¯enja: **Naziv završenog postdiplomskog studijskog programa: Godina završetka:** 37

MENTOR: Miloš Brajović 24.05.1988. godine, Podgorica, Crna Gora Elektrotehnički fakultet, odsjek Elektronika, telekomunikacije, računari, smjer Računari – magistarske studije 2013. dr Miloš Daković, redovni profesor, Univerzitet Crne Gore, Elektrotehnički fakultet KOMISIJA ZA OCJENU PODOBNOSTI TEZE I KANDIDATA: dr Srd¯an Stanković,

redovni profesor, Univerzitet Crne Gore, **Elektrotehnički fakultet dr** Miloš Daković, **redovni profesor, Univerzitet** Crne Gore, **Elektrotehnički fakultet** 85

dr Irena Orović, vanredni profesor, Univerzitet Crne Gore, Elektrotehnički fakultet

KOMISIJA ZA OCJENU DOKTORSKE DISERTACIJE: KOMISIJA ZA ODBRANU DOKTORSKE DISERTACIJE: DATUM ODBRANE: 37

Zahvalnica Neizmjerno sam zahvalan svom mentoru, prof. dr Milošu Dakoviću, na svesrdno pruženoj pomoći, iskrenim savjetima, nemjerljivom stpljenju i dubokom razumijevanju, tokom svih godina mog angažovanja na Elektrotehničkom fakultetu u Podgorici. Zahvaljujući njemu, bavljenje naukom i nastavnim aktivnostima za mene nije predstavljalo samo profesiju, već sveprožimajući dio života i – životni stil. Svojim odmjerenim pristupom u svim aspektima svojih profesionalnih aktivnosti i uvijek duboko promišljenim sagledavanjem stvari, on je ovu doktorsku disertaciju pozicionirao ne kao krajnju, već kao početnu tačku jednog naučno-istraživačkog procesa. Posebnu zahvalnost dugujem prof. dr Srd¯anu Stankoviću i prof. dr Ireni Orović koji su, svojim predanim radom i med¯unarodno afirmisanim i visoko respektabilnim profesionalnim rezultatima, za mene predstavljali i i dalje predstavljaju neiscrpan izvor inspiracije i motivacije za bavljenje naukom. Njihova nepokolebljiva vjera u mene i u moje sposobnosti bili su ključni izvor hrabrosti koja mi je bila potrebna da prve značajne istraživačke rezultate izložim otvorenoj naučnoj kritici kroz proces publikovanja radova u renomiranim naučnim časopisima. Iskustvo zajedničkog rada, kao i iskreni i dobronamjerni savjeti i kritike, duboko su oblikovali moj profesionalni identitet. Pravi naučno-istraživački rad širinom i univerzalnošću svojih dometa i kompleksnošću svoje suštine prevazilazi okvire uobičajenih ljudskih aktivnosti. Njegov tok podrazumijeva riječima teško uhvatljiva znanja i vještine, koji se prostiru daleko izvan granica jedne konkretne naučne oblasti, konkretne profesije ili konkretnog konteksta. Iako odavno postoje pokušaji kategorizacije i materijalizacije ovakvih znanja i vještina kroz različite priručnike i metodologije naučno-istraživačkog rada, jedna direktna i kritički nastrojena komunikacija i iskustvo neposrednog rada sa renomiranim naučnikom nikada ne mogu biti kompenzovani pisanom riječju, niti iskazani suvoparnim skupom pravila. Na pružanju jednog takvog iskustva kroz zajednički rad, neizmjerno sam zahvalan prof. dr Ljubiši Stankoviću. Tokom izrade ove disertacije, imao sam posebno zadovoljstvo da sarad¯ujem sa prof. dr Vesnom Popović-Bugarin, prof. dr Igorem Đurovićem i prof. dr Slobodanom Đukanovićem. Kultura predanog rada i uvijek prisutno stremljenje najvišim standardima kvaliteta, koji i predstavljaju temelj institucionalnog renomea Elektrotehničkog fakulteta, kroz ovu saradnju postali su dio moje profesionalne agende. Na tome sam im posebno zahvalan. Neizmjerno se zahvaljujem svojim kolegama i prijateljima dr Žarku Zečeviću, dr And¯eli Draganić i dr Branki Jokanović, sa kojima je svaki ciklus studija na Elektrotehničkom fakultetu u svakom trenutku imao dimenziju domaćeg i bliskog. Dr Žarku Zečeviću se posebno zahvaljujem na svakodnevnom druženju i dugim razgovorima koji su vrlo često poprimali razmjere i ozbiljnost pravih naučnih diskusija. Zahvaljujem se mr Stefanu Vujoviću, mr Isidori Stanković, mr Nikoli Bulatoviću, dr Marku Simeunoviću i mr Predragu Rakoviću na zajedničkom radu, podršci i na uvijek prijatnoj atmosferi u Laboratoriji za obradu signala. Zahvaljujem se svojim prijateljima iz djetinjstva, gimnazijskih dana i prijateljima koje sam stekao tokom boravka u I fazi Novog studentskog doma u Podgorici, na beskrajnom razumijevanju, pružanju motivacije i na uvijek kvalitetno provedenom vremenu, iako ga u nekim periodima izrade ove teze možda nije bilo onoliko koliko sam želio da ga bude. Na kraju, najveću zahvalnost dugujem svojoj porodici na bezuslovnoj podršci i neiscrpnom razumijevanju, koje su mi do sada pružali u svim aspektima života. Podgorica, oktobra 2018. godine Miloš Brajović PODACI O DOKTORSKOJ DISERTACIJI Naziv doktorskih studija: Naslov doktorske disertacije: Doktorske studije elektrotehnike

Analiza algoritama za rekonstrukciju signala rijetkih u Hermiskom **i Furijeovom transformacionom domenu** 42

Ključne riječi: Dekompozicija multikomponentnih signala, digitalna obrada signala, diskretna kosinusna transformacija (DCT), Furijeova transformacija, Hermitska transformacija, kompresivno odabiranje, multivarijantni signali, nestacionarni signali, obrada rijetkih (sparse) signala, vremensko-frekvencijska analiza Datum prijave doktorske teze: 16.12.2015. godine Datum sjednice Senata UCG na kojoj je prihvaćena teza: 23.06.2016. godine

Naučna oblast: Elektrotehnika i Računarstvo Uža naučna oblast:	Digitalna	**obrada signala**	115

REZIME: Disertacija sadrži originalne naučne doprinose u oblasti digitalne obrade signala. Primarna problematika koja se razmatra jeste rekonstrukcija signala sa rijetkom (visoko koncentrisanom) reprezentacijom u različitim transformacionim domenima – Furijeovom, diskretnom Hermitskom, zatim u domenina jednodimenzione i dvodimenzione diskretne kosinusne transformacije, kao i u vremensko-frekvencijskim domenima. Rekonstrukcija rijetkih signala bazira se na mjerama rijetkosti, odnosno, mjerama koncentracije signala. Teza sadrži analizu i predlog novih rekonstrukcionih algoritama iz konteksta kompresivnog odabiranja, kao i opsežnu analizu uticaja nedostajućih odbiraka signala na transformacione koeficijente signala u razmatranim domenima. Predstavljeno je detaljno izvod¯enje relacija koje izloženu analizu povezuju sa opštom teorijom kompresivnog odabiranja, kao i izvod¯enje relacija koje opisuju performanse procesa rekonstrukcije primjenom razmatranih algoritama, uključujući: analizu uticaja aditivnog šuma, stepena rijetkosti i broja nedostajućih odbiraka, zatim egzaktne izraze za greške u rekonstrukciji i vjerovatnoće tih grešaka. U tezi su predstavljeni i originalni algoritmi za optimizaciju parametara diskretne Hermitske transformacije, detaljna analiza uticaja aditivnog šuma na ovu reprezentaciju i predlog algoritma za njegovo uklanjanje; predloženi su algoritmi za dekompoziciju multivarijantnih signala u kontekstu vremensko-frekvencijske analize kao i algoritam za estimaciju trenutne frekvencije na bazi Wigner-ove distribucije. Opsežni numerički eksperimenti i primjeri sa realnim i sintetičkim signalima potvrd¯uju validnost prezentovanih teorijskih rezultata, pritom nedvosmisleno postavljajući doprinose disertacije u kontekst praktičnih primjena. UDK: INFORMATION ON DOCTORAL DISSERTATION PhD study program: Dissertation title: Keywords: Thesis application date: Date of session of UoM Senate where the thesis is accepted: Scientific area: Specific scientific area: PhD studies in Electrical Engineering On Reconstruction Algorithms for Signals Sparse in Hermite and Fourier Domains Multicomponent signal decomposition, digital signal processing, discrete cosine transform (DCT), Fourier transform, Hermite transform, compressive sensing, multivariate signals, sparse signal processing, non-stationary signals, time-frequency signal analysis December 16, 2015 June 23, 2016 Electrical Engineering and Computer Science Digital Signal Processing ABSTRACT: The dissertation consists of original contributions in the area of digital signal processing. The reconstruction of signals sparse (highly concentrated) in various transform domains is the primary problem analyzed in the thesis. The considered domains include Fourier, discrete Hermite, one-dimensional and two-dimensional discrete cosine transform, as well as various time-frequency representations. Sparse signals are reconstructed using sparsity measures, being, in fact, the measures of signal concentration in the considered domains. The thesis analyzes the compressive sensing reconstruction algorithms and introduces new approaches to the problem at hand. The missing samples influence on analyzed transform domains is studied in detail, establishing the relations with the general compressive sensing theory. The theoretical contributions include new expressions describing the reconstruction algorithms' performance and outcomes, including the study of additive noise, sparsity level and the number of available measurements influence on reconstruction performance, exact expressions for reconstruction errors and error probabilities. Parameter optimization of the discrete Hermite transform

is also studied, as well as the additive noise influence on Hermite coefficients, resulting in new parameter optimization and denoising algorithms. Additionally, an algorithm for the decomposition of multivariate multicomponent signals is introduced, as well as an instantaneous frequency estimation algorithm based on Wigner distribution. Extensive numerical examples and experiments with real and synthetic data validate the presented theory and shed the new light on practical applications of the results. UDK: Izvod iz teze U ovoj disertaciji analizira se rekonstrukcija zasnovana na mjerama koncentracije signala u specifičnim transformacionim domenima. Najveći dio sadržaja disertacije odnosi se na koncepte kompresivnog odabiranja i rekonstrukcije rijetkih signala. Kao generalni koncept, med¯utim, mjere koncentracije su primjenjene u rekonstrukciji i poboljšanjima reprezentacija signala i mimo tog konteksta. U nastavku slijedi koncizan pregled sadržaja disertacije po glavama, uz posebno isticanje originalnih doprinosa autora. Nakon kraćeg uvoda, prva glava sadrži kratak pregled i osnovne definicije vezane za rekonstrukciju rijetkih signala i rekonstrukcije zasnovane na mjerama rijetkosti signala. Ukratko su prezentovani osnovni algoritmi koji se koriste u ostatku disertacije, uslovi koje je potrebno ostvariti u cilju uspješne i jedinstvene rekonstrukcije, kao i osnovna terminologija. Druga glava sadrži originalne doprinose vezane za diskretnu Hermitsku transformaciju. Nakon kratkog prezentovanja Hermiskih transformacija i njihovih osnovnih osobina, prvo je prezentovan algoritam za optimizaciju parametara diskretne forme ove transformacije, i to faktora skaliranja vremenske ose i faktora pomjeraja baznih funkcija po vremenskoj osi. Optimizacija parametara inkorporirana je u algoritam za kompresiju QRS kompleksa, koji predstavljaju veoma značajne djelove EKG signala koji se koriste u medicinskoj dijagnostici. Nakon toga, prezentovana je originalna analiza uticaja aditivnog šuma na transformacione koeficijente diskretne Hermitske transformacije. U tom kontekstu, predložena je i jednostavna procedura za uklanjanje šuma. Važan dio druge glave čini analiza uticaja nedostajućih odbiraka na koeficijente diskretne Hermitske transformacije, koja sadrži veći broj novih teorijskih koncepata, uključujući: matematičko modelovanje Hermitskih koeficijenata signala sa nedostajućim odbircima, probabilističku analizu uspješnosti rekonstrukcije koja je zasnovana na prezentovanoj teoriji, zatim interpretaciju indeksa koherentnosti parcijalne mjerne matrice diskretne Hermitske transformacije u kontekstu predložene teorije, orignalnu analizu uticaja aditivnog šuma na performanse rekonstrukcije, analizu rekonstrukcije signala koji nijesu rijetki a koji su rekonstruisani kao da jesu rijetki u ovom domenu, zatim dva nova algoritma za rekonstrukciju zasnovana na prezentovanoj teoriji, i dodatno, treći, iterativni gradijentni algoritam za rekonstrukciju, sa odgovarajućom interpretacijom u ovom domenu. Svi rezultati su potkrijepljeni većim brojem numeričkih primjera, uključujući i eksperimente sa realnim EKG i UWB signalima, kao i opsežne eksperimente kojima je izvršena evaluacija prezentovanih teorijskih rezultata. Treća glava se bavi diskretnom kosinusnom transformacijom (DCT). Razmatrana su dva oblika ove transformacije: jednodimenzioni i dvodimenzioni. U slučaju jednodimenzione transformacije, odrad¯ena je detaljna analiza uticaja nedostajućih odbiraka na DCT koeficijente, izvedeni su eksplicitni izrazi za vjerovatnoću uspješne rekonstrukcije u zavisnosti od broja dostupnih mjerenja, stepena rijetkosti i dužine signala. I u ovom slučaju je uspostavljena teorijska interpretacija indeksa koherentnosti parcijalne DCT matrice, zatim, izvršena je analiza uticaja aditivnog šuma na performanse rekonstrukcije, izveden je eksplicitini izraz za rekonstrukciju signala koji nijesu rijetki a rekonstruisani su uz pretpostavku o rijetkosti u ovom domenu, redefinisani su algoritmi za rekonstrukciju signala koji su rijetki u ovom domenu, na osnovu predložene teorije. Bitan segment čini opsežna eksperimentalna analiza primjene u kontekstu uklanjanja impulsnih smetnji prisutnih u audio signalima. Prezentovani su brojni primjeri i rezultati eksperimenata sa sintetičkim i realnim audio signalima. U drugom dijelu ove glave razmatrana je rekonstrukcija signala rijetkih u dvodimenzionom DCT domenu. U prvom redu, primjena se odnosi na digitalne slike. Detaljno su izvedeni izrazi koji karakterišu statističke osobine 2D DCT koeficijenata koji se, kao posljedica nedostajućih odbiraka signala, ponašaju kao slučajne varijable. I za slučaj ove transformacije je izveden izraz za energiju greške u rekonstrukciji signala koji nijesu rijetki (tj. koji su aproksimativno rijetki), a koji su rekonstruisani uz pretpostavku o rijetkosti. Realni primjeri takvih signala, na kojima i jeste izvršena numerička evaluacija rezultata, jesu digitalne slike. U posljednjoj glavi teze problematika rekonstrukcije zasnovana na mjerama koncentracije (rijetkosti) analizirana je u kontekstu vremensko-frekvencijske analize. U glavi je prezentovan algoritam za rekonstrukciju rigid body dijela ISAR signala, na osnovu mjere koncentracije vremensko-frekvencijske reprezentacije, i algoritma za kompresivno odabiranje. Razmatrani problem je veoma bitan u kontekstu obrade radarskih signala. Glava sadrži i predlog novog algoritma za estimaciju trenutne frekvencije na bazi Wigner-ove distribucije, u uslovima jakog aditivnog šuma prisutnog u signalu. U drugom dijelu glave prezentovan je originalni pristup za dekompoziciju multivarijantnih multikomponentnih signala, koji se dobijaju mjerenjem fizičkih procesa pomoću više senzora. Predstavljeni dekompozicioni pristup, zasnovan na mjeri koncentracije iz konteksta kompresivnog odabiranja, omogućava rekonstrukciju komponenti signala koje se izdvajaju iz multikomponentnog skupa, uprkos činjenici da se preklapaju u vremensko-frekvencijskoj ravni. Thesis overview The main problem analyzed in this thesis is the reconstruction of signals based on concentration measures in some particular transform domains. In the largest part of the thesis, the signal reconstruction assumes the compressive sensing framework and sparse signal processing techniques. However, as a general concept, the concentration measures are studied in the problem of signal reconstruction even beyond this context. Below is a concise overview of the thesis content, given for each chapter separately, with a special emphasis on the author's original contributions. After a brief introduction, the first chapter contains a brief overview and basic definitions related to the reconstruction of sparse signals, based on signal concentration measures. Some basic reconstruction procedures are presented, together with the basic terminology and the theory regarding the reconstruction process, including the neccessary conditions for successful and unique signal recovery. The second chapter contains the original contributions related to the discrete Hermitian transformation. After a brief presentation of Hermite transforms and their basic properties, the algorithm for the optimization of discrete Hermite transform parameters is presented. The algorithm automatically adjusts the scaling factor of the time axis, and the time-shift parameter, based on signal concentration measure in the Hermite domain. The optimization procedure is incorporated into a QRS complex compression algorithm. QRS complexes are important parts of ECG signals, commonly used in medical diagnostics and treatment. The chapter continues with the analysis of the additive noise influence on discrete Hermite transform coefficients. In this context, a simple denoising procedure is also presented. A very important part of the second chapter consists of the analysis of the missing samples influence on discrete Hermite transform coefficients. The analysis includes some new theoretical contributions: mathematical models of Hermite coefficients corresponding to under-sampled signals, probabilistic analysis of the reconstruction of missing samples, interpretation of the coherence index of the Hermite sensing matrix.

Additive noise influence on the reconstruction performance **is** also **analyzed. The reconstruction** 1

error of non-sparse

signals, reconstructed under the sparsity assumption is also derived **based on the presented** 1 theory. Based on the presented theory, two compressive sensing algorithms for signal recovery are proposed. Moreover, one additional algorithm

based on the signal reconstruction in the measurements domain is also proposed. The theory is 104

validated in a large number of numerical examples, including examples with real ECG and UWB signals, as well as in a large number of comprehensive numerical experiments. The third chapter deals with the discrete cosine transform (DCT). Two forms of this transform are considered: one-dimensional and two-dimensional. For the case of a one-dimensional transform, a detailed analysis of the impact of missing samples on the DCT coefficients is made, explicit expressions are derived for the the probability of successful reconstruction, depending on the number of available measurements, sparsity and signal length. Ihe theoretical interpretation of the partial DCT matrix coherence index is established also in this case. The analysis of thee additive noise influence on the reconstruction performance is also performed. An explicit expression for the reconstruction error in the case signals not being sparse, but that are reconstructed with the sparsity assumption is derived. The reconstruction algorithms for signal sparse in this domain are reinterpreted, using the presented analysis. An important segment of this chapter is the extensive experimental analysis in the context of impulsive disturbances removal in audio signal processing. Numerous examples and results of experiments with synthetic and real audio signals are presented. In the second part of this chapter, the reconstruction of signals sparse in the two-dimensional DCT domain is considered. The most important example of such signals are the digital images. Detailed expressions for statistical properties of 2D-DCT coefficients of under-sampled signals are derived. The exact expression for the non-sparse signal reconstruction error is also derived. It characterizes the reconstruction performanse of signals being approximately sparse, but being reconstructed under the sparsity assumption. The theory is validated with numerical examples with digital images. In the last chapter, the problem of reconstruction based on concentration (sparsity) measures is analyzed in the context of time-frequency analysis. The chapter presents an algorithm for the reconstruction of the rigid body part of ISAR signals, which is based on the measure of the time-frequency representation concentration, and on a compressive sensing algorithm. The problem considered is very important in the context of the radar signal processing. In this chapter, an algorithm for the instantaneous frequency estimation based on Wigner distribution is also proposed. The presented estimation algorithm is used in the case of strong noise disturbances.

In the second part of the chapter, an original approach for the decomposition of multivariate multicomponent signals is 98

presented. Multivariate signals are obtained by measuring physical processes using multiple sensors. The presented decomposition approach, based on concentration measures from the compressive sensing framework, enables the reconstruction signal components extracted from multicomponent signals, even if they are overlapped in the time-frequency plane. Popis akronima ACO 2D-DCT CoSaMP DCT DFT DHT DHT1 DHT2 HT IF ISAR LFM LPFT FM FT m-D

MSE MP OMP RB RIP RMSE SASS SNR STFT UWB WD - Ant Colony Optimization; Dvodimenziona diskretna kosinusna transformacija; Compressive Sampling Matched Pursuit; Diskretna kosinusna transformacija (engl. Discrete cosine transform); Diskretna Furijeova transformacija; Diskretna Hermitska transformacija; Diskretna Hermitska transformacija prvog tipa; Diskretna Hermitska transformacija drugog tipa; Hermitska transformacija; Trenutna frekvencija (engl. instantaneous frequency); Inverse synthetic-aperture Radar; Linearno frekvencijski-modulisan; Lokal-polinomijalna Furijeova transformacija; Frekvencijski-modulisan; Furijeova transformacija; micro-Doppler; Srednja kvadratna greška (engl. mean-squared error); Matching pursuit; Orthogonal Matching Pursuit; Rigid body; Restricted isometry property; Kvadratni korijen od MSE (engl. root-mean-squared error) Sparsity-Assisted Signal Smoothing; Odnos signal-šum (engl. signal to noise ratio); Kratkotrajna Furijeova transformacija (engl. Short-time Fourier transform; Ultra-wideband; Wigner-ova distribucija. Sadržaj

 Uvod Klasične metode odabiranja signala podrazumijevaju ekspicitno ili implicitno zadovoljavanje uslova Teoreme o odabiranju, po kojoj frekvencija odabiranja signala treba da bude najmanje jednaka dvostrukoj maksimalnoj frekvenciji prisutnoj u posmatranom signalu. Na principima Teoreme o odabiranju zasnivaju se gotovo sve klasične tehnike za akviziciju signala, bilo da se radi o audio signalima, digitalnim slikama, bio-medicinskim signalima, radarskim signalima itd. Teorema o odabiranju takod¯e ima ključnu ulogu u tehnikama konverzije podataka, kao što je, na primjer, analogno-digitalna konverzija signala. Kompresivno odabiranje (engl. compressive sensing, CS) je nova i u naučnom smislu veoma atraktivna oblast u obradi signala, koja na izvjestan način prevazilazi spomenuti uslov Teoreme o odabiranju, omogućavajući pritom potpunu rekonstrukciju odred¯enih signala na osnovu veoma malog broja dostupnih odbiraka/mjerenja, mnogo manjeg od onog koji se koristi u tradicionalnim tehnikama. Količina podataka čija se akvizicija vrši od ključne je važnosti u praktično svim segmentima primjena informaciono-komunikacionih tehnologija, gdje najčešće obimne količine podataka zahtijevaju veoma kompleksne kompresione algoritme u cilju njihovog uspješnog skladištenja, obrade i prenosa. Navedene činjenice postavile su CS u fokus brojnih naučnih istraživanja, i uslovile da se tokom posljednjih godina u okviru ove oblasti razviju veoma napredne tehnike i rekonstrukcioni algoritmi. Brojni skupi ured¯aji za akviziciju podataka, koji sadrže veliki broj senzora (na primjer, bio-medicinski ured¯aji

kao što je MRI, multimedijalni ured¯aji **kao što su** visokorezolucione **kamere itd.) mogu biti** 34
značajno pojednostavljeni, a **vrijeme** i broj **snimanja**

značajno skraćeni (što je od naročito velike važnosti u bio-medicinskim primjenama). Prilikom obrade različitih signala oštećenih jakim šumom, nekada se pristupa namjernom preskakanju/eliminisanju oštećenih odbiraka, kao na primjer, u slučaju primjene L-statistike i drugih robustnih tehnika. CS nudi mogućnost da se navedeni odbirci u potpunosti rekonstruišu, samo na osnovu dostupnih-neoštećenih vrijednosti. Dakle, CS omogućava da se

na osnovu malog broja slučajno snimljenih podataka obezbijedi **isti kvalitet informacije,** 34

koji bi postojao kada bi svi podaci bili dostupni. Uspješna rekonstrukcija signala sa nedostajućim odbircima moguća je ukoliko su ovi signali rijetki (engl. sparse) u nekom odred¯enom transformacionom domenu, odnosno, ukoliko mogu biti reprezentovani pomoću malog broja nenultih tranformacionih koeficijenata. U praktičnim primjenama, od velikog značaja su i signali koji su aproksimativno rijetki, Uvod budući da se rekonstrukcioni koncepti razvijeni u kontekstu kompresivnog odabiranja (i obrade rijetkih signala, engl. sparse signal processing) na njih mogu primjenjivati u gotovo neizmijenjenoj formi. Koncept rijetkosti može se dovesti u vrlo usku vezu sa tzv. mjerama koncentracije. Naime, za rijetke signale se može reći da su visoko koncentrisani u odgovarajućem tranformacionom domenu. U tom smislu, u okviru ove doktorske disertacije razmatrano je više različitih transformacionih domena: diskretna Furijeova transformacija (DFT), diskretna Hermitska transformacija (DHT), diskretna kosinusna transformacija (DCT), kao i vremensko frekvencijske reprezentacije - kratkotrajna Furijeova transformacija (STFT), Wigner-ova distribucija i S-metod. Posebno razmatranje svakog od ovih transformacionih domena važno je iz dva razloga. Kao prvo, rijetkost odred¯enih klasa signala usko je vezana za transformacioni domen. Drugo, uticaj nedostajućih (eliminisanih ili fizički nedostupnih) odbiraka na svaki transformacioni domen se manifestuje različito, što je posljedica specifičnih svojstava tih domena. Koncepti rijetkosti i mjera koncentracije signala u transformacionim domenima predstavljaju okosnicu istraživanja prezentovanih u ovoj doktorskoj tezi. U tom smislu, treba naglasiti da problematika rekonstrukcije nije sagledana isključivo kroz prizmu kompresivnog odabiranja. To ilustruje, na primjer, druga glava disertacije, gdje je koncept rijetkosti iskorišćen za parametrizaciju diskretne Hermitske transformacije, u cilju postizanja visoko koncentrovane reprezentacije signala. Takva reprezentacija je omogućila uklanjane šuma, kompresiju, ali i CS rekonstrukciju. Još jedan primjer je i dekompozicija multivarijantnih signala u kontekstu vremensko-frekvencijske analize, koja je prezentovana u sklopu četvrte glave disertacije. Iako se ne razmatra rekonstrukcija primjenom matematičke aparature kompresivnog odabiranja, dekompozicija nesumnjivo predstavlja rekonstrukciju pojedinačnih komponenti signala, i to zasnovana na mjerama koncentracije. Osnovni koncepti vezani za rekonstrukciju rijetkih signala prezentovani su u prvoj glavi. Ovdje je dat i kratak osvrt na Furijeov transformacioni domen, posebno u smislu matematičkog modelovanja uticaja nedostajućih odbiraka na tranformacione koeficijente. Navedena analiza bila je inspiracija za istraživanja u domenima diskretne Hermitske i diskretne kosinusne transformacije. Dodatno, ova glava sadrži kratak opis nekoliko osnovnih algoritama za rekonstrukciju, koji su detaljnije razrad¯eni u preostalim glavama teze. Hermitska transformacija i njene diskretne forme sagledani su u drugoj glavi disertacije. Pored doprinosa koji se tiču analize uticaja nedostajućih odbiraka, prezentovani su i algoritmi za optimizaciju diskretne Hermitske transformacije i analiza uticaja aditivnog šuma. Posebno je bitno naglasiti razmatrane aspekte primjene: kompresiju i rekonstrukciju elektrokardiografskih (EKG) signala i rekonstrukciju UWB signala. Jednodimenziona i dvodimenziona diskretna kosinusna transformacija predmet su proučavanja u trećoj glavi doktorske teze. Uticaj nedostajućih odbiraka na ove transformacione domene je detaljno razrad¯en, a analiza je obojena primjenama u obradi audio signala i digitalne slike. U posljednjoj glavi, razmatraju se vremensko-frekvencijske reprezentacije - kratkotrajna Furijeova transformacija, Wigner-ova Uvod distribucija i S-metod. Kroz rekonstrukciju djelova ISAR signala, STFT je povezana sa konceptima kompresivnog odabiranja. Kroz dekompoziciju multivarijantnih signala koja je zasnovana na primjeni STFT, Wigner-ove distribucije i S-metoda, pokazano je da se koncepti mjera koncentracije mogu iskoristiti i za rekonstrukcije koje nijesu striktno vezane za kompresivno odabiranje. Glava 1 Rekonstrukcija rijetkih signala sa osvrtom Furijeov transformacioni domen 1.1 Rijetkost signala i redukovani skup mjerenja Rijetki signali se mogu okarakterisati malim brojem nenultih koeficijenata u jednom od njihovih transformacionih domena [1, 3, 5, 7–11, 15, 16, 20, 26–28, 30–32, 34–37]. Ovi signali mogu biti rekonstruisani na osnovu redukovanog skupa dostupnih odbiraka – mjerenja [1, 3, 5, 7–11, 15, 16, 20, 26–28, 30, 35]. Mjerenja su linearne kombinacije koeficijenata iz domena rijetkosti signala. Odbirci signala se mogu smatrati mjerenjima u slučaju linearnih transformacija. U odred¯enom broju primjena, redukovani broj odbiraka može biti posljedica njihove fizičke nedostupnosti, dok u drugim primjenama oni su rezultat namjere da se redukuje broj mjerenja, a pri tome sačuva cijela informacija (kompresija signala), [1, 3]. Nedostupnost odbiraka signala može nastati i kao posljedica njihovog namjernog odbacivanja, na primjer, u slučaju oštećenja jakim šumom [7]. U obradi signala, najzastupljeniji transformacioni domen jeste Furijeov domen, [7, 28]. Ulogu mjerenja u tom slučaju imaju odbirci signala. [1, 3]. Odgovarajuće mjerne matrice su parcijalne matrice diskretne Furijeove transformacije (DFT), ali i parcijalne slučajne Furijeove matrice [1, 3]. Uticaj redukovanog skupa odbiraka na analizu i rekonstrukciju/sintezu detaljno su proučene u [7]. 1.1.1 Rijetkost i mjerenja Razmatra se skup od N koeficijenata X(k), za k = 0,1,...,N − 1. Odgovarajući vektor koeficijenata je X. Po definiciji, ovaj vektor je rijedak (engl. sparse) ukoliko je broj njegovih nenultih keficijenata, u oznaci K, mnogo manji od ukupnog broja koeficijenata N, K ≪ N odnosno X (k) = 0, za k ∈/ {k1, k2, . . . , kK } = ΠK . (1.1) Broj K će dalje biti označen kao stepen rijetkosti. Mjerenje vektora X se može posmatrati kao linearna kombinacija njegovih elemenata (koeficijenata) X(k). Neka je i-to mjerenje označeno sa y(i). Ukoliko je dostupno samo NA mjerenja y(0), y(1), . . . , y(NA − 1), ona se mogu zapisati u vidu sistema od NA linearnih jednačina N−1 y(i) = X(k)ϕk(i), i = 0, 1, . . . , NA − 1, M < N, (1.2) ∑k=0 gdje su ϕk(i) težinski (ili mjerni) koeficijenti. U matričnoj formi, ovaj sistem je: y(0) ϕ0(0) ϕ1(0) . . . ϕN−1(0) X(0) ⎡ y(1) ⎤ = ⎡ ϕ0(1) ϕ1(1) . . . ϕN−1(1) ⎤⎡ X(0) ⎤ . . . . ⎢ y(NA − 1) ⎥⎢⎥ ϕ0(NA − 1) ϕ1(NA − 1) ϕN−1(NA − 1) ⎣⎣ ⎥⎥ X(N − 1) (⎦1.3) ⎦⎦⎣ odnosno y = AX. (1.4) Matrica A, čiji su elementi težinski koeficijenti ϕk(m) naziva se mjerna matrica. 1.1.2 Interpretacija u obradi signala Koncepti rijetkih vektora i mjerenja će dalje biti razmatrani u kontekstu obrade signala. U tom cilju, posmatra se signal x(n) i njegova linearna transformacija

X(k): N−1 x(n) = X (k) ϕk (n), (1.5) ∑k =0 94

odnosno, u matričnoj formi: x= ΨX, (1.6) pri čemu je transformaciona matrica označena sa Ψ, njeni elementi su ϕk(n), dok je x vektor-kolona koji sadrži odbirke signala, a X je vektor-kolona sa odgovarajućim transformacionim koeficijentima. Pretpostavlja se da je signal K-rijedak u transformacionom domenu, što znači da je X(k) ≠ 0, za k ∈ ΠK i X(k) = 0, za k ∈/ ΠK. (1.7) 5 gdje je ΠK = {k1,k2,...,kK} skup pozicija nenultih transformacionih koeficijenata. Broj nenultihtransformacionihkoeficijenatajednakje: ‖X‖0 = card {X} = K, (1.8) gdje se veličina N−1 ‖X‖0 = |X(k)|0 (1.9) ∑k=0 naziva ℓ0-normom ili ℓ0-pseudo-normom. Ona ne posjeduje klasična svojstva normi, već predstavlja kardinalnost skupa, odnosno, broj nenultih transformacionih koeficijenata u vektoru X. Po definiciji, važi |X(k)|0 = 0 za

|X(k)| = 0 i |X(k)|0 = 1 za |X(k)| ≠ 0. Za signal x(n) 116

čiji transformacioni koeficijenti X(k) = T{·} zadovoljavaju card {X} = K ≪ N kaže se da je rijedak u transformacionom domenu T. Za linearne transformacije, K-rijetki signal može biti predstavljen kao linearna kombinacija K koeficijenata X(k) x(n) = X (k)ϕk (n). (1.10) k∑∈ΠK Dakle, odbirak signala može se interpretirati kao mjerenje linearne kobinacije vrijednosti X(k). Primarna problematika koja se razmatra u ovoj disertaciji jeste mogućnost rekonstrukcije signala sa stepenom rijetkosti K na osnovu redukovanog seta od NA odbiraka – mjerenja. Kompresivno odabiranje (odnosno, rekonstrukcija rijetkih signala) podrazumijeva da su odbirci signala x(n), odnosno mjerenja, dostupni na slučajnim pozicijama ni ∈ NA ={n1, n2, . . . , nNA} ⊆

N = {0, 1, 2, 3, . . . , N − 1}. (1. 11) Sa N = {0,1,2, 3 ,...,N 102

− 1} je označen skup svih pozicija odbiraka signala x(n) dok je sa NA ={n1,n2,...,nNA} označen njegov podskup od NA elemenata, gdje je NA ≤ N. U daljem izlaganju, vektor dostupnih mjerenja će biti označen sa y: y = [x(n1), x(n2), . . . , x(nNA)]T , (1.12) gdje važi y(i) = x(ni+1), za i = 1, 2, . . . , NA. U opštem slučaju, dostupni odbirci, odnosno mjerenja linearne kombinacije koeficijenata X(k)) definisana izrazom (1.10) za ni ∈ NA ={n1, n2, . . . , nNA} mogu se zapisati kao sistem od NA linearnih jednačina: x(n1) ϕ0(n1) ϕ1(n1) ... ϕN−1(n1) X (0) ⌈ x(n2) ⌉ = ⌈ ϕ0(n2) ϕ1(n2) ... ϕN−1(n2) ⌉⌈ X (0) ⌉ . . . . , (1.13) ⎜ x(nNA) ϕ0(nNA) ϕ1(nNA) . . . ϕN −1(nNA) X (N − 1) ⌊ ⌉⌋⌊⌊ ‖ ⌉⌋⌊ ⌋ ili skraćeno: y = AX (1.14) gdje je, kako je već istaknuto, A mjerna matrica, dimenzija NA × N . U razmatranom kontekstu, nije poznato za koje pozicije ΠK = {k1, k2, . . . , kK } važi da je X (k) = 0, k ∈/ ΠK , odnosno, informacija o pozicijama nenultih koeficijenata nije ugrad¯ena u mjernu matricu. Ukoliko bi nekim odgovarajućim postupkom bilo moguće odrediti skup pozicija ΠK , sistem jednačina za mjerenja bi se mogao zapisati u sljedećoj formi: x(n1) ϕk1 (n1) ϕk2 (n1) ⌈ x(n2) ⌉⌈ ϕk1 (n2) ϕk2 (n2) . = . . ⎜ x(nNA) ⎜ϕk1 (nNA) ϕk2 (nNA) ⌊ ⌋⌊⌊ . . . ... ϕkK (n1) X (k1) ϕkK (n2) ⌉⌈ X (k2) ⌉ . . , (1.15) ϕkK (nNA) ⎜⎜ X (kK) ⌋⌊ ⌋ ⎜to jest y = AK XK . (1.16) Dakle, matrica AK bi se dobila na osnovu mjerne matrice A, izostavljanjem onih kolona koje odgovaraju koeficijentima X(k) = 0. Pod pretpostavkom da postoji K nenultih koeficijenata X(k) od ukupno N, ukupan broj mogućih različitih matrica AK jednak je ukupnom broju mogućih kombinacija, NK . Za jedan realni slučaj signala (odnosno transformacionog vektora) dužine N = 256 koji im(a K) = 6 nenultih koeficijenata, broj ovih kombinacija je NK = 2566 ≈ 3.6853 · 1011. ( ) ( ) 1.1.3 Furijeova mjerna matrica U obradi signala, diskretna Furijeova transformacija (DFT) predstavlja jednu od najznačajnijih transformacija. Za signal x(t) ograničenog trajanja T koji je odabran uniformno, u skladu sa Teoremom o odabiranju, čiji su odbirci x(n) = x(n∆t), gdje je ∆t korak odabiranja i ∆t = T/N, diskretna Furijeova transformacija X(k) se definiše sljedećim izrazom:

N−1 X(k) = x(n)e−j2πnk/N, k = 0, 1, . . . , N − 1, (1.17) **∑n=0** 27

dok je odgovarajuća inverzna transformacija

N−1 x **(n)= X(k)ej2πnk/N, n=0,1,...,N−1. ∑k=** 27

1 (1.18) Koeficijenti inverzne DFT matrice su ϕk(n) = ej2πnk/N . U slučaju redukovanog skupa odbiraka y = [x(n1), x(n2), . . . , x(nNA)]T , koji su dostupni na pozicijama ni ∈ NA ={n1, n2, . . . , nNA} ⊆ N =

{0, 1, 2, . . . , N − 1}, uz **y(i) = x(** ni **+1)** = Nk=−11 X **(k)** 119

ej2πnik/N , Furijeova mjerna matrica data je sljedećim izrazom: ∑ 1 ej2πn1/N . . . ej2πn1

(N−1)/N A= **1** ⌈ 1 ej2πn2 **/N** ej2πn2 **(N−1)/N N . . . . .** ⌉ . . **(1.** 19) ⎜ 1 ej2πnNA **/N** ej2πnNA **/N)** 75

⌊ | ⌋ Navedena matrica je poznata pod nazivom parcijalna inverzna DFT matrica. U nekim slučajevima, kako bi se postigla normalizacija kolona tako da je njihova energija jednaka jedinici, faktor N1 se može zamijeniti faktorom N1A . 1.2 Uslovi za rekonstrukciju 1.2.1 Direktna pretraga u prostoru koeficijenata Razmotrimo prvo simplifikovani problem rekonstrukcije signala čiji vektor koeficijenata X ima samo jedan koeficijent sa nenultom vrijednošću, odnosno, stepen rijetkosti K = 1. Pozicija i amplituda nenultog koeficijenta X(i) su nepoznati. Jedan pristup rješavanju problema jeste mjerenje svih N koeficijenata X(k), za k = 0, 1, . . . , N − 1. Med¯utim, kako je samo jedan koeficijent nenulti, problem odred¯ivanja nepoznatog koeficijenta se može riješiti sa značajno manjim brojem mjerenja. Ako se uzme samo jedno dostupno mjerenje vektora X: N −1 y(0) = X(k)ϕk(0). (1.20) ∑k=0 sa težinskim koeficijentima ϕk(0) = ak, k = 0,1,...,N − 1, tada se ono u prostoru koeficijenataX(0), X(1),...,X(N − 1) može interpretirati kao N-to dimenziona hiperravan. Budući da je poznato da tačno jedna promjenljiva X (i) ima nenultu vrijednost, bilo koji presjek hiperravni sa bilo kojom koordinatnom osom predstavljao bi rješenje problema rekonstrukcije za K = 1. Jedno mjerenje produkovalo bi N mogućih pojedinačnih nenultih vrijednosti u formi: X(k) = y(0)/ϕk(0), k = 0, 1, 2, . . . , N − 1, (1.21) pritom pretpostavljajući da za sve težinske koeficijente važi ϕk(0) ≠ 0. Zaključuje se da jedno mjerenje nije dovoljno za rješavanje razmatranog problema. Potrebno je najmanje još jedno mjerenje. Sa dva dostupna mjerenja, y(0) i y(1), u prostoru nepoznatih koeficijenata (odnosno promjenljivih) formiraju se dvije hiperravni, koje definišu dva seta mogućih rješenja X(k) = y(0)/ ϕk(0), k = 0, 1, 2, . . . , N − 1, (1.22) X(k) = y(1)/ϕk(1), k = 0, 1, 2, . . . , N − 1, (1.23) Ukoliko ove dvije hiperravni imaju zajedničku tačku u k = i, tada je ta tačka X(i) = y(0)/ϕi(0) = y(1)/ϕi(1) (1.24) jedinstveno rješenje posmatranog problema. Može se jednostavno pokazati da je zajednička vrijednost dva mjerenja X(i) = y(0)/ϕi(0) = y(1)/ϕi(1) jedinstvena ako je zadovoljeno: det ϕi(0) ϕk(0) [ϕi(1) ϕk(1)] = ϕi(0)ϕk(1) − ϕi(1)ϕk(0) ≠ 0. (1.25) U cilju generalizacije i izvod¯enja opštih zaključaka, definišimo rang i spark matrice. Za matricu A koja ima NA vrsta i N ≥ NA kolona, rang matrice A jednak je najvećem broju nezavisnih vrsta, odnosno kolona te matrice, gdje važi 1 ≤ rank {A} ≤ NA. Za bilo koju matricu A2 dimenzija 2 × 2 koja je podmatrica mjerne matrice važi da je rank{A2} = 2. Spark matrice je najmanji broj zavisnih kolona (vrsta) matrice. Po definiciji, ako kolona sadrži sve nule, tada važi spark {A} = 1. Uočimo i da u opštem slučaju važi 2 ≤ spark {A} ≤ NA + 1. Ukoliko ne postoji nijedna kolona sa svim nulama, i ukoliko je postoje dvije linearno zavisne kolone, tada je spark {A} = 2. U razmatranom primjeru, rekonstrukcija je jedinstvena ako važi spark {A} > 2, ili, drugim riječima, ako u matrici A ne postoje dvije linearno zavisne kolone. Razmotrimo sada opšti slučaj K -rijetkog vektora X. Korišćenjem podskupa od K mjerenja, u oznaci yK(1), može se dobiti skup rješenja koji predstavljaju odgovarajuće vektore nenultih koeficijenata. Za svaki skup pretpostavljenih pozicija nenultih koeficijenata iz X (k), formira se odgovarajući vektor XK koji ima K nenultih elemenata na pozicijama k ∈ ΠK = k1, k2, . . . , kK . Sada imamo sistem y(K1) = AK XK koji se formira za svaki mogući skup pozicija {k1, k2, . . . , kK }. Mogućih rješenja je NK . Ukoliko se uvede još jedan sku(p)od K mjerenja, u oznaci y(K2), ponovo rješavamo sistem oblika y(K2) = AKXK, i to za svaki skup mogućih pozicija {k1,k2,...,kK}. Takvih kombinacija je ponovo NK . Ukoliko dva dobij(ena)skupa od po NK rješenja imaju jedan zajednički član XK, tada je pronad¯eno rješenje problema. ( ) U cilju ispitivanja jedinstvenosti, pretpostavimo da je moguće pronaći dva moguća rješenja X stepena rijetkosti K, kao i da je dostupno NA = 2K mjerenja u vektoru y. U tom slučaju, rješenje će biti jedinstveno ukoliko su determinante svih podmatrica A2K matrice A različite od nule. To drugim riječima znači da sve podmatrice A2K moraju biti nesingularne. Ako dva nenulta dijela rješenjâ označimo sa X(K1) i X(K2), tada će oba zadovoljavati jednačinu mjerenja, u smislu: A(K1) A(2))K X(K1) X(K2) [0K] = y i A(K1) A(K2) [ ] [0K] = y. (1.26) [ ] Sa A(K1) i A(K2) su označene podmatrice matrice A koje odgovaraju elementima iz X(K1) i X(K2), respektivno. Ukoliko je determinanta matrice A2K = A(K1) A(2))K , dimenzija 2K × 2K, različita od nule, tada ne postoje nenulta rješenja X(K1[) i X(K2). U opšte]m slučaju, ako su sve moguće podmatrice A2K nesingularne, uključujući i sve podmatrice nižeg ranga, tada je nemoguće da postoje dva rješenja stepena rijetkosti K. Zato je rješenje u tom slučaju jedinstveno. Iz prethodne analize, može se zaključiti da je rješenje razmatranog problema, sa signalom čiji je stepen rijetkosti K, jedinstveno, ukoliko je zadovoljen sljedeći uslov: spark {A} > 2K. (1.27) U opštem slučaju, broj mjerenja je NA ≥ 2K . Za rješavanje problema ovim putem, potrebno je razmotriti sve moguće vektore XK koji imaju K nenultih elemenata, gdje je k ∈ ΠK . Kako postoji NA ≥ 2K jednačina a samo K nepoznatih, potrebno je riješiti sistem u smislu najmanjih kvadrata X = AHKAK −1 AHKy (1.28) i to za svaku moguću kombinaciju pozicija nenultih elemenata {k1, k2, . . . , kK}, kojih je, kako ( ) je već istaknuto, NK , što je u praksi jako veliki broj. Traženo rješenje je ono koje minimizuje grešku ‖y − AKX(K)‖22. Ovakav problem je veoma teško riješiti u razumnom vremenu, i spada u klasu teško izračunjivih, tzv. NP-hard problema, budući da postoji nepolinomijalni broj kombinacija koje treba ispitati. 1.2.2 Formalni uslovi U slučaju proizvoljnog rijetkog vektora X stepena rijetkosti K i u slučaju najmanje NA ≥ 2K mjerenja – dostupnih odbiraka, jedinstvenost rješenja se može garantovati ukoliko su mjerenja y = AX (1.29) nezavisna u smislu da se na osnovu njih može rekonstruisati proizvoljni 2K -rijetki signal. To drugim riječima znači da sve podmatrice A2K mjerne matrice A moraju biti nesingularne, odnosno, treba da važi da su sve odgovarajuće determinante reda 2K različite od nule: ϕk1(n1) ϕk2(n1) . . . ϕk2K(n1) det(A2K) = det ⎡ ϕk1(n2) ϕk2(n2) . . . ϕk2K(n2) ⎤ . . ... . ≠0 (1.30) ⎢ ϕk1 (n2K) ϕk2 (n2K) . . . ϕk2K (n2K) ⎣ ⎢ ⎦ i to za bilo koju kombinaciju indeksa pozicija dostupnih odbiraka {n1,n2,...,n2K} ⊆ {n1,n2,...,nNA}, za NA ≥ 2K, i za bilo koju kombinaciju indeksa {k1,k2,...,k2K} ⊆ {0,1,2,...,N −1}. Broj mogućih kombinacija klase 2K od N elemenata je 2NK , što u realnim okolnostima predstavlja jako veliki broj. (Na bazi prethodne diskusije, uslov se može interpretirati i u sljedećem obliku:) spark{A} > 2K. (1.31) Činjenica da je potrebno provjeriti da li postoji 2K nezavisnih mjerenja, znači da treba zapravo provjeriti da li za matricu A2K važi da je rank(A2K) = 2K . Ukoliko je NA > 2K , nema potrebe ispitivati kombinacije po ni u cilju formiranja kvadratne matrice dimenzija 2K × 2K iz matrice dimenzija NA × 2K za NA > 2K , imajući u vidu da se rang matrice A2K dimenzija NA × 2K može provjeriti testiranjem ranga matrice AT2K A2K dimenzija 2K × 2K , korišćenjem veze: rank(A2K) = rank(AT2K A2K). (1.32) Matrica AT2K A2K se naziva Gramovom matricom matrice A2K . Za matrice A2K sa kompleksnim elementima, koristi se ekvivalentna Hermitska matrica AH2K A2K , pri čemu (·)H označava Hermitsko transponovanje. Jedan način za odred¯ivanje da li je rang matrice AT2K A2K jednak 2K jeste korišćenje sljedećeg uslova: det(AT2K A2K) = d1d2 . . . d2K ≠ 0 (1.33) gdje su d1, d2, . . . , d2K sopstvene vrijednosti kvadratne matrice AT2KA2K. Važno je uočiti da su sve sopstvene vrijednosti di simetrične matrice AT2KA2K di = eig(AT2K A2K) (1.34) nenegativne. Rang matrice AT2K A2K jednak je 2K ukoliko minimalna sopstvena vrijednost matrice AT2K A2K zadovoljava: |dmin| = min{|d1|,|d2|,...,|d2K|} > 0, (1.35) za sve podmatrice A2K matrice A. U numeričkim i praktičnim realizacijama ne bi bilo povoljno da je det{A2K } ili det{A} blisko nuli. Iako bi u tom slučaju bio zadovoljen uslov jedinstvenosti rješenja, došlo bi do visoke osjetljivosti na uticaj šuma u mjerenjima, bilo u analizi, bilo u inverziji koja je involvirana u procedurama za rekonstrukciju. Stoga, važno je istaći da postoji praktični zahtjev da posmatrana determinanta bude ne samo različita od nule, već i da se u dovoljnoj mjeri razlikuje od nule, kako bi se obezbijedili stabilnost inverzije i robustnost na uticaj šuma. Svojstvo ograničene izometrije U nastavku će biti podrazumijevane normalizovane energije kolona matrice A, koje su u vezi sa elementima na dijagonali od AT2K A2K . Norma matrice A2K zadovoljava sljedeće svojstvo: λmin ≤ ‖A‖2XK2XK2‖K22 ‖22 ≤ λmax (1.36) gdje su λmin i λmax minimalna i maksimalna sopstvena vrijednost Gramove matrice AT2K A2K , dok ‖X‖22 =

|X (0)|2 + |X (1)|2 + · · · + |X (N − 1)|2

113

. (1.37) predstavlja kvadriranu ℓ2-normu vektora X. U izrazu (1.36) vektor X2K predstavlja proizvoljni 2K-rijetki vektor. Linearna transformaciona matrica A posjeduje svojstvo izometrije ukoliko očuvava intenzitet vektora u N-to dimenzionom prostoru, odnosno, ako važi: ‖AX‖22 = ‖X‖22 tj. ‖AX‖222 = 1. (1.38) ‖X‖2 Razvojem teorije kompresivnog odabiranja i obrade rijetkih signala, za mjerne matrice je bilo neophodno uvesti nešto blaži uslov izometrije. Svostvo ograničene izometrije (engl. Restricted Isometry Property - RIP) matrice A2K važi ako je 1 − δ2K ≤ ‖A2K X2K2 ‖22 ≤ 1 + δ2K , (1.39) ‖X2K ‖2 i to za bilo koji 2K -rijetki vektor X2K . Ovdje je uslov ‖A2K X2K ‖22 = ‖X2K ‖22 relaksiran u smislu da je relativna apsolutna vrijednost razlike ‖A2K X2K ‖22 − ‖X2K ‖22 dovoljno mala u pored¯enju sa energijom rijetkog signala, odnosno, u opsegu od 0 ≤ δ2K < 1. Konstanta ograničene izometrije, δ2K predstavlja mjeru koliko matrica A2K odstupa od matrice koja zadovoljava svojstvo izometrije. Pored¯enjem izraza (1.36) i (1.39) zaključuje se da važi: δ2K = max {1 − λmin, λmax − 1} , (1.40) pri čemu je izometrijska konstanta δ2K uobičajeno definisana kao λmax − 1 = max eig AT2K A2K −I . U slučaju matrica sa kompleksnim vrijednostima, koristi se A2HK A{2K .( )} Za K -rijetki signal XK i mjernu matricu A, RIP uslov je zadovoljen ako (1.39) važi za sve podmatrice AK , za 0 ≤ δK < 1. Rješenje rekonstrukcije za K -rijetki signal će biti jedinstveno ukoliko mjerna matrica zadovoljava RIP uslov za 2K -rijetki vektor X2K i izometrijsku konstantu 0 ≤ δ2K < 1. Važno je primijetiti da je RIP uslov zadovoljen za λmin > 0, što znači da su sve matrice AT2K A2K nesingularne. Drugim riječima, ako je X K -rijetki vektor dužine N , tada on može biti jedinstveno rekonstruisan iz redukovanog skupa od NA mjerenja/odbiraka y = AX, ukoliko je mjerna matrica A takva da njene podmatrice A2K zadovoljavaju 2K RIP sa izometrijskom konstantom 0 ≤ δ2K < 1, za sve kombinacije od 2K kolona, od ukupno N kolona. Svojstvo ograničene izometrije je za malo δ2K bliže svojstvu izometrije i poboljšava stabilnost rekonstrukcije. Invertibilnost i robustnost matrice se uobičajeno definiše kondicionim brojem cond AT2K A2K λλmmainx = { } Ako matrica A2K zadovoljava RIP sa izometrijskom konstantom δ2K , tada važi cond AT2K A2K 11 +− δδ22KK ≤ , { } (1.41) (1.42) pa manje δ2K povlači da kondicioni broj bude bliži vrijednosti 1, koja se veže za stabilnu invertibilnost matrice i slabiju osjetljivost na ulazni šum, što označava činjenicu da manje varijacije u mjerenjima neće uzrokovati veće varijacije u rezultatu rekonstrukcije. Uslov nekoherentnosti Indeks koherentnosti matrice A se definiše kao μ = max |μ(m, k)| , za m ≠ k (1.43) i predstavlja maksimalnu apsolutnu vrijednost normalizovanog skalarnog proizvoda dvije kolone posmatrane matrice: μ(m, k) = ∑Ni=A1Ni=ϕA1m|ϕ(nki()nϕi∗k)|(2ni) , (1.44) pri čemu ϕk(ni) označava k-tu kolonu matrice∑A. Može se uočiti da su μ(m, k) elementi mimo glavne dijagonale matrice AHA, normalizovani odgovarajućim elementima na dijagonali. Indeks koherentnosti je veoma bitan u analizi matrica mjerenja. Treba da bude što je moguće manji (odnosno, mjerna matrica treba da bude što je više nekoherentna). Sa manjim vrijednostima ovog indeksa, matrica AHA postaje bliža jediničnoj matrici. Za matricu A dimenzija NA × N indeks koherentnosti ne može biti proizvoljno mali. Pokazuje se da važi Velčova gornja granica (engl. Weltch upper bound): μ ≥ N − NA √ NA (N − 1) . (1.45) Rekonstrukcija K -rijetkog signala iz NA mjerenja je jedinstvena ako je zadovoljeno: K < 1 + 1 1 2 . (1.46) (μ) Indeks koherentnosti se može koristiti u odred¯ivanju donje granice za spark matrice: spark{A} ≥ 1 + 1 μ . (1.47) ( ) Ako je X rješenje sistema jednačina y = AX tako da je ‖X‖0 = K < 1 + 1 1 2 ≤ 1 spark{A}, (1.48) (μ) 2 tada je X rješenje najmanjeg mogućeg stepena rijetkosti. Indeks koherentnosti se može vezati i za izometrijsku konstantu na sljedeći način: δK ≤ (1 − K)μ. (1.49) 1.3 Rekonstrukcija zasnovana na ℓ0-normi Formalno, problem rekonstrukcije rijetkih signala podrazumijeva da je signal moguće rekonstruisati iz redukovanog skupa mjerenja definisanih vektorom y, nalaženjem vektora X sa najmanjim mogućim stepenom rijetkosti a koji istovremeno odgovara mjerenjima y. Ako su mjerenja x(ni) dostupna na slučajnim pozicijama ni ∈ NA = {n1, n2, . . . , nNA} ⊆ {0, 1, 2, . . . , N − 1}, i ako nenultih koeficijenata ima K = ‖X‖0, što je notacija zasnovana na ℓ0-normi, problem se formalno matematički definiše u obliku: min ‖X‖0 pod uslovom y = AX. (1.50) Važno je istaći da se ℓ0-norma ne može direktno koristiti u minimizacionim procedurama. Med¯utim, rješavanje problema (1.50) moguće je obaviti implicitno, odred¯ivanjem pozicija k ∈ {k1,k2,...,kK} = ΠK nenultih koeficijenata, gdje je K ≪ N i korišćenjem činjenice da je X(k) = 0 za k ∈/ {k1,k2,...,kK} = ΠK. 1.3.1 Rekonstrukcija u slučaju poznatih pozicija Posmatra se diskretni signal x(n) koji je rijedak u transformacionom domenu definisanom baznim funkcijama ϕk(n), k = 0,1,...,N − 1. Broj nenultih koeficijenata K je mnogo manji od originalnog broja odbiraka signala, N, odnosno, važi da je X(k) = 0 za k ∈/ {k1,k2,...,kK} = ΠK i K ≪ N. Posmatrani signal x(n) = X (k)ϕk (n). (1.51) k∈{k1∑,k2,...,kK} stepena rijetkosti K može biti rekonstruisan iz NA odbiraka, gdje je NA ≤ N. U tom slučaju, dakle, postoji K nenultih vrijednosti X(k1), X(k2),...,X(kK), a za sve ostale koeficijente X(k), za k ∈/ {k1,k2,...,kK} važi da su jednaki nuli. Pretpostavimo da su poznate pozicije {k1, k2, ..., kK}. Tada se jednačina mjerenja može zapisati u obliku: X(k)ϕk(ni) = x(ni), za i = 1, 2, . . . , NA ≥ K. k∑∈K U matričnoj formi, ovaj sistem od K nepoznatih i NA jednačina dat je u obliku: AK XK = y, (1.52) (1.53) gdje je XK = [X (k1), X (k2), . . . , X (kK)]T vektor nepoznatih nenultih koeficijenata (na poznatim pozicijama, po pretpostavci), dok je y = [x(n1), x(n2), . . . , x(nNA)]T vektor mjerenja, odnosno, dostupnih odbiraka signala. Matrica AK , dimenzija NA × K , je podmatrica mjerne matrice A, dobijena odbacivanjem kolona koje odgovaraju pozicijama k ∈/ {k1, k2, . . . , kK } koeficijenata koji su jednaki nuli. Ona je sljedećeg oblika: ϕk1 (n1) AK = ⎡ ϕk1 (n2) . ⎢ ϕk1 (n NA) ⎣ ϕk2 (n1) . . . ϕk2 (n2) . . . . ϕk2 (nNA) . . . ϕkK (n1) ϕkK (n2) ⎤ . . (1.54) ϕkK (nNA) ⎦ ⎥ Rješenje se dobija minimizacijom kvadrata razlike izmed¯u dostupnih odbiraka i njihovih vrijednosti koje se dobijaju na osnovu rekonstruisanih koeficijenata: 2 e2 = ∣ y(n) − X(k)ϕk(n) = n(∑y∈N−A∣∣∣∣AK XK)k∑H∈K(y − AK XK∣) = ‖y‖22 − 2XHK AHK y + XHK AHK AK XK (1.55) Uz simboličko diferenciranje po vektoru nepoznatih, dobija se minimum od e2 u obliku: ∂∂Xe2HK = −2AHK y + 2AHK AK XK = 0. (1.56) Rješenje je dato izrazom: XK = AHK AK −1 AHK y = pinv(AK)y, (1.57) a pinv(AK) predstavlja pseudo-inverziju matrice AK . ( ) 1.3.2 Estimacija nepoznatih pozicija – OMP i CoSaMP algoritmi U opštem slučaju, pozicije nenultih koeficijenata u vektoru X nijesu poznate. One se mogu estimirati matching pursuit (MP) pristupom za rekonstrukciju rijetkih signala. Napredna verzija ovog algoritma poznata je pod nazivom orthogonal matching pursuit (OMP). Kod ovog pristupa, rekonstrukcija je zasnovana na iterativnom projektovanju vektora mjerenja y na kolone matrice A koje odgovaraju trenutno detektovanom setu pozicija nenultih koeficijenata, u oznaci Πˆ K . Označimo inicijalnu estimaciju sa X0 = AH y = AH AX. (1.58) Mjerenja se dobijaju kao linearne kombinacije nenultih koeficijenata iz domena rijetkosti signala, gdje su vrste mjerne matrice težinski koeficijenti.To zapravo znači da se projekcijom mjerenja y na mjernu matricu A mogu estimirati pozicije nenultih koeficijenata. Pozicija prvog koeficijenta se dobija kao: kˆ1 = arg max {|X0|} . (1.59) Zatim se rješava sistem (1.53), u cilju nalaženja minimuma ‖y − AKXK‖22, gdje matrica AK odgovara skupu ΠˆK = {kˆ1}. U tu svrhu, odred¯uju se odbirci signala y1 = A1X1, koji odgovaraju skupu ΠˆK = {kˆ1}. Ukoliko važi e = y1, tada je stepen rijetkosti traženog signala 1, i X1 predstavlja rješenje problema. Ako to nije slučaj, formira se signal e1 = y − y1. Pozicija druge komponente se estimira korišćenjem signala e1 u obliku: kˆ2 = arg max AH e1 . (1.60) čime se formira skup ΠˆK = {kˆ1, kˆ2}, i za njega ∣se pon∣avlja prethodno opisani postupak, uz {∣ ∣} K = 2. Sada se koriste koeficijenti X(ˆk1) i X(ˆk2), gdje se prvobitno dobijeni koeficijent X(ˆk1) reestimira. Postupkom se dobija novi vektor X2, estimirana mjerenja y2 i signal greške e2 = y − y2. Ako je vektor e2 vektor nula, ili su njegovi elementi sa zadovoljavajuće malim vrijednostima, postupak se završava i rješenje je nad¯eno u obliku X2. Ako to nije slučaj, procedura se nastavlja, estimira se pozicija treće komponente. Procedura se završava kada greška bude jednaka nula, ili je u nekim prihvatljivim granicama, definisanim preciznošću ε. Rezime pristupa dat je u Algoritmu 1. Algoritam 1 OMP rekonstrukcioni algoritam Input: • Vektor mjerenja y • Mjerna matrica A • Broj odabranih koeficijenata u svakoj iteraciji r • Zahtijevana tačnost ε 1: ΠˆK ← ∅ 2: e ← y 3: while ‖e‖2 > ε do 4: (kˆ1, kˆ2, . . . , kˆr) ← pozicije r najvećih vrijednosti u AHe 5: ΠˆK ← ΠˆK ∪ {kˆ1, kˆ2, . . . , kˆr} 6: AK ← A(:, ΠˆK) kolone matrice A odabrane na osnovu ΠˆK 7: XK ← pinv(AK)y 8: yK ← AKXK 9: e ← y − yK 10: end while 11: X ← {XK za pozicije iz Π^K 0 za pozicije koje nijesu u Π^K Output: • Rekonstruisani koeficijenti X Nešto izmijenjena forma OMP algoritma poznata je pod nazivom Compressive Sampling Matched Pursuit (CoSaMP). U slučaju ovog pristupa, signal sa željenim stepenom rijetkosti K se dobija iterativnim putem. Ovdje se vrši projekcija vektora mjerenja y na kolone mjerne matrice A, i selekcija 2K pozicija sa najvećim magnitudama projekcije. Skup odabranih pozicija se proširuje pozicijama nenultih elemenata u trenutnoj estimaciji rijetkog vektora X. Zatim se nalazi rješenje u smislu najmanjih kvadrata, i K koeficijenata sa najvećim vrijednostima se proglašavaju za rekonstruisani vektor X. Mjerni vektor se ažurira, oduzimanjem trenutnog rješenja, a zatim se procedura iterativno ponavlja. CoSaMP rekonstrukciona procedura je predstavljena u Algoritmu 2. Procedura se ili ponavlja do predefinisanog broja iteracija, ili dok je zadovoljen kriterijum definisan normom vektora greške. Algoritam 2 CoSaMP rekonstrukcioni algoritam Input: • Mjerni vektor y • Mjerna matrica A • Željeni stepen rijetkosti K 1: X ← 0N ×1 2: e ← y 3: repeat 4: T1 ← pozicije 2K najvećih vrijednosti u AH e 5: T2 ← pozicije nenultih koeficijenata u X 6: T ← T1 ∪ T2 7: AT ← kolone iz matrice A definisane skupom T 8: B ← pinv(AT)y 9: Postaviti K koeficijenata sa najvećim vrijednostima iz B na odgovarajuće pozicije u X, a ostale koeficijente postaviti na nulu. 10: e ← y − AX 11: until zadovoljen kriterijum zaustavljanja Output: • Rekonstruisani K -rijetki vektor X 1.3.3 Šum u DFT domenu uzrokovan nedostajućim odbircima Razmatra se signal oblika K x(n) = Apej2πnkp/N , (1.61) ∑p=1 sa NA ≤ N dostupnih odbiraka na pozicijama n ∈ NA = {n1, n2, . . . , nNA} koji je K-rijedak u DFT domenu. Inicijalna DFT estimacija dobija se računanjem transformacije na bazi dostupnih mjerenja, pretpostavljajući nule na pozicijama nedostupnih odbiraka, na sljedeći način: K X(k) =

x(n)e−j2πnk/N = Ape−j2πn **(k−** kp **)/N . (1.** 62) **n∑∈** NA **n∑∈** 108

NA ∑p=1 Nedostajući odbirci se manifestuju kao šum u DFT domenu. DFT koeficijenti su stoga slučajne varijable. Mogu se razlikovati dvije grupe koeficijenatata, sa med¯usobno različitim statističkim karakteristikama. U nastavku slijedi izvod¯enje tih karakteristika. Srednja vrijednost Slučaj 1. Za k = ki ∈ {k1,k2,...,kK} i uz NA = card(NA), imaćemo: K X(ki) = AiNA + Ape−j2πn(ki−kp)/N. n∑∈NA ∑pp=≠1i Član χ = K Ape−j2πn(ki−kp)/N (1.63) (1.64) n∑∈NA ∑pp=≠1i za skup slučajnih pozicija NA = {n1, n2, . . . , nNA}, može biti interpretiran kao slučajna varijabla. Njena srednja vrijednost, po različitim realizacijama signala sa slučajno pozicioniranim dostupnim odbircima, jednaka je nuli, odnosno, važi E{χ} = 0. Stoga je srednja vrijednost koeficijenta X(ki) data izrazom: E{X(ki)} = AiNA. Slučaj 2. Za k ∈/ {k1,k2,...,kK} razmatrana slučajna varijabla je: K X(k) = Ape−j2πn(k−kp)/N. n∑∈NA ∑p=1 Njena srednja vrijednost jednaka je nuli: E{X(k)} = 0. (1.65) (1.66) (1.67) Dakle, za DFT koeficijente inicijalne estimacije, date izrazom (1.62), srednja vrijednost je definisana na sljedeći način: K μX(k) = E{X(k)} = NA Apδ(k − kp), (1.68) ∑p=1

gdje je δ(n) = 1 za n = 0 i δ(n) = 0 za n ≠ 0. 60

Varijansa Varijansa DFT koeficijenata inicijalne estimacije (1.62) definisana je sljedećim izrazom: σX2(k) = var{X(k)} = |Ap|2NA NN−−N1A [1 − δ(k − kp)] . K (1.69) ∑p=1 U nastavku će biti izveden ovaj izraz. Razmotrimo prvo slučaj kada je K = 1 i za k ≠ k1. Varijansa je, po definiciji var{X(k)} = E |A1|2 e−j2πm(k−k1)/N ej2πn(k−k1)/N (1.70) {n∑∈NA m∑∈NA } = E { |A1|2 + |A1|2 e−j2πm(k−k1)/N ej2πn(k−k1)/N m∑∈NA n∈N∑A,n≠m } Jasno je da važi: E |A1|2 = |A1|2NA. {n∑∈NA } (1.71) Lako se pokazuje i da važi: N−1 e−j2πm(k−k1)/N ej2πn(k−k1)/N = 0, (1.72) ∑n=0 budući da je suma po svim diskretnim indeksima vremena deterministička, dok je X(k) = 0 za k ≠ k1. Očekivanje ovog izraza je: N −1 E{e−j2πm(k−k1)/N ej2πn(k−k1)/N } = 0 (1.73) ∑n=0 Pošto su, za slučajno n, sve vrijednosti ej2πn(k−k1)/N jednako distribuirane, za očekivanje po velikom broju realizacija važi: E{e−j2πm(k−k1)/N ej2πn(k−k1)/N } = B, n ≠ m, { 1, n = m, (1.74) Iz (1.73) i (1.74) dalje slijedi: (N − 1)B + 1 = 0. (1.75) Članovi Ξ = E n∈NA,n≠m |A1|2 e−j2πm(k−k1)/N ej2πn(k−k1)/N iz (1.70) sada se mogu izračunati u obliku:{∑ } Ξ = |A1|2 (NA − 1)B = |A1|2 (NA − 1) − 1 . (N − 1) Varijansa slučajne varijable X(k), za k ≠ k1, konačno se može zapisati sljedećim izrazom: σX2(k)(k) = var(X(k)) = |A1|2 NA NN−−N1A . (1.76) Za k = k1 lako se dobija da važi: σX2(k)(k1) = 0, pošto se svi članovi X(k) sabiraju u fazi. U slučaju multikomponentnih (višekomponentnih) signala, tj. za K > 1, varijansa je jednaka sumi varijansi pojedinačnih komponenti na svim frekvencijama k: σN2 = σX2(k) = |Ap|2NA NN−−N1A , k ≠ ki, i = 1, . . . , K. K (1.77) ∑p=1 Na frekvencijama ki ∈ {k1, k2, . . . , kK }, vrijednosti varijanse su manje za |Ai|2 NA NN−−N1A , pa imamo σX2(k) = var{X(k)} = |Ap|2NA NN−−N1A , k = ki, i = 1, . . . , K, K (1.78) ∑pp=≠1i s obzirom na to da se sve vrijednosti i-te komponente sabiraju u fazi bez slučajnih varijacija na poziciji p = i. Prema centralnoj graničnoj teoremi, za 1 ≪ NA ≪ N realni i imaginarni djelovi DFT koeficijenata na pozicijama šuma, tj. za k ∈/ {k1, k2, . . . , kK } mogu biti opisani Gausovom distribucijom, N (0, σN2 /2) sa srednjom vrijednošću nula i varijansom σN2 = σX2(k)(k ≠ ki), i = 1, . . . , K . Za DFT koeficijent na poziciji p-te komponente signala, tj. za kp ∈ {k1, k2, . . . , kK }, realni i imaginarni djelovi mogu biti opisani sljedećim Gausovim distribucijama: N (NA Re{Ap}, σ2X(p)/2), i N (NA Im{Ap}, σX2(p)/2), respektivno, gdje su σX2(p) = σN2 − A2pNA NN−−N1A , prema dobijenom izrazu (1.69). Dublja interpretacija dobijenih izraza, i njihova generalizacija na slučaj diskretne Hermitske i diskretne kosinusne transformacije, biće prezentovani u drugoj i trećoj glavi ove disertacije. Na ovom mjestu, zadržaćemo se isključivo na primjenu prezentovanih rezultata u definisanju novog algoritma za rekonstrukciju rijetkih signala. Vjerovatnoća da je N − K koeficijenata koji odgovaraju šumu u DFT domenu uzrokovanom nedostajućim odbircima ispod praga T , može se definisati sljedećim izrazom: P (T) = 1 − exp − σ2 T 2 . (1.79) ((N)) Kako bi odredili pozicije komponenti signala, fiksiraćemo vjerovatnoću P (T) = P , i izračunati prag u sljedećem obliku: T = −σN2 log(1 − P N−1K) ≈ −σN2 log(1 − P N1). (1.80) √ √ Na bazi ovog praga, može se definisati jednostavan jednoiterativni postupak za rekonstrukciju rijetkih signala, prezentovan u Algoritmu 3. Uočimo da važi sljedeća aproksimacija: σN2 = p=1 A2pNA NN−−N1A NA n∈NA |x(n)|2NA NN−−N1A , k ≠ ki, i = 1, . . . , K. K ≈ 1 ∑Algoritam 3 Jednoiterativ∑na rekonstrukcija signala rijetkih u DFT domenu Input: • Mjerni vektor y • Mjerna matrica A • Vjerovatnoća za detekciju komponenti P 1: σN2 ← NA n∈NA |x(n)|2NA NN−−N1A 1 2: T← −σ∑N2log(1−PN1) 3: X0←√AHy 4: Πˆ K←{k:|X0(k)|>T} 5: AK←A(:,Πˆ K)kolonematriceAodabranenaosnovuΠˆ K 6: XK←pinv(AK)y 7: X ← {XK za pozicije iz Πˆ K 0 za pozicije koje nijesu u Πˆ K Output: • Rekonstruisani koeficijenti X 1.4 Rekonstrukcija zasnovana na ℓ1-normi Razmatra se N -dimenzioni vektor X, sa stepeno rijetkosti K i ukupno NA mjerenja y = AX, gdje je mjerna matrica A dimenzija NA × N , uz K < NA ≤ N . Vektor X se može rekonstruisati na osnovu posmatranog redukovanog skupa mjerenja y korišćenjem minimizacije mjere rijetkosti. Takva mjera je, pored ranije razmatrane ℓ0-norme i ℓ1-norma. Rješenje zasnovano na minimizaciji ℓ1-norme min ‖X‖1 pod uslovom y = AX (1.81) gdje je ‖X‖1 = Nk=−01 X(k), identično je rješenju minimizacije zasnovane na ℓ0-normi ∑ min ‖X‖0 pod uslovom y = AX (1.82) ako mjerna matrica A zadovoljava svojstvo ograničene izometrije za 2K -rijetki vektor: 1 − δ2K ≤ ‖A2K X2K2 ‖22 ≤ 1 + δ2K ‖X2K ‖2 (1.83) uz 0 ≤ δ2K < 2 − 1 i za sve podmatrice reda 2K mjerne matrice A. Važno je uočiti da je √ izometrijska konstanta u slučaju ℓ0-norme zadovoljavala 0 ≤ δ2K < 1. 1.4.1 Gradijentni algoritam za rekonstrukciju signala Kao reprezentativni primjer rekonstrukcije zasnovane na ℓ1-normi, ovdje će biti razmotren gradijenti rekonstrukcioni algoritam, u kojem se nedostajući odbirci tretiraju kao minimizacione varijable. Njihove vrijednosti se variraju sve dok se ne dostigne minimum mjere rijetkosti, odnosno, ℓ1-norme vektora transformacionih koeficijenata ‖X‖1. U cilju pronalaženja rješenja koje odgovara minimumu mjere rijetkosti, koristi se gradijent mjere. Suštinski, procedura odgovara poznatom metodu najbržeg spuštanja. Algoritam 4 Gradijentni algoritam za rekonstrukciju rijetkih signala Input: • Skup pozicija dostupnih odbiraka NA • Skup pozicija nedostajućih odbiraka NQ • Dostupni odbirci (mjerenja) y(n) • Transformaciona matrica Φ • Korak μ 1: m ← 0 2: Inicijalizovati vektor x(0) sa:

x(0)(n) ← y(n) for n ∈ NA { 0 for **n** ∈ NQ 3: Δ ← max **|x(0)(n)|** 4: repeat **n** 83

5: repeat 6: x(m+1) ← x(m) 7: for ni ∈ NQ **do 8:** z1 ← **x(m) 9:** 62

z1(ni) ← z1(ni) + Δ 10: z2 ← x(m) 11: z2(ni) ← z2(ni) − Δ 12: Z1 ← Φz1 13: Z2 ← Φz2 14: g(ni) ← ‖Z1‖1 − ‖Z2‖1 15: x(m+1)(ni) ← x(m)(ni) − μ g(ni) 16: end for 17: m ← m + 1 18: until zadovoljen kriterijum zaustavljanja 19: Δ ← Δ/3 20: until postignuta zadata tačnost 21: x ← x(m) Output: • Vektor rekonstruisanog signala x Algoritam počinje od inicijalnog signala x(0)(n) koji se formira tako da sadrži mjerenja na pozicijama dostupnih odbiraka, i nule na pozicijama nedostupnih odbiraka, odnosno, x(0)(n) = y(n) za n ∈ NA { 0 za n ∈ NQ (1.84) Zatim se ponavlja sljedeća iterativna procedura: Korak 1: Za svaki nedostajući odbirak na poziciji n ∈ NQ formiraju se po dva signala: z1(n) i z2(n): z1(m)(n) = { yy((mm))((nn)) + Δ z2(m)(n) = { yy((mm))((nn)) − Δ za n ∈ NQ za n ∈ NA za n ∈ NQ za n ∈ NA (1.85) (1.86) gdje m označava redni broj iteracije. Konstanta Δ se koristi za odred¯ivanje da li vrijednost razmatranog nedostajućeg odbirka treba uvećati ili umanjiti, u odnosu na postojeću vrijednost. Korak 2: Estimirati razliku mjera koncentracije g(n) = ‖Z1‖1 − ‖Z2‖1 , za n ∈ NQ, (1.87) gdje su Z1 = Φz1 i Z2 = Φz2. Korak 3: Formirati vektor gradijenta G(k): G(k)(n) = g(n) za n ∈ NQ { 0 za n ∈ NA. (1.88) Drugim riječima, biće ažurirani samo nedostajući odbirci, dok dostupni odbirci ostaju neizmijenjeni, diktirajući pritom uslove za minimizaciju. Korak 4: Korigovati vrijednosti x(n) na sljedeći način: x(m+1)(n) = x(m)(n) − μG(m)(n). (1.89) Ponavljanjem prezentovane procedure, nedostajući odbirci će konvergirati pravim vrijednostima signala, produkujući pritom minimalnu mjeru koncentracije koeficijenata u transformacionom domenu. Budući da se za estimaciju gradijenta koristi konačna razlika mjera koncentracije, kada se algoritam približi optimalnoj tački, gradijent ℓ1-norme će biti konstantan, i neće moći da se približi rješenju sa proizvoljnom tačnošću. Stoga će, umjesto približavanja rješenju, doći do oscilacija, što znači da će gradijentni vektor mijenjati pravac u susjednim iteracijama. Taj problem se može riješiti uvod¯enjem varijabilnog koraka Δ. Kada se detektuju oscilacije, vrijednost parametra Δ se smanjuje, vodeći tako željenoj tačnosti. Rezime cijelog postupka dat je u Algoritmu 4, a dodatna razmatranja će biti prezentovana na kraju sljedeće glave ove disertacije, u kontekstu diskretne Hermitske transformacije, koja se, izmed¯u ostalog, tiču kriterijuma zaustavljanja i kriterijuma za mjerenje postignute tačnosti. Glava 2 Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Diskretna Hermitska transformacija (HT) je već decenijama predmet brojnih naučnih istraživanja, posebno kao transformacija koja predstavlja alternativu Furijeovoj transformaciji [91–115]. Zbog velikog broja interesantnih osobina, Hermitska transformacija je našla primjenu u brojnim oblastima, ali je najviše povezivana sa mogućnošću koncizne reprezentacije QRS kompleksa, koji predstavljaju specifične djelove EKG signala, posebno u svrhu njihove kompresije, ali i u segmentaciji, uklanjanju šuma itd. Druge primjene Hermitske transformacije uključuju: molekularnu biologiju , digitalnu obradu slike i računarsku tomografiju, obradu radarskih signala, fizičku optiku itd. U ovoj glavi biće prezentovano više originalnih doprinosa. Biće prezentovan novi algoritam za parametrizaciju faktora skaliranja vremenske ose i vremenskog pomjeraja diskretne Hermitske transformacije, koji je zasnovan na mjerama koncentracije.

Nakon toga, biće izvedene statističke karakteristike Hermitskih koeficijenata zašumljenih signala. U ovoj glavi će biti predstavljena i originalna analiza uticaja nedostajućih odbiraka u signalima koji su rijetki (odnosno, dobro koncentrisani) u Hermitskom domenu. Analiza sadrži interpretaciju indeksa koherentnosti Hermitske mjerne matrice, izvod¯enje eksplicitnog izraza za rekonstrukciju signala koji nijesu rijetski, nove pristupe za rekonstrukciju, uključujući i interpretaciju gradijentnog algoritma koji je skiciran u prvoj glavi disertacije. 2.1 Hermitske funkcije i Hermitska transformacija signala 2.1.1 Kontinualne Hermitske funkcije i Hermitski razvoj Hermitski polinom reda p definisan je izrazom [91–95]: Hp(t) = (−1)pet2 dp dtp e−t2 , (2.1) i pored Lagerovog, Jakobijevog, i njihovih specijalnih slučajeva - Gegenbauerovog, Čebiševljevog i Ležandrovog polinoma, pripada familiji najčešće korišćenih ortogonalnih polinoma. Prvih 11 Hermitskih polinoma dati su sljedećim izrazima: H0(t) = 1

H1(t) = 2t H2(t) = 4t2 − 2 H3(t) = 8t3 − 12t H4(t) = 16t4 − 48t2 + 12 H5(t) = 32t5 − 160t3 + 120t H6(t) = 64t6 − 480t4 + 720t2 − 120 H7(t) = 128t7 − 1344t5 + 3360t3 − 1680t H8(t) = 256t8 − 3584t6 + 13440t4 − 13440t2 + 1680 H9(t) = 512t9 − 9216t7 + 48384t5 − 80640t3 + 30240t H10(t) = 1024t10 − 23040t8 + 161280t6 − 403200t4 15

+ 302400t2 − 30240. Hermitski polinomi zadovoljavaju niz interesantnih svojstava. Med¯u njima, važno je spomenuti rekurzivnu relaciju svojstvenu ortogonalnim polinomimima [91]: H0

(t) = 1, H1 **(t) = 1** Hp **(t)** = 2tHp **−1(t) − 2(** p − 1)Hp **−2(t),** p ≥ **2.** 93

(2.2) Ovi polinomi su ortogonalni u odnosu na težinsku funkciju (mjeru) w(t) = e−t2: ∞ Hp(t)Hq(t)w(t)dt = 0, za p ≠ q, −∫∞ (2.3) ∞ Hp(t)Hq(t)e−t2dt = π2pp!δpq, √ (2.4) −∫∞ gdje je δpq Kronekerova delta, definisana izrazom δpq = 1, p = q, { 0, p ≠ q. (2.5) Hermitski polinomi formiraju ortogonalnu bazu u Hilbertovom prostoru, i ona predstavlja kompletan ortogonalni sistem. Naime, iz (2.4) direktno slijedi ortonormalnost u odnosu na standardni unutrašnji proizvod ∞ ⟨ψp(t, σ), ψq(t, σ)⟩ = ψp(t, σ)ψq(t, σ)dt = δpq −∫∞ funkcija ψp(t, σ) definisanih izrazom: ψp(t, σ) = 1 √ e 2σ2 Hp −t2 t σ2pp! π = √σ2pp!√π (−1)pe 2tσ22 ddtpp 1 () σ e− σt22 . (2.6) (2.7) √ Set funkcija ψp p≥0, koje su poznate pod nazivom kontinualne Hermitske funkcije, ortonormalan j{e u}Hilbertovom prostoru kontinualnih funkcija definisanih na posmatranom intervalu u skupu R. Stoga se realna funkcija (signal) x(t) iz ovog prostora može predstaviti Hermitskim razvojem [91]- [94]: ∞ x(t) = C(p)ψp(t, σ), (2.8) ∑p=0 gdje je sa C (p) označen Hermitski koeficijent reda p, definisan sljedećom relacijom: ∞ C(p) = ⟨x(t), ψp(t, σ)⟩ = x(t)ψp(t)dt, p = 0, 1, 2... (2.9) −∫∞ Na osnovu rekurzivnog svojstva Hermitskih polinoma (2.2), slijedi da Hermitske funkcije zadovoljavaju rekurzivnu relaciju: √ ψ0(t,σ)= 1√ e−2t2σ, ψ1(t,σ)= 2t√ e−2t2σ, σ π σ2 σ π

ψp(t, σ **)=t√ ψp−1(t,** σ)− 2 **p − 1** ψ **√p−** 2(t,σ). **(2.** 121

10) √p √ p Bitno je istaći da sa rastom |t|, sve funkcije ψp(t, σ) brzo teže nuli - naime, kako je Hp t σ polinom reda p, važi: ( ) lim Hp t e− 2t2σ = 0. (2.11) |t|→∞ ( ) σ Ovo svojstvo će biti i eksperimentalno potvrd¯eno prilikom razmatranja diskretne Hermitske transformacije. Parametar σ predstavlja skalirajući faktor vremenske ose, koji se koristi za „širenje" i

„skupljanje” Hermitskih funkcija. Promjena ovog parametra ne remeti ortogonalnost funkcija [91, 92]. Budući da se u praktičnim aplikacijama uvijek koristi konačan skup od P Hermitskih funkcija, može se smatrati da sve funkcije ψ0(t, σ), ψ1(t, σ), . . . ψP−1(t, σ) imaju nenulte (značajne) vrijednosti na konačnom intervalu t ∈ [−Tσ, Tσ]. Naime, u slučaju mnogih važnih klasa realnih signala, aproksimaciju visoke tačnosti je moguće postići sa konačnim brojem funkcija P [91]. Bitno je uočiti da Tσ zavisi od izbora broja funkcija P i faktora skaliranja σ. Stoga, za konačan broj Hermitskih funkcija važi: ψp(t,σ)=0, t∈/[−Tσ,Tσ]. (2.12) za 0 ≤ p ≤ P . U slučaju da je razmatrani signal (funkcija) x(t) takod¯e konačnog trajanja, odnosno ako ima nenulte (značajne) vrijednosti samo na intervalu [−Tσ , Tσ], tada se koeficijenti Hermitskog razvoja mogu računati na sljedeći način: ∞ Tσ C(p) = x(t)ψp(t)dt = x(t)ψp(t)dt, p = 0, 1, 2... (2.13) −∫∞ −∫Tσ Nameće se zaključak da se izborom faktora skaliranja σ, bazne funkcije Hermitskog razvoja mogu prilagoditi boljoj reprezentaciji posmatranog signala x(t), posebno u smislu poboljšanja koncentracije signala u Hermitskom domenu i mogućnosti dobijanja njegove rijetke reprezentacije [92]. 2.1.2 Diskretna Hermitska transformacija Kao što je već naglašeno, problem diskretizacije Hermitskih funkcija je široko proučavan u literaturi [119, 122]. Hermitske funkcije dobijene direktnim uniformnim odabiranjem odgovarajućih kontinualnih funkcija nijesu ortogonalne. Proučavanje u ovoj glavi biće ograničeno na dva pristupa definisanju diskretnih Hermitskih funkcija i diskretne Hermitske transformacije, iako se zaključci, izvod¯enja i algoritmi mogu generalizovati i na druge forme ove transformacije. Diskretna Hermitska transformacija zasnovana na Gaus-Hermitskoj kvadraturi Inverzna diskretna Hermitska transformacija se može posmatrati kao diskretna verzija kontinualnog Hermitskog razvoja (2.8), dok se odgovarajuća diskretizovana forma integrala (2.13) iz definicije koeficijenata ovog razvoja može smatrati diskretnom Hermitskom transformacijom [93, 95]. U tom slučaju, diskretni signal dužine N može biti reprezentovan kompletnim setom od N diskretnih baznih funkcija. Integral (2.13) može biti veoma tačno aproksimiran Gaus-Hermitskom kvadraturnom relacijom [93, 95, 96, 99]: 1 N C (p) = ψp(tn, σ) N n=1 [ψN−1(tn, σ)]2 x(tn), (2.14) ∑ gdje su sa tn, 1 ≤ m ≤ N označene tačke odabiranja koje se poklapaju sa nulama Hermitskog polinoma reda N . Funkcije ψp(tn, σ), 1 ≤ n ≤ N, 0 ≤, p ≤ N − 1 koje se dobijaju odabiranjem kontinualnih Hermitskih funkcija u tačkama tn su ortogonalne, za razliku od funkcija koje bi se dobile direktnim uniformnim odabiranjem. Kada su tačke odabiranja proporcionalne tačkama tn, transformacija (2.14) je kompletna reprezentacija. Ovu formu Hermitske transformacije ćemo u daljem izlaganju označavati skraćenicom DHT1. Podrazumijevana vrijednost parametra σ je σ = 1. U daljem izlaganju, ukoliko se pretpostavlja ova podrazumijevana vrijednost, parametar σ će biti izostavljen iz notacije baznih funkcija, ψp(tn), bez gubljenja opštosti izlaganja. Može se uočiti da pravilno računanje izraza (2.14) zahtijeva specifičnu formu odabiranja signala x(t). Med¯utim, uz odred¯ene pretpostavke koje su realistične za klase signala koje su od interesa za proučavanje u kontekstu ove transformacije, uniformno odabrani signali takod¯e mogu biti uspješno reprezentovani, što će biti pokazano u narednim sekcijama. Inverzna Hermitska transformacija se direktno dobija iz Hermitskog razvoja (2.8): N x(tn) = C(p)ψp(tn, σ). (2.15) ∑p=0 Dikretna i inverzna DHT1, date relacijama (2.14) i (2.15) mogu biti predstavljene u matričnoj formi. Transformaciona matrica DHT1 dimenzija N × N je definisana na sljedeći način: ψ0(t1,σ) ψ0(t2,σ) ψ0(tN,σ) (ψN−1(t1

,σ))2 (ψN **−1(** t2 **,σ))2** . . . (ψN **−1(** tN **,σ))2** TH = **1** ⌈ ψ1(t1 **,σ)** 101

ψ1(t2,σ) ψ1(tN,σ) (ψN−1(t1,σ))2 (ψN−1(t2,σ))2 · · · 2⌉ (2.16) M . . ... (ψN−1(tN,σ)) . , ψN−1(t1,σ) ψN−1(t2,σ) ψN−1(tN,σ) |(ψN−1(t1,σ))2 (ψN−1(t2,σ))2 · · · dok je odgovarajuća matrica inverzna transformaciona matrica T−H1 (takod¯e dimenzija N × N) ⌊ (ψN−1(tN,σ))2⌋⌋ data izrazom: ψ0(t1, σ) ψ1(t1, σ) . . . ψN−1(t1, σ) T−H1 = ⌈ψ0(t2, σ) ψ1(t2, σ) · · ·

ψN−1(t2, σ)⌉. . ... . . (2.17) ⎢ψ0(tN, σ) ψ1(tN, σ) · · · ψ N−1(tN, σ) Ako je sa C = [C(0), C(1), . . . , C(N − 1)]T označen vektor Hermitskih koeficijenata dok ⌊ ⌋ ⌋ vektor x = [x(t1), x(t2), . . . , x(tN)]T sadrži N odbiraka posmatranog signala, tada zapis C = TH x (2.18) predstavlja matričnu formu DHT1. Inverzna DHT1 je u matričnoj formi data sljedećim izrazom: x = T−H1C. (2.19) Matrica inverzne DHT1 može se zapisati u obliku proizvoda: TH−1 = TTH D, (2.20) gdje je D dijagonalna matrica čija je analitička forma predstavljena u [116, 117], što potvrd¯uje činjenicu da transformaciona matrica DHT1 nije ortogonalna. Standardna QR dekompozicija transformacione matrice TH daje proizvod TH = QR, gdje je Q ortogonalna matrica, odnosno, QQT = I, pri čemu jeI jedinična matrica, dok je matrica R dijagonalna, sa elementima: rn = (−1)n−1 N ψN−1 (tn) −1, n = 1, , 2 . . . , N. √ (2.21) [ ] Može se pokazati da se matrica Q može zapisati u sljedećem obliku: ψ0(t1,σ) ψ0(t2,σ) ψN−1(t1,σ) ψN−1(t2,σ) . . . ψNψ0−(1t(NtN,σ,)σ) Q = √ 1 ⌈ ψNψ1−(1t1(t,1σ,)σ) ψNψ1−(1t2(t,2σ,)σ) · · · ψNψ1−(1t(NtN,σ,)σ) ⌉ M . . . . (2.22) ψN−1(t1,σ) ψN−1(t2,σ) ⎢ψN−1(t1,σ) ψN−1(t2,σ) · · · ψN−1(tN,σ) ⌊ ψN−1(tN,σ) ⌋ ⌋ Usljed (2.20) i (2.21) gdje rn = 1 ne važi za svako n = 1, 2, . . . , M, može se očekivati da standardni aditivni bijeli Gausov šum utiče na ovu transformaciju drugačije, nego što je to slučaj sa ortogonalnim transformacijama, kao što je, na primjer, DFT. Diskretna Hermitska transformacija zasnovana na simetričnoj tridijagonalnoj matrici koja komutira sa centriranom Furijeovom matricom Prethodna forma diskretne Hermitske tranformacije je razmatrana u širokom kontekstu primjena [93, 96, 99]. Izmed¯u ostalog, primjenjivana je u kompresiji QRS kompleksa EKG signala [91], kao i rekonstrukciji kompresivno odabranih UWB signala. Uspješnost transformacije u ovim primjenama je direktno vezana za veliku sličnost talasnih oblika njenih baznih funkcija sa razmatranim signalima. Med¯utim, iako su diskretne Hermitske funkcije dobijene odabiranjem u tačkama t = n, direktno proporcionalnim nulama Hermitskog polinoma reda N ortogonalne, sama tranformaciona matrica (2.16) nije ortogonalna. Budući da ni uniformno odabiranje kontinualnih Hermitskih funkcija ne vodi do kompatibilne diskretne baze, alternativni oblici definisanja diskretnih Hermitskih funkcija su široko proučavani u literaturi. Izmed¯u ostalog, pokazano je da se diskretne Hermitske funkcije mogu dobiti kao sopstveni vektori centrirane ili pomjerene Furijeove matrice [116–118]. U cilju konzistentnosti izlaganja, alternativne diskretne Hermitske funkcije, dobijene ovim pristupom, biće označene sa ψ˜p(n, σ), za σ ≥ 1, odnosno sa ψ˜p(n), u slučaju faktora skaliranja σ = 1. Potrebno je naglasiti da je sa n označen diskretni vremenski indeks dobijen uniformnim odabiranjem u skladu sa teoremom o odabiranju, odnosno, indeks se odnosi na uniformni vremenski grid. Postoje i drugi alternativni pristupi definisanju diskretnih Hermitskih funkcija, koji se mogu naći u literaturi. Neka se posmatra diskretni signal x(n) od N odbiraka, koji mogu biti dobijeni odabiranjem analognog signala x(t) u skladu sa teoremom o odabiranju, gdje je 0 ≤ n ≤ N −1. Za takav signal postoji set baznih funkcija ψ˜p(n, σ), p = 0, 1, . . . , N − 1, koje su suštinski vezane za kontinualne Hermitske funkcije ψp(t, σ). Nedavno je pokazano da se navedene funkcije mogu dobiti kao sopstveni vektori centrirane Furijeove matrice , u oznaci FC, gdje je zadovoljeno: FCψ˜p(n,σ) = jnψ˜p(n,σ), (2.23) gdje je j = −1. Ovaj set funkcija se dobija dekompozicijom na sopstvene vrijednosti √ posmatrane Furijeove matrice: FC = QΛQT (2.24) kao kolone matrice

Q = ψ˜0, ψ˜1, . . . , ψ˜ N . Vektori kolone **ψ˜p, p = 0,** ..., N − **1** 7

sadrže vrijednosti diskretnih Herm[itskih funkcija ψ˜p(]n, σ), n = 0, ..., N − 1 i one su sopstveni vektori matrice FC , dok je Λ dijagonalna matrica njenih sopstvenih vrijednosti. U literaturi je pokazano da se ovaj oblik diskretnih Hermitskih funkcija može numerički efikasno generisati kao set sopstvenih vektora simetrične tridijagonalne matrice, definisane na sljedeći način: ϕ0(0) ϕ1(1) 0 ⌈ϕ1(1) ϕ0(1) ϕ1(2) T= 0 ϕ1(2) ϕ0(2) . . . . . ⎢ 0 0 0 ⌊ ··· ··· ... 0 0 ⌉ 0 , (2.25) . . . ϕ1(N − 1) ϕ1(N −

1) ϕ0(N − 1) ⌋ ⌉ gdje je ϕ0(n) = −2 cos σπ2 sin Nπσn2 sin Mπσ2 (N − 1 − n) , (2.26) ϕ1(n) = sin Nπσn(2 s)in M(πσ2 (N) − n() ,) (2.27) za 0 ≤ n ≤ N − 1. Dekompozicija na sopstvene vrijednosti ( ) ( ) T = QΛQT . (2.28) dovodi do iste matrice sopstvenih vektora kao (2.24), ali na numerički efikasniji način. Funkcije {ψ˜p(n,σ)}0≤p≤N−1 formiraju N-dimenzionu ortogonalnu bazu alternativne diskretne Hermitske transformacije, koja će u nastavku izlaganja biti označena sa DHT2. Dobijene na ovaj način, diskretne Hermitske funkcije imaju vremenski oblik koji je veoma sličan odgovarajućim kontinualnim funkcijama. Slično kao u kontinualnom slučaju, ove funkcije imaju nenulte vrijednosti u ograničenom vremenskom intervalu, zatim, parne su ili neparne zavisno od vrijednosti indeksa p (koji ujedno predstavlja broj presjeka funkcije sa apscisnom osom). Razlika izmed¯u kontinualnih i na ovaj način definisanih odgovarajućih diskretnih Hermitskih funkcija raste sa proporcionalno sa rastom indeksa p. Navedena činjenica je ilustrovana na slici 2.1, gdje je prikazan odred¯eni broj Hermitskih baznih funkcija koje odgovaraju DHT2 (lijeva kolona), odnosno DHT1 (desna kolona) - koje su dobijene odabiranjem kontinualnih Hermitskih funkcija u tačkama koje se poklapaju sa nulama Hermitskog polinoma reda N = 201. U cilju boljeg pored¯enja, funkcije su u oba razmatrana slučaja normalizovane odgovarajućim maksimalnim amplitudama. Za funkcije reda p = 0, p = 2 i p = 5 evidentan je visok stepen sličnosti izmed¯u ψ˜p(n) and ψp(tn), slika 2.1, prva, druga i treća vrsta, gdje je korišćeno σ = 1. Za p = 39, razlika izmed¯u njih postaje očiglednija (četvrta vrsta na istoj slici), i ona raste sa povećanjem reda p, što potvrd¯uje izgled funkcija iz pete i šeste vrste na slici 2.1, prikazanih za p = 88 i p = 99. 1 ψ˜0(n) 0 -1 (a) -100 -50 0 50 100 1 ψ˜2(n) 0 -1 (b) -100 -50 0 50 100 1 ψ˜5(n) 0 -1 (c) -100 -50 0 50 100 1 ψ˜39(n) 0 -1 (d) -100 -50 0 50 100 1 ψ˜88(n) 0 -1 (e) -100 -50 0 50 100 1 ψ˜99(n) 0 -1 (f) -100 -50 0 50 100 diskretno vrijeme 1 ψ0(tn) 0 -1 -100 1 ψ2(tn) 0 -1 -100 1 ψ5(tn) 0 -1 -100 1 ψ39(tn) 0 -1 -100 1 ψ88(tn) 0 -1 -100 1 ψ99(tn) 0 -1 -100 -50 -50 -50 -50 -50 -50 (g) 0 50 100 (h) 0 50 100 (i) 0 50 100 (j) 0 50 100 (k) 0 50 100 (l) diskretno vrijeme 0 50 100 RMSE 0.2 0.1 (m) 0 20 40 60 Red Hermitske funkcije p 80 100 120 140 160 180 200 Slika 2.1: Primjeri baznih funkcija dviju formi diskretne Hermitske transformacije: (a)-(f) DHT2 i (g)-(l) DHT1 za N = 201; (m) RMSE izmed¯u funkcija Slika 2.1 naglašava relevantnost forme DHT1 u primjenama koje zahtijevaju visok nivo sličnosti diskretnih Hermitskih funkcija sa odgovarajućim kontinualnim parovima. Korijen srednje kvadratne greške izmed¯u svih baznih funkcija DHT1 i DHT2, računat po formuli: RMSE(p) = 1 N−1 ψp(tn+1) − ψ˜p(n) 2 N (2.29) √ ∑n=0 | je prikazan na slici 2.1 (m). Bitno je naglasiti da se ova greška može smanjiti stavljanjem | | adekvatnog faktora skaliranja σ za jedan od setova baznih funkcija. Bitno je naglasiti da je računanje DHT2 numerički efikasnije od odgovarajućeg računanja DHT1, za istu dužinu signala, odnosno isti broj baznih funkcija N . Tako na primjer, za N = 201, prosječno vrijeme potrebno za generisanje baznih funkcija DHT2 iznosilo je 0.0025 sekundi, u pored¯enju sa 0.0060 sekundi, koliko je bilo potrebno za generisanje baznih funkcija DHT1 korišćenjem rekurzivne relacije (2.10). Testiranje je izvršeno na istom računaru, sa

Intel(R) Core(TM) i7-6700HQ CPU @ 2.60 GHz i **8 GB RAM-** 2

a). Za M = 500. vrijeme potrebno za generisanje baznih funkcija DHT2 iznosilo je 0.012 sekundi, dok je u slučaju baznih funkcija DHT1 bilo potrebno 0.016 sekundi. Med¯utim, važno je napomenuti i da je DHT1 dodatno numerički složenija i zbog potrebe računanja Gaus-Hermitske kvadrature u (2.14), kao i zbog procesa reodabiranja, ukoliko ga je potrebno primijeniti u slučaju uniformno odabranog polaznog signala. Bolje poklapanje baznih funkcija DHT2 može biti postignuto produkovanjem većeg broja baznih funkcija (dodavanjem nula u polaznom diskretnom signalu), kao i adekvatnim podešavanjem faktora skaliranja vremenske ose σ. Transformaciona matrica DHT2 je sljedećeg oblika ψ˜0(0, σ) ψ˜0(1, σ) . . . ψ˜0(N − 1, σ) T˜H = ⌈ ψ˜ 1(0, σ) ψ˜ 92

1(1, σ) · · · . . .

ψ˜1(N − 1, σ) ⌉ . . . (2.30) |ψ˜N−1 (0, σ) ψ ˜N−1(1, σ) · · · ψ˜N− 13

1(N − 1, σ) ⌊ | ⌋ Označimo sa C˜ = [C˜(0), C˜(1), . . . , C˜(N − 1)]T vektor DHT2 koeficijenata, i sa

x = [x(0), x(1), . . . , x(N − 1)]T vektor od N 90

odbiraka signala na uniformnom vremenskom gridu. Tada se DHT2 može zapisati u matričnoj formi: C˜ = T˜H x. (2.31) Pošto je formirana na osnovu sopstvenih vektora tridijagonalne matrice (2.25) matrica T˜H je ortogonalna, odnosno važi T˜−H1 = T˜TH , gdje je T˜H T˜TH = I. Stoga se inverzna DHT2 u matričnoj formi definiše na sljedeći način: x = T˜TH C˜. (2.32) 2.2 Optimizacija parametara Hermitske transformacije Koncentracija i stepen rijetkosti signala u domenu diskretne Hermitske transformacije u velikoj mjeri može zavisiti od izbora faktora skaliranja vremenske ose σ. Dodatno, koncentracija signala može zavisiti i od pozicije signala na vremenskoj osi u odnosu na pozicije baznih funkcija, koju ćemo kvantifikovati parametrom pomjeraja po vremenskoj osi. U ovoj sekciji će biti razmatrana problematika optimizacije ovih parametara, i odgovarajuća primjena u kontekstu kompresije elektrokardiografskih (EKG) signala. Specijalno, biće prezentovan algoritam za automatsko odred¯ivanje ovih parametara, zasnovan na ℓ1-normi Hermitskih koeficijenata. QRS kompleksi, kao najprepoznatljiviji talasi u EKG signalima, važni su u medicinskoj dijagnostici i liječenju. Generalno govoreći, u obradi i kompresiji EKG signala i QRS kompleksa, mnogi autori su primjenjivali različite vrste wavelet-a i sličnih transformacija. Nedavno je, med¯utim, pokazano da Hermitska transformacija u tom kontekstu može pružiti značajno bolje performanse, u slučaju kada se primijeni adekvatna optimizacija. Ova transformacija je pogodna za predstavljanje QRS kompleksa usljed njihove sličnosti sa talasnim oblicima njenih baznih funkcija. To znači da navedeni signali mogu biti reprezentovani korišćenjem malog broja Hermitskih koeficijenata sa značajnim vrijednostima. To je poslužilo za razvijanje više algoritama za kompresiju QRS kompleksa. Jedan dio njih je razvijen na bazi kontinualnih funkcija, a drugi na bazi diskretnih. U radu prezentovan je algoritam koji pokazuje bolje performanse u kompresiji, od odgovarajućih ekvivalenata razvijenih na osnovu DFT-a, DCT-a i diskretne wavelet transformacije. U tom algoritmu korišćena je eksperimentalno dobijena vrijednost faktora skaliranja vremenske ose, koji omogućava „skupljanje” i „širenje” QRS kompleksa, kako bi se u što je moguće većoj mjeri poklopili sa baznim funkcijama Hermitske transformacije. Biće pokazano da se, inkorporiranjem predloženog algoritma za optimizaciju parametara Hermitske transformacije u postojeću proceduru za kompresiju QRS kompleksa postižu bolji rezultati u odnosu na aktuelne pristupe u oblasti, što će biti verifikovano obimnijim eksperimentom zasnovanim na opsežnoj bazi realnih signala. 2.2.1 Optimizacija faktora skaliranja vremenske ose U definiciji Hermitskih funkcija ψp(tn, σ), faktor skaliranja σ vremenske ose direktno utiče na širinu opsega u kojima funkcije imaju nenulte vrijednosti. Drugim riječima, podešavanjem ovog parametra, bazne funkcije diskretne Hermitske transformacije se mogu „skupljati” i „širiti”. Umjesto podešavanja faktora skaliranja, alternativno, njegova vrijednost se može fiksirati na $\sigma = 1$, i uvesti ekvivalentni parametar λ koji daje mogućnost „skupljanja" i „širenja" razmatranog signala $x(\lambda tn)$ na vremenskoj osi. DHT1 uniformno odabranih signala Uvedimo realnu pretpostavku da je kontinualni signal $x(t)$ takav da se njegove nenulte (značajne)vrijednostipojavljujuunekomkonačnomvremenskomopsegu,takodavažix(t)= 0zat ∈/ [−T, T]. Neka je ovaj signal odabran uniformno sa korakom Δt, u skladu sa Teoremomoodabiranju,takodajedobijennjegovdiskretniekvivalentx(m)kojijekonačnog trajanja.PretpostavimodajediskretnisignalneparnedužineN =2D+1,m=−D,...,D.Po Teoremioodabiranju,originalnisignalmožebitirekonstruisan,odnosnoreodabranuželjenim tačkamaλt1, λt2,...,λtN pomoćusljedećeinterpolacioneformule: x(λtn) ≈ x(mΔt) π(λtn − mΔt)/Δt , (2.33) D sin (π(λtn − mΔt)/Δt) m∑=−D gdje je n = 1, . . . , N, m = −D, . . . , D. Budući da je signal konačnog trajanja, doći će do odred¯ene greške u odsječenoj sinc interpolaciji. Med¯utim, biće pokazano da je ova greška veoma mala u slučaju razmatranih klasa signala. U matričnoj formi, prethodna interpolacija postaje: ŝ ≈ Aλxu (2.34) gdje je ŝ vektor koji sadrži vrijednosti signala odabranog u željenim tačkama t = λtn, koje su proporcionalne nulama Hermitskog polinoma reda N , dok je vektor sastavljen od odbiraka uniformno odabranog signala x(m) označen sa xu = [x(−D), x(−D + 1), . . . , x(D)]T . U slučaju signala parne dužine N = 2D, u (2.33) treba koristiti indekse m = −D, . . . , K − 1. Zapišimo interpolacionu formulu (2.33) u matričnoj formi: ŝ(λt1) a11 a12 · · · a1N x(−D) ⎡ ŝ(λt2) ⎤ ≈ ⎡ a21 a22 · · · a2N ⎤⎡x(−D + 1)⎤ . . . . ⎢ ⎣ ŝ(λtN) ⎥ ⎦ ⎢aM 1 aM 2 ⎣ · · · aN N ⎥ x(D) ⎥ ⎦ ⎣ ⎦ uz N = 2D + 1 i sa elementima aij definisanim sljedećim izrazom: aij = sin [π(λti − (j − D − 1)Δt)/Δt] π(λti − (j − D − 1)Δt)/Δt , (2.35) (2.36) pri čemu je i, j ∈ {1, 2, . . . , M }. Kao što je nedano prezentovano, greška odsijecanja sinc interpolatora je najveća za trenutke vremena koji su bliski ivicama diskretnog grida. Med¯utim, u slučaju signala od interesa, čiji talasni oblici liče Hermitskim funkcijama ili njihovim linearnim kombinacijama, male vrijednosti na krajevima intervala garantuju i malu grešku usljed odsijecanja interpolacionog jezgra. Ova činjenica će biti i numerički evaluirana. Problem interpolacije signala konačnog trajanja je takod¯e razmatran sa stanovišta sinc interpolacije zasnovane na FIR filtrima (engl. finite impulse response, odnosno filtrima sa konačnom dužinom impulsnog odziva. Navedena greška se može značano smanjiti množenjem interpolacionog jezgra sa prozorskom funkcijom. Sada uniformno odabrane signale i odgovarajuću DHT1 možemo povezati sljedećom relacijom: C = WHŝ ≈ THAλxu. (2.37) Algoritam za optimizaciju faktora skaliranja λ Opzimizacija faktora skaliranja λ vremenske ose može biti urad¯ena korišćenjem mjere koncentracije vektora Hermitskih koeficijenata C. Cilj da pronaći vrijednost parametra λ za koji je vektor koeficijenata C najviše koncentrisan (odnosno, za koji ima najmanji mogući stepen rijetkosti K). Mjere koncentracije, kao što je ℓ1-norma vektora transformacionih koeficijenata, mogu biti korišćene u ovu svrhu. Za vektor Hermitskih koeficijenata, ℓ1-norma se može izračunati po sljedećoj formuli: N−1 M = ‖C‖1 = |cp|. (2.38) ∑p=0 Optimalna vrijednost parametra λ se može dobiti rješavanjem problema: λ = argmin‖THAλx‖1. (2.39) λ U pitanju je problem jednodimenzionog pretraživanja u prostoru mogućih vrijednosti parametra λ, a cilj je naći vrijednost ovog parametra koja minimizuje mjeru koncentracije DHT1 razmatranog signala. Opseg pretrage je moguće odrediti, izmed¯u ostalog, postavljanjem zahtjeva da se nule Hermitskog polinoma reda N pozicioniraju izmed¯u odgovarajućih tačaka na uniformnom gridu odabranog signala, kao što je diskutovano u [91]. Glavna ideja algoritma optimizacije jeste da se omogući iterativna i automatska pretraga paramtetra, počevši od nege inicijalne vrijednosti λ(0). U svakoj iteraciji k, mala vrijednost Δ je dodata i oduzeta od postojećeg λ(k), kako bi se odredilo kako ove promjene utiču na mjeru koncentracije. Na osnovu mjera izračunatih u oba slučaja, aproksimira se gradijent mjere, a zatim se λ(k) ažurira na način koji je ekvivalentan metodu najbržeg spuštanja. Optimizacija je detaljno predstavljena algoritmom 5. U algoritmu je kao polazna vrijednost faktora skaliranja uzeto λ(0) = N Δt/ 2(π(N − 1)/1.7 + 1.8) , što je u skladu sa donjom granicom koja obezbjed¯uje konverg[en√ciju algoritma. Vrijedno]sti μ i ∆ su odabrane empirijski, i korišćene su za dobijanje rezultata prezentovanih u ovoj disertaciji, i radu. Premala vrijednost koraka μ će dovesti do previše spore konvergencije. Sa druge strane, μ treba biti dovoljno malo, tako da može garantovati stabilnost algoritma (drugim riječima, vrijednost koraka treba da obezbijedi da je u svakoj iteraciji zadovoljen uslov λ < πN/1.7 + 1.8 / [2πW], definisan u literaturi, gdje je W frekvencijski opseg razmatranog [si√gnala). Dakle, iz]bor koraka μ je stvar pravljenja Algoritam 5 Optimizacija faktora skaliranja vremenske ose za DHT1 Input: • Vektor signala x dužine N = 2D + 1 • Korak μ • Transformaciona matrica DHT1 WH , izračunata po formuli (2.16) 1: λ(0) ← N ∆t/ 2 π(N − 1)/1.7 + 1.8 ◅ Inicijalna vrijednost faktora skaliranja 2: ∆ ← 2/tN [(√)] ◅ Parametar koji odred¯uje brzinu promjena 3: ε ← 10−10 ◅ Zadata tačnost 4: while ∆ > ε do

a+11 a+12 ··· a+ 1N 5: A+ λ ← ⌈a+12 a+22 120

sin π((λ+∆)ti−∆(tj−D−1)∆t) . . ··· a+2N ⌉, ◅ a+ij = ... (π((λ+∆)ti−(j−D−1)∆t) , i,j ∈ {1,...,N} ∆t ||a+N1 a+N2) ⌊a−11 a1−2 ··· a+NN|| ··· a−1N ⌋ 6: A−λ ← ⌈a−12 a−22 . . ··· a2−N ⌉, ◅ a−ij = . . sin π((λ−∆)ti−∆(tj−D−1)∆t) . . |a−N1 aN−2 ··· aN−N| (π((λ−∆)ti−∆(tj−D−1)∆t) , i,j ∈ {1,...,N}) N −1 M+ ← ‖C+‖1 = THA+λx ◅ Mjera koncentracije u slučaju malog povećanja λ ⌊ ⌋ 7: p=0 8: M− ← ‖C−‖1 = N∑−1|THAλ−x | ◅ Mjera koncentracije u slučaju malog smanjenja λ | p=0 9: 10: 11:

∇(k) ← (M+ − M∑−) /|N λ(k+1) ← λ(k) − μ∇(k) β ← sign ∇(k)∇(k−1) 3

| ◅ Aproksimacija gradijenta | ◅ Ažuriranje faktora skaliranja 12: 13: 14: if β < 0 then ∆ ← ∆/2 (end if ◅ U slučaju promjene znaka gradijenta u uzastopnim iteracijama,) ◅ smanjiti ∆ 15: end while Output: • Optimalni faktor skaliranja λ(k) komporomisa izmed¯u navedena dva zahtjeva. Važno je napomenuti da se u predstavljenom algoritmu u praktičnim primjenama stavlja i dodatan uslov koji će ograničiti maksimalan broj iteracija, kako ne bi došlo do stvaranja beskonačnih petlji u slučajevima kada nije moguće dostići zadatu tačnost. Maksimalan broj iteracija korespondira dužini razmatranog signala (u mnogim numeričkim eksperimentima, konvergencija algoritma je postigunita i za polovinu od navedenog broja iteracija). Numerička složenost algoritma može biti aproksimirana na način koji slijedi. U jednoj iteraciji je potrebno: a) generisati argumente sinc funkcija u koracima 5 i 6, za što je potrebno 2N 2 + 2 sabiranja (odnosno oduzimanja) i 6N 2 proizvoda sa konstantama; b) za interpolaziju je potrebno N 2 proizvoda i N (N − 1) sabiranja; c) za proračun dvije DHT1, numerička složenost je 2N 2 sabiranja i 2N 2 množenja; d) za proračun mjera koncentracija potrebno je 2N − 2 sabiranja. Stoga, prezentovani algoritam zahtijeva ukupno 5N 2 + N sabiranja i 9M 2 množenja. Dvodimenziona Hermitska transformacija može biti realizovana računanjem odgovarajućih jednodimenzionih transformacija za svaku dimenziju posebno. Stoga, prezentovani algoritam je moguće primijeniti i na dvodimenzionu formu ove transformacije. Primjer 2.1. Razmatra se signal zadat izrazom: x(t) = 3 sin(5πt) exp − 2σ02) N 2t2 (2.40) (gdje je N = 77, σ0 = 2.1, − 12 < t < 12 . Signal je odabran sa korakom ∆t = N1 , tako da su dobijene uniformno raspored¯ene diskretne vrijednosti sa indeksima m ∈ {− N−21 , . . . , N2−1 }. Odbirci originalnog signala su prikazani na slici 2.2 (a), dok su DFT koeficijenti i koeficijenti standardne DHT1 sa σ = 1 prikazani na slici 2.2 (b) i (c), respektivno. Može se uočiti da signal ima kompaktnu reprezentaciju u vremenskom domenu, i talasni oblik koji je sličan Hermitskim baznim funkcijama. Ovakva vrsta signala (uprozorene ili filtrirane sinusoide, QRS segmenti, kratkotrajni signali kao što su npr. FHSS ili UWB signali) pogodni su za reprezentaciju u Hermiskom transformacionom domenu. U cilju

odred¯ivanja DHT1 reodabranog signala sa najboljom koncentracijom, primijenjena je predložena procedura za optimizaciju faktora skaliranja. Dobijeni rezultat je λ = σΔt = 2.0N368 . Signal reodabran u tačkama koje su proporcionalne nulama Hermitskog polinoma N -tog reda sa prethodno odred¯enim faktorom skaliranja predstavljen je na slici 2.2 (e). Odgovarajuća DHT1 je prikazana na slici 2.2 (d), gdje se može uočiti da je dobijeni faktor skaliranja omogućio reprezentaciju istog signala sa samo jednim Hermitskim koeficijentom koji ima značajnu vrijednost, sa indeksom p = 1, dok su svi ostali koeficijenti ili jednaki nuli ili su sa zanemarljivo malim vrijednostima. Kako bi potvrdili da predloženi algoritam zaista nalazi optimalnu vrijednost, izračunata je mjera koncentracije za različite vrijednosti faktora skaliranja λ: 1/Δt ≤ λ/Δt ≤ 2/Δt, koji je variran sa korakom 0.01/Δt. Rezultati su prikazani na slici 2.2 (f), gdje se lako uočava globalni mininum za λmin = 2.0368/Δt. Ovdje je pretpostavljeno da su zadovoljene donja i gornja granica iz. Donja granica se može kontrolisati adekvatnom inicijalizacijom algoritma, dok pogodno odabrani korak μ osigurava da gornja teorijska granica nikad ne bude dostignuta. U intervalu izmed¯u donje i gornje granice očekuje se da postoji globalni minimum koji korespondira najboljoj mogućoj koncentraciji DHT1. Promjene parametra λ tokom iteracija predstavljene su na slici 2.2 (g). Sa ove slike evidentna je stabilizacija algoritma sa dostizanjem minimuma mjere koncentracije. U ovom primjeru je takod¯e ispitan i uticaj sinc interpolacionog jezgra konačne dužine. Naime, u ovu svrhu je izračunata srednja kvadratna greška (MSE) izmed¯u interpoliranog signala xint(λtm) (interpolacija je sprovena iz uniformnih odibaraka x(m) korišćenjem izraza (2.36)) i 1 s(m) 0.5 0 Odbirci originalnog signala (a) -0.5 -1 -30 -20 -10 0 10 20 30 m (b) 0.6 3 0.4 (c) 1 |S(k)| DFT 2 C (p) 0.2 Standardna DHT1 C (p) 0.5 1 Optimalna DHT1 0 -0.2 0 -40 -0.4 0 -20 0 20 40 0 20 40 60 0 20 40 60 k p p 1 (d) s(λtn) 0.5 0 Inverzna optimalna DHT1 (reodabrani signal) (e) M(λ/Δt) 1.8 1.7 1.6 2 2.2 2.4 2.6 λ/Δt -30 Mjera koncentracije -20 (f) -10 3 λ/Δt 2.8 2.6 2.4 2.2 Redni broj iteracije 20 λtn 0 Kriva učenja 40 60 10 (g) MSE -200 -250 -150 Greška u sinc interpolaciji (h) 100 200 300 400 N 20 30 -0.5 -1 Slika 2.2: Optimizacija faktora skaliranja DHT1 na primjeru sinusoide ograničenog trajanja: (a) originalni uniformno odabrani signal, (b) DFT polaznog signala, (c) standardna DHT1 originalnog signala, (d) DHT1 nakon primjene algoritma optimizacije, (e) odbirci reodabranog signala, (f) mjera koncentracije u funkciji od faktora skaliranja, (g) promjene faktora skaliranja tokom iteracija, (h) srednja kvadratna greška u sinc interpolaciji signala (2.40) u zavisnosti od zadate dužine signala N . originalnog (analitičkog) signala (2.40), posmatranog u tačkama t = λtn: MSE = N1 N n=1 |sint(λtn) − x(λtn)|2. (2.41) ∑ Dužina signala varirana je u opsegu od 21 do 401, sa korakom 2. Rezultati su prikazani na slici 2.2 (h), ilustrujući činjenicu da je za razmatranu klasu signala konačnog vremenskog trajanja ova greška jako mala. Primjer 2.2. Jedna vrsta signala čiji su talasni oblici slični baznim funkcijama Hermitske transformacije, pa time imaju potencijal za reprezentaciju sa malim brojem transformacionih koeficijenata, jesu i ultra-širokopojasni ili UWB signali (engl. ultra-wideband). Klasa karakterističnih talasnih oblika ovih signala poznata je pod nazivom Gausovi doublet-i. Gausov doublet. (UWB signal) 1 (a) Amplituda 0.5 0 -0.5 -50 mΔt [ns] 0 50 Gausov doublet reodabran sa optimalnim λ Amplituda 1 0.5 0 (c) -0.5 -50 λtn [ns] 0 50 Standardna DHT1

1.5 (b) 1 C (p) 0.5 0 -0.5 88

0 10 20 30 40 50 60 p Optimizovana DHT1 C (p) 0.5 0 (d) -0.5 -1 0 10 20 30 40 50 60 p Slika 2.3: Optimizacija faktora skaliranja u slučaju UWB signala: (a) signal u vremenskom domenu, (b) DHT1 sa faktorom skaliranja vremenske ose σ = 1, (c) isti signal reodabran u tačkama λtn, sa optimalnim λ i (d) DHT1 reodabranog signala. Promjena talasnog oblika

(filtriranje) Gausovih impulsa na odgovarajućim prijemnim antenama tipično se modeluje operacijom diferenciranja tih impulsa, koja rezultuje sljedećom formom Gausovih doublet-a: x

(t) = 1 − 4π(t/τm)2 e −2π(t/τm)2. 100

(2.42) U ovom primjeru razmatra se diskretn[a verzija ovih s]ignala odabranih na frekvenciji od 2 GHz, trajanja 100 ns, sa τm = 22.2 ns. Signal je prikazan na slici 2.3 (a), dok je standardna DHT1 sa faktorom skaliranja σ = 1 prikazana na slici 2.3 (b). Nakon primjene algoritma za optimizaciju faktora skaliranja, signal reodabran u tačkama λtn na slici 2.3 (c) moguće je predstaviti sa samo dva koeficijenta sa značajnim vrijednostima, slika 2.3 (d). Potencijalna primjena ovog pristupa leži u mogućnosti dizajna tehnologije prijemnika UWB signala sa pojednostavljenom procedurom za njihovu detekciju. 2.2.2 Optimizacija parametra pomjeraja po vremenskoj osi Bazne funkcije diskretnih Hermitskih transformacija moguće je pomjerati na vremenskoj osi. Umjesto centriranja signala oko koordinatnog početka na vremenskoj osi, vršićemo pomjeranje centralne tačke signala na lijevo i na desno od koordinatnog početka, prije računanja Hermitskih koeficijenata. Navedeni pristup će biti korišćen u kombinaciji sa optimizacijom faktora skaliranja, razmatrana u prethodnoj podsekciji. Drugim riječima, umjesto x(m∆t), u analizi, odnosno obradi, koristićemo signal: sl(m∆t) = x((m ± l)∆t) in (9), with l = [−lmax, lmax]. Za svaku diskretnu vrijednost l, rješavanjem problema (2.39), nalazi see optimalna vrijednost λ. Za svaku razmatranu vrijednost l se formira mjerni vektor L, koji sadrži minimalnu vrijednost mjere (2.39) dobijene za optimalno λ. Optimalna vrijednost parametra pomjera dobija se rješavanjem problema: l = arg min L (2.43) l Potrebno je naglasiti da je granična vrijednost lmax u praktičnim aplikacijama relativno mala, npr. lmax = 3 u slučaju kompresije djelova EKG signala, koji će biti razmatran u ovoj tezi. Zato je prilikom rješavanja optimizacionog problema (2.43) moguće koristiti direktno pretraživanje. Takod¯e, u razmatranoj primjeni, biće korišćene samo cjelobrojne vrijednosti ovog parametra. 2.2.3 Primjena u kompresiji QRS kompleksa Elektrokardiografski signali (EKG) su značajna grupa biomedicinskih signala, koji su od velike važnosti u medicinskoj dijagnostici i liječenju. Uklanjanje šuma, detekcija karakterističnih djelova, segmentacija, filtriranje, karakterizacija, klasifikacija, kompresija kao i drugi oblici obrade ovih signala su velikim intenzitetom razvijani i proučavani u proteklim decenijama. EKG signali se tipično snimaju kao višekanalni, pomoću odgovarajućih elektroda pozicioniranih na karakterističnim djelovima tijela pacijenata, i oni reprezentuju elektrofiziološke obrasce rada srčanog mišića koji se manifestuju u vidu sitnih bioelektričnih promjena na koži. Primjer dvokanalnog EKG signala signala predstavljen je na slici 2.4 (a). Signal je preuzet iz poznate baze biomedicinskih signala „MIT-BIH ECG Compression Test Database”, snimljenih u okviru djelatnosti laboratorije „Laboratory for Computational Physiology” pri programu „Harvard-MIT Health Sciences and Technology”, kao dio šire baze koja je u cjelosti dostupna online. Mnogi segmenti EKG signala igraju odgovarajuće važne uloge u dijagonostičkim procedurama. Ovi signali su decenijama dovod¯eni u vezu sa Hermitskom transformacijom, najčešće u kontekstu uklanjanja šuma, karakterizacije i kompresije. Jedan od segmenata EKG signala koji je važan u medicinskoj dijagnostici jeste i QRS kompleks. Sastavljen od tri talasa, u oznaci Q, R i S, vizuelno je vjerovatno najprepoznatljiviji dio EKG signala. Po jedan od QRS kompleksa iz oba kanala posmatranog signala je uokviren na slici 2.4 (a). Njihov uvećan prikaz može se vidjeti na slici 2.4 (c), sa označenim karakterističnim djelovima. Na slici 2.4 (b) prikazana je i neposredna okolina selektovanog QRS kompleksa u okviru posmatranog EKG signala iz drugog kanala, gdje se prvenstveno mogu uočiti tzv. P i T talasi. Imajući u vidu veliku dijagnostičku važnost QRS kompleksa, ali i činjenicu da su već razvijeni brojni efikasni algoritmi za njihovu detekciju, godinama su proučavane i odgovarajuće kompresione procedure. Značaj ovakvih algoritama ogleda se, izmed¯u ostalog, u činjenici da u komprimovanoj formi može biti sačuvan veći broj QRS kompleksa u sklopu odgovarajućih baza signala pacijenata, koji se dalje mogu koristiti u praćenju zdravstvenog stanja, istorije . 1 Dio dvokanalnog EKG signala iz baze „MIT-BIH ECG Compression Test Database" (a) Amplituda [mV] Kanal 1 Kanal 2 0.5 0 -0.5 -1 0 1 2 3 4 5 6 Vrijeme [s] 1 Dio EKG signala iz kanala 2 1 QRS kompleksi u dva kanala (b) R (c) R Kanal 1 Amplituda [mV] 0.5 0.5 Kanal 2 P T 0 0 Q -0.5 Amplituda [mV] -0.5 Q S -1 -1 S 1.8 1.9 2 2.1 2.2 2.3 2.4 2 2.02 2.04 2.06 2.08 2.1 Vrijeme [s] Vrijeme [s] Slika 2.4: Dio dvokanalnog EKG signala i QRS kompleksi: (a) dio dvokanalnog EKG signala sa označenim parom QRS kompleksa, (b) okolina jednog QRS kompleksa iz drugog kanala, (c) selektovani QRS kompleksi iz oba kanala. bolesti pacijenta itd. Značaj se ogleda i u mogućnosti njihovog efikasnog med¯uinstitucionalnog transfera u slučaju potrebe za dodatnim ekspertizama. Dodatno, čuvanje velikog broja komprimovanih QRS kompleksa otvara mogućnost i za njihovo proučavanje ne samo u kontekstu medicine, već i u kontekstu obrade signala i multidisciplinarne oblasti biomedicine, razvoja novih automatizovanih dijagnostičkih procedura primjenom vještačke inteligencije, klasifikacije, detekcije itd. U okviru razmatranog kompresionog problema, ključno je reprezentovati QRS komplekse sa što je moguće manjim brojem transformacionih koeficijenata, i pri tome praviti grešku koja je medicinski prihvatljiva. Cilj je iskoristiti predstavljene algoritme za optimizaciju parametara Hermitske transformacije u cilju postizanja najbolje moguće koncentracije QRS kompleksa u domenu DHT1, a zatim ove optimizovane reprezentacije inkorporirati u kompresionu proceduru predstavljenu u [91] i [92]. Kompresioni algoritam iz [91] i [92] funkcioniše na sljedeći način. Pretpostavlja se da je razmatrani QRS kompleks x(t) odabran u tačkama λt1, λt2, . . . , λtN , tako da se dobija vektor xˆ, i za njega se računaju Hermitski koeficijenti C korišćenjem obrasca (2.37). Nakon toga, na osnovu L koeficijenata vektora C sa najvećim vrijednostima, formira se vektor C˜, u kojem su svi preostali koeficijenti, kojih ima N − L, postavljeni na nulu. Aproksimacija razmatranog signala se može izračunati inverznom formulom x˜ = T−H1C˜, (2.44) gdje je TH inverzna transformaciona matrica (2.72). Algoritam prezentovan u [92] može biti unaprijed¯en korišćenjem optimizacije parametara Hermitske transformacije (DHT1). Naime, u ovom algoritmu, kontinualni signal x(t) je odabran u tačkama λt1, λt2, . . . , λtM , gdje je faktor skaliranja λ odabran tako da se dobije najmanji mogući broj koeficijenata u vektoru C˜, pod uslovom da je greška u rekonstrukciji E = ‖˜x − x‖2 ‖x‖2 (2.45) manja od 10%, što je medicinski prihvatljivo [91]. U ovakvom pristupu postoji nekoliko problema. Da bi se odredila optimalna vrijednost faktora skaliranja λ polazeći od kontinualnih ECG signala (QRS kompleksa), proces odabiranja mora da se ponovi za svaku vrijednost parametra λ iz nekog mogućeg opsega vrijednosti, što može predstavljati problem za ured¯aje kojima se odabiranje sprovodi. Zatim, Hermitska transformacija se računa za svako moguće λ, a (2.45) se koristi za odred¯ivanje onog λ za koje je E ≤ 10%. Druga mogućnost je da se koristi fiksna vrijednost λ za sve komplekse. Med¯utim, lako se pokazuje da neadekvatno odabran parametar λ vodi do većeg broja Hermitskih koeficijenata sa značajnim vrijednostima u vektoru C˜. Štaviše, naši eksperimentalni rezultati, ali i rezultati u [91] i [92] pokazuju da svaki QRS kompleks ima drugačiju optimalnu vrijednost faktora skaliranja λ, što znači da bi ured¯aj za odabiranje morao da se ručno podešava za svaki kompleks, što je, naravno, praktično neprihvatljivo. Sa druge strane, QRS kompleksi razmatrani u [91] orignalno su uniformno odabrani, i reodabiraju se korišćenjem interpolacije (2.33), dok se optimalno λ traži mjerenjem kompresionog odnosa (engl. compression ration) koji treba da bude maksimizovan uz uslov da je greška E ≤ 10%. Mešutim, ovakav pristup je numerički zahtjevan, budući da i inverzna i direktna Hermitska transformacija moraju biti računate za svaki posmatrani broj koeficijenata sa najvećim vrijednostima, i za svaki posmatrani faktor skaliranja λ. Navedene probleme moguće je riješiti korišćenjem predloženih optimizacionih procedura za faktor skaliranja vremenske ose λ i parametra pomjeraja l koje su zasnovane na mjerama koncentracije, prije nego što se primijeni kompresioni algoritam. Sama kompresija QRS kompleksa i dalje se obavlja korišćenjem algoritma iz

[91]. U svrhu testiranja razmatra se 168 EKG signala iz online baze „MIT-BIH Compression Test Database” [150]. U svim slučajevima se posmatra samo prvi kanal. Automatizovanim algoritmom koji je dostupan online u sklopu pratećih programa rada [91] ekstraktovano je ukupno Q = 1486 kompleksa, koji se pojavljuju u prvih 10 s u svakom od razmatranih signala. Signali su uniformno odabrani, sa korakom ∆t = 1/250 [s]. U proceduri testiranja razmatrane su tri moguće dužine: 2D + 1 ∈ {27, 29, 31}. Rezultati kompresije su prikazani u tabeli 2.1. Kao kriterijumi pored¯enja korišćen je broj transformacionih koeficijenata koji produkuju grešku u aproksimaciji E ≤ 10%, kao i prosječni kompresioni odnos koji se računa po formuli ACR = i=1 (Q2Di + 1) Q (2.46) ∑ i=1 L , i ∑ Tabela 2.1: Prosječni broj transformacionih koeficijenata i prosječni kompresioni odnos prilikom kompresije testiranih 1486 QRS kompleksa. Dobijene vrijednosti garantuju da je greška u aproksimaciji manja od 10%. Kriterijum pored¯enja HT kompresioni DFT DCT Predloženi pristup algoritam iz [91] kompresija kompresija Prosječni broj koeficijenata 5.0 5.8 Prosječni kompresioni odnos 6.2 5.3 8.3 3.7 7.3 4.3 gdje je Li broj nenultih transformacionih koeficijenata koji produkuju grešku manju od 10%, a 2Di + 1 je dužina i-tog QRS kompleksa. Druga, treća i četvrta kolona sadrže odgovarajuće rezultate publikovane u [91], koji uključuju kompresiju zasnovanu na Hermitskoj transformaciji računatoj algoritmom iz [91], kao i kompresione pristupe zasnovane na DFT-u i DCT-u. U originalnom pristupu [91] koji koristi numerički zahtjevnu proceduru pretraživanja mogućih faktora skaliranja λ, u prosjeku je potrebno 5.8 Hermitskih koeficijenata za adekvatnu rekonstrukciju komprimovanih QRS kompleksa sa greškom E ≤ 10%. U predloženom metodu (prva kolona u tabeli 2.1) postoji poboljšanje ovog rezultata, ukoliko se iskoristi dodatna optimizacija parametra vremenskog pomjeranja sa lmax = 3, l ∈ {−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3}. Ukoliko se iskoristi i optimizacija faktora skaliranja i optimizacija parametra vremenskog pomjeraja korišćenjem pristupa predloženih u ovoj sekciji, u prosjeku je potrebno samo 5 Hermitskih koeficijenata, što predstavlja poboljšanje rezultata za 13.8% (ne računajući poboljšanje u brzini izvršavanja algoritma). Prosječna vrijednost faktora skaliranja na nivou svih

Q = 1486 QRS kompleksa iznosi **λ/∆t = 4.2495** (u sekundama **λ = 4.2495/250 = 0.017,** 3

što je vrijednost koja je eksperimentalno dobijena u [92], što dodatno potvrd¯uje tačnost predloženog pristupa. U eksperimentu je korišćena vrijednost koraka µ = 0.05. Razmotrimo i prosječan broj bita po odbirku: a) u vremenskom domenu ovaj broj je 9 bps, b) u slučaju optimizovane DHT1 postoji 5 najznačajnijih koeficijenata koji su čisto realni, od ukupno 31 vrijednosti unutar QRS kompleksa, (jedna nenulta vrijednost se može pojaviti izmed¯u 5 nenultih koeficijenata, pa se smatra da je potrebno kodirati 6 koeficijenata), što daje rezultat od 2 bps; c) u slučaju DFT-a, u prosjeku postoji 8 najznačajnijih koeficijenata (koji su kompleksni, odnosno, imaju i realne i imaginarne djelove) koje je potrebno kodirati, od ukupno 31, što je aproksimativno 7 bps u prosjeku. Primjer QRS kompleksa iz baze [150] je prikazan na slici 2.5. Originalni signal je prikazan na slici 2.5 (a), dok su odgovarajući Hermitski koeficijenti prikazani na slici 2.5 (b). Mjera koncentracije je najmanja za pomjeraj l = 1 (signal pomjeren za ovu vrijednost je prikazan na slici 2.5 (a) crvenom bojom), sa odgovarajućim faktorom skaliranja λ/∆t = 0.4352 (u sekundama λ = 0.0176). Optimalno pomjereni signal, koji je reodabran u tačkama proporcionalnim nulama Hermitskog polinoma (reda N = 27, i sa konstantom proporcionalnosti λ/∆t = 0.4352) prikazan je na slici 2.5 (c), dok su odgovarajući Hermitski koeficijenti prikazani na slici 2.5 (d). Greška E ≤ 10% postiže se sa samo četiri značajna Originalni i pomjer.eni QRS kompleks Amplituda [mV] 1 0.5 0 -0.5 -1 Originalni QRS kompleks Pomjereni QRS kompleks (a) -0.05 QRS kompleks reodabran uz optimalno λ i l 0 m∆t [s] 0.05 Amplituda [mV] 0.5 0 -0.5 -1 1 Reodabrani kompleks Aproksimacija kompleksa (c) -0.05 0 λtnΔt [s] 0.05 Standardna DHT1 originalnog i pomjerenog signala C (p) 200 100 0 DHT1 originalnog kompleksa DHT1 pomjerenog kompleksa -100 -200 (b) 200 C (p) 0 -200 -400 0 5 10 15 20 25 p Optimizovana DHT1 Najznačajniji koeficijenti Koeficijenti DHT1 (d) 0 5 10 15 20 25 p Slika 2.5: Optimalno skaliranje, pomjeranje i reodabiranje QRS kompleksa: (a) originalni i optimalno pomjereni signal, (b) Hermitski koeficijenti originalnog i pomjerenog signala, (c) pomjereni reodabrani signal sa optimalnim faktorom skaliranja i signal rekonstruisan na osnovu samo 4 najznačajnija Hermitska koeficijenta (relativna greška manja od 10%), (d) optimizovana Hermitska transformacija reodabranog pomjerenog signala i 4 najznačajnija koeficijenta. koeficijenta, koji su na slici označeni zvjezdicama. Signal koji je rekonstruisan pomoću samo ova četiri koeficijenta predstavljen je crta-tačka linijom na slici 2.5 (c). Evidentan je visok nivo poklapanja sa originalnim reodabranim signalom. I drugi djelovi EKG signala mogu biti reprezentovani sa malim brojem Hermitskih koeficijenata, iako ne jednako efikasno kao u slučaju QRS kompleksa. Ilustrujmo ovo na primjeru T-talasa, prikazanom na slici 2.6 (a), koji je dio jednog od EKG signala iz baze [150]. Nakon primjene prezentovanog algoritma, T-talas je reprezentovan sa samo 14 koeficijenata sa značajnim vrijednostima (od ukupno 106), što je 13% dužine signala, koji garantuju relativnu rekonstrukcionu grešku koja je manja od 10%. Na nivou cijele razmatrane baze „MIT-BIH Compression Test Database” (prvi kanal, prvih 10 sekundi od svih 168 EKG signala) [150] greška E ≤ 10% se postiže sa oko 23% značajnih koeficijenata (u odnosu na dužinu signala). Hermitske transformacije originalnog i optimalno pomjerenog signala prikazane su na slici 2.6 (b), signal reodabran sa optimalnim faktorom skaliranja prikazan je na slici 2.6 (c), dok je odgovarajuća optimizovana DHT1 prikazana na slici 2.6 (d). Na istoj slici su najznačajniji koeficijenti označeni zvjezdicom, dok je aproksimacija zasnovana na tim koeficijentima upored¯ena sa reodabranim signalom na slici 2.6 (c). Originalni i pom.jereni T-talas 0.8 Amplituda [mV] 0.6 0.4 0.2 0 -0.2 Originalni T-talas Pomjereni T-talas -0.2 -0.1 0 0.1 mΔt [s] T-talas reodabran uz optimalno λ i l 0.2 Amplituda [mV] 0.8 0.6 0.4 0.2 0 -0.2 Reodabrani T-talas Aprok(sai)macija T-talasa -0.2 -0.1 0 0.1 λtnΔt [s] 0.2 Standardna DHT1 originalnog i pomjerenog signala DHT1 originalnog T-talasa 200 DHT1 pomjerenog T-talasa C (p) 100 0 0 20 40 60 80 100 p Optimizovana DHT1 (b) Najznačajniji koeficijenti 200 Koeficijenti DHT1 C (p) 100 0 0 20 40 60 80 100 p Slika 2.6: Optimalno skaliranje, pomjeranje i reodabiranje T-talasa EKG signala: (a) originalni i optimalno pomjereni signal, (b) Hermitski koeficijenti originalnog i pomjerenog signala, (c) pomjereni reodabrani signal sa optimalnim faktorom skaliranja i signal rekonstruisan na osnovu 14 najznačajnijih Hermitskih koeficijenata (relativna greška manja od 10%), (d) optimizovana Hermitska transformacija reodabranog pomjerenog signala i 14 najznačajnijih koeficijenata. 2.3 Uticaj aditivnog šuma na Hermitske transformacione koeficijente U ovoj sekciji će biti izvedeni izrazi za varijansu i srednju vrijednost koeficijenata diskretne Hermitske transformacije, u slučaju prisustva aditivnog bijelog Gausovog šuma. Izraz za varijansu će poslužiti za definisanje jednostavnog pristupa za uklanjanje šuma. Prezentovani rezultati će biti dodatno inkorporirani i u algoritme za rekonstrukciju signala u kontekstu kompresivnog odabiranja, u narednoj sekciji. 2.3.1 Hermitski koeficijenti zašumljenog signala Vektor aditivnog bijelog Gausovog šuma srednje vrijednosti nula ε. Bez gubljenja opštosti izlaganja, podrazumijevano je da su odbirci šuma dostupni u diskretnim tačkama tn, n = 1, . . . , N koje odgovaraju nulama Hermitskog polinoma N -tog reda, i da je faktor skaliranja vremenske ose σ = 1. DHT1 ovog vektora ima sljedeći oblik: d1ε(t1) 0 ··· 0 Ξ = THε = QRε = Q ⌈ 0 d2ε(t2) ··· 0 . . ... ⌉ 0 . (2.47) ⌊ 0 0 ⌊ ··· dNε(tM) ⌋ ⌋ Zaključuje se da se skalirani odbirci šuma dnε(tn), n = 1, 2 . . . , N razvijaju u ortogonalnom vektorskom prostoru sastavljenom od vrsta matrice Q. U slučaju ortogonalnih transformacionih matrica kao što je DFT matrica, odbirci šuma se pojavljuju neskalirani u kvadratnoj matrici R, što znači da će aditivni bijeli Gausov šum na DHT1 uticati drugačije nego na DFT. Stoga je potrebno posebno izvesti statističke osobine Hermitskih koeficijenata koji odgovaraju signalu x(tn) koji je zahvaćen ovom aditivnim bijelim Gausovim šumom ε(tn): x(tn) = s(tn) + ε(tn). Pošto je DHT1 linearna transformacija, slijedi: X(p) = S(p) + Ξ(p), (2.48) (2.49) gdje je C(p) Hermitska tranformacija signala s(tn). Pošto je šum ε slučajni Gausov proces, kao posljedica teoreme o odabiranju i definicije DHT1 (2.14), zaključuje se da su Ξ(p) i X(p) takod¯e slučajne varijable sa Gausovskom prirodom. Dalje ćemo analizirati statističke osobine slučajne promjenljive X(p). Srednja vrijednost se može izraziti u sljedećem obliku: μX (p) = E {X (p)} = S (p) + E {Ξ(p)} . (2.50) Kako za aditivni šum sa srednjom vrijednošću nula važi E{ε(n)} = 0, dalje se može pisati: μX(p) = C(p) + 1 N ψp(tn) N n=1 [ψN−1(tn)]2E {ε(tn)} = C(p). (2.51) ∑ Uz pretpostavku da je srednja vrijednost šuma ε(tn), polazeći od definicije varijanse slučajne promjenljive X(p) slijedi: σX2

(p) = E |X (p) − μX (p)|2 = E {|C (p) + Ξ(p)|2 }− μ2X (p) = N1 {2 n∑1M =1 n ∑2= 7
1 [ψNψ−p (1}

t(nt1n)1)]2 [ψNψ−p1(t(ntn2)2)]2 E {ε(tn1)ε(tn2)}. N (2.52) (2.53) 0.4 1.5 (a) (b) 0.35 γ(p, N) N = 100 1 0.3 ξ(N) 0.5 0.25 0.2 0 20 40 60 80 0 100 200 300 400 500 p N Slika 2.7: Funkcije koje se pojavljuju u izrazima za varijansu Hermitskih koeficijenata zašumljenog signala: (a) funkcija γ(p,N) i (b) funkcija ξ(N). U slučaju aditivnog bijelog šuma sa varijansom σε2, autokorelaciona funkcija je rεε(tn1, tn2) = E{ε(tn1)ε(tn2)} = σε2δ(tn1 − tn2). Inkorporiranjem (2.54) u izraz za varijansu (2.53), dobija se σX2 (p) = Nσε22 ∑n=1 [ψNψ−2p(1t(ntn))]4 = γ (p, N) σε2. N (2.54) (2.55) Rezultat (2.55) indicira da je varijansa DHT1 koeficijenata zavisna od indeksa p. Usrednjavanje izraza (2.55) dalje daje 1 N −1 N σ¯X2 = 1 N−1 ψp(tn)ψp(tn) N ∑p=0 σX2(p)Nσε22 n=1 [ψN−1(tn)]2 N 1 p=0 [ψN−1(tn)]2 N ∑ ∑ = Nσε22 [ψN−1(tn)]−2 = ξ(N)σε2. (2.56) ∑n=1 Funkcija γ (p, N) za N = 100 je prikazana na slici 2.7 (a), dok je funkcija ξ (N) prikazana na istoj slici pod (b). Srednja vrijednost prve funkcije je 0.2753. To znači da prvih 60 koeficijenata imaju varijansu (skaliranu sa γ (p, N)) koja je manja od ove srednje vrijednosti, dok su preostali koeficijenti skaliranani sa većim vrijednostima, pa su zbog toga osjetljiviji na uticaj šuma. Bitno je uočiti da su signali koji su dobro koncentrisani u DHT1 domenu (QRS kompleksi, UWB signali itd.) takvi da su transformacioni koeficijenti sa najznačajnijim vrijednostima upravo u dijelu gdje je varijansa manja. Ovo takod¯e znači da je moguće uvesti adekvatan prag za razdvajanje koeficijenata koji odgovaraju signalu od koeficijenata koji predstavljaju šum. Slika 2.7 (b) pokazuje da se srednja vrijednost varijanse smanjuje sa povećavanjem dužine signala N . U slučaju DHT2, budući da je transformaciona matrica (2.30) ortogonalna, i da su vrste matrice normalizovane (jer su sopstveni vektori matrice T), zaključuje se da je varijansa DHT2 koeficijenata signala (2.48): σ˜X2(p) = ση2, (2.57) vodeći računa da je u ovom slučaju signal uniformno odabran, i da su odbirci zašumljeni na uniformnom grid-u. 2.3.2 Uklanjanje šuma postavljanjem praga u DHT1 domenu Prezentovana diskusija može se direktno iskoristiti u proceduri za uklanjanje šuma, Dodatno, rezultati će u sljedećoj sekciji biti inkorporirani u kontekst kompresivnog odabiranja. Posmatra se signal (2.48) zahvaćen aditivnim bijelim Gausovim šumom čija je varijansa σε2 . Iz dosadašnjeg izlaganja zaključili smo da je DHT1 koeficijent X (p) predstavlja slučajnu promjenljivu opisanu Gausovom distribucijom N (0, σX2 (p)). Uklanjanje šuma može biti obavljeno direktnim postavljanjem praga za odvajanje koeficijenata koji korespondiraju signalu, od koeficijenata koji ne sadrže komponente signala, već samo šum (engl. hard-thresholding). Xden(p) = X (p), |X (p)| > T (p) { 0, |X (p)| ≤ T (p). (2.58) Treba uočiti da je prag T (p) funkcija od indeksa p, usljed matematičke forme varijanse (2.55). Naime, koristeći izraz za varijansu, odnosno standardnu devijaciju Hermitskih koeficijenata X (p), prag se može definisati u sljedećoj formi: T (p) = ασX (p) = α γ (p, M)σε (2.59) √ gdje konstanta α obezbjed¯uje da koeficijenti koji odgovaraju šumu budu ispod nivoa praga. Za mnoge realne signale, kao što su UWB signali i QRS kompleksi, koeficijenti sa malim vrijednostima indeksa p su najznačajniji. Nelinearna forma praga (2.59) povećava vjerovatnoću razdvajanja koeficijenata koji korespondiraju komponentama signala od koeficijenata koji predstavljaju čisti šum, slika 2.7 (a). Za α = 3 , prema poznatom 3σ empirijskom pravilu, koeficijenti šuma će biti ispod praga sa vjerovatnoćom od 99.73%. U slučaju DHT2, za hard-thresholding proceduru (2.58) treba koristiti standardni prag: T = ασε (2.60) Kako prezentovani metod za uklanjanje šuma može poslužiti kao alternativa uklanjanju šuma zasnovanom na DFT-u, razmotrimo i povećanje numeričke složenosti pristupa u odnosu na DFT ekvivalent. Kako DHT1 (odnosno ekvivalentne forme koje podrazumijevaju upotrebu numeričkih kvadratura) može biti izračunata brzim algoritmima [91], [92], aproksimativna numerička složenost je O(N log22 N) operacija sa realnim vrijednostima, u pored¯enju sa O(N log2 N) operacija sa kompleksnim vrijednostima potrebnih u slučaju DFT-a. Povećanje Zašumljeni Q.RS kompleks Amplituda [mV] -0.2 -0.4 0.4 0.2 0 (a) -0.1 -0.05 0 0.05 0.1 Vrijeme [s] DHT1 zašumljenog QRS kompleksa 200 Zašumljeni koeficijenti (c) 150 Prag |C (p)| 100 50 0 0 10 20 30 40 50 p Originalni i QRS kompleks nakon uklanjanja šuma Amplituda [mV] -0.2 -0.4 0.4 (b) 0.2 0 -0.1 -0.05 0 0.05 0.1 Vrijeme [s] Hermitski koficijenti nakon uklanjanja šuma 200 (d) 150 Originalna DHT1 DHT1 nakon uklanjanja šuma |C (p)| 100 50 0 0 10 20 30 40 50 p Slika 2.8: Uklanjanje aditivnog bijelog Gausovog šuma iz QRS kompleksa: (a) zašumljeni QRS kompleks, (b) originalni signal (puna linija) i signal iz kojeg je uklonjen šum (crta-tačka-crta linija), (c) DHT1 zašumljenog kompleksa i prag, (d) DHT1 koeficijenti originalnog signala i signala iz kojeg je uklonjen šum. složenosti je, dakle, umjereno čak i za veliku dužinu signala N . Za računanje praga (2.59) potrebno je dodatnih O(N) operacija. 2.3.3 Numerički rezultati i primjene Primjer 2.3. Razmatra se QRS kompleks s(λtn), odabran u tačkama proporcionalnim nulama Hermitskog polinoma, sa faktorom skaliranja koji je odred¯en primjenom algoritma 5 koji je opisan u prethodnoj sekciji, kako bi postignuta visoka koncentracije DHT1 koeficijenata. QRS kompleks dužine N = 51 je preuzet iz jednog od signala dostupnih u bazi „MIT-BIH ECG Compression Test Database" [150], i originalno je bio odabran u skladu sa teoremom o odabiranju, sa periodom od ∆t = 1/250 [s]. Signal je zatim oštećen vještačkim aditivnim bijelim Gausovim šumom srednje vrijednosti nula, tako da je odnos signal-šum (SNR) jednak 6 dB. Rezultati uklanjanja šuma za posmatrani signal prikazani su na slici 2.8 (a)-(d). Na slici 2.8 (b) uočena je značajna redukcija šuma. U hard-thresholding proceduri korišćen je parametar α = 3 za prag (2.59). Zanimljivo je uočiti da je koeficijent koji predstavlja komponentu signala na poziciji p = 3, iako po vrijednosti manji od koeficijenta šuma na poziciji p = 47, pravilno odabran pomoću praga (ima veću vrijednost od praga), usljed njegove nelinearne forme. Samo nekoliko koeficijenata signala koji su mnogo slabiji od šuma ostali su ispod praga, i to na pozicijama p = 6, p = 7 i p = 8, slika 2.8 (d). Srednja kvadratna greška (MSE) izmed¯u originalnog i zašumljenog signala od -28.71 dB je smanjena na -35.83 dB, nakon primjene procedure za uklanjanje šuma, što je poboljšanje od oko 7.1 dB. Zašumljeni Q.RS kompleks Uklanjanje šuma bez kompenzacije pomjeraja Amplituda [mV] 0.4 (a) 100 DHT1 zašumljenog signala (b) 0.2 80 DHT1 nakon denoising-a DHT1 originalnog signala 0 |C (p)| 60 Prag 40 -0.2 20 -0.4 0 -0.1 -0.05 0 0.05 0.1 0 10 20 30 40 50 Vrijeme [s] p DHT1 nakon optimalnog pomjeranja signala Hermitski koficijenti nakon uklanjanja šuma (c) 200 (d) 150 Zašumljeni koeficijenti 150 Originalna DHT1 Prag DHT1 nakon uklanjanja šuma |C (p)| 100 |C (p)| 100 50 50 0 0 0 10 20 30 40 50 0 10 20 30 40 50 p p Originalni i QRS kompleks nakon uklanjanja šuma 1400 Mjera koncentracije Amplituda [mV] 0.4 (e) (f) 0.2 1200 0 M(v) 1000 -0.2 800 -0.4 -0.1 -0.05 0 0.05 0.1 -0.04 -0.02 0 0.02 0.04 0.06 0.08 Vrijeme [s] v = l∆t [s] Slika 2.9: Uklanjanje aditivnog bijelog Gausovog šuma iz pomjerenog QRS kompleksa: (a) zašumljeni pomjereni QRS kompleks, (b) Hermitski koeficijenti zašumljenog pomjerenog QRS kompleksa, nezašumljenog pomjerenog QRS kompleksa, rezultat uklanjanja šuma i prag, (c) DHT1 zašumljenog optimalno pomjerenog kompleksa i prag, (d) DHT1 koeficijenti originalnog optimalno pomjerenog signala i signala iz kojeg je uklonjen šum (e) nezašumljeni originalni signal (puna linija) i signal iz kojeg je uklonjen šum (crta-tačka-crta linija), (f) mjera koncentracije u funkciji od parametra pomjeraja na vremenskoj osi. Razmotrimo sada QRS kompleks koji je vještački vremenski pomjeren, s1(tn) = s(tn−c), gdje je c = 0.028 [s], koji je prikazan na slici 2.9 (a). U ovom slučaju signal neće biti optimalno koncentrisan u DHT1 domenu, što se može uočiti na slici 2.9 (b). Iako prag (2.59) uspijeva da razdvoji veliki broj koeficijenata signala od koeficijenata koji predstavljaju čisti šum, jedan dio ipak ostaje ispod praga, što će rezultirati lošijem uklanjanju šuma. Kvantitativno, MSE je povećana za oko 2 dB, u odnosu na slučaj QRS kompleksa koji je bio centriran oko nule na vremenskoj osi. Naime, posmatranjem koeficijenata nezašumljenog pomjerenog signala (crna boja), uočava se da je jedan broj njih ispod nivoa šuma, što se vidi pored¯enjem sa koeficijentima pomjerenog zašumljenog signala (plava boja). Pomjeranje signala na vremenskoj osi je uzrokovalo lošiju koncentraciju signala i degradiralo mogućnost uklanjanja šuma. Navedeni problem može biti riješen tako što se prije postupka uklanjanja šuma izvrši pomjeranje kompleksa, po proceduri koja je slična opisu iz sekcije 2.2.2, odnosno, rješavanjem optimizacionog problema N−1 1 N vopt = arg min ψp(tn) v N n=1 [ψN−1(tn)] 2 s(tn − v) , (2.61) ∑p=0 ∑ i pomjeranjem analiziranog signala za v|rijednost vopt = c. Optimiz|acioni problem (2.61) se može riješiti jednodimenzionim pretraživanjem u prostoru mogućih vrijednosti parametra v. Nakon nalaženja optimalnog parametra vopt, na pomjereni signal se primjenjuje hard-thresholding procedura sa pragom (2.59). Na slici 2.9 (f) je za posmatrani signal prikazana mjera koncentracije M(v) = Np=−01 |N1 Nn=1 [ψNψ−p(1t(ntn))]2s(tn − v)|, i to za vrijednosti v u opsegu [-0.04 s, 0.088 s], sa k∑orakom 0∑.04 s. Globalni minimum ove funkcije odgovara pomjeraju vopt = c = 0.028 s. Rezultati uklanjanja šuma, prikazani na slici 2.9 (c)-(e) za optimalno pomjereni QRS kompleks slični su rezultatima iz prvog dijela ovog primjera. Primjer 2.4. Razmatra se realni UWB signal na 1.3 GHz, koji je poslat izmed¯u dvije UWB antene na udaljenosti od 1 m, u sobnom okruženju. Signal je dobijen u eksperimentu koji je opisan u. Posmatra se prvih N = 165 odbiraka signala ACW7FD45.dat iz online baze [164]. Signalu je dodat vještački aditivni bijeli Gausov šum srednje vrijednosti nula, tako da je SNR = 3 dB, a zatim je izvršeno njegovo uklanjanje opisanim hard-thresholding pristupom u DHT1 domenu. Zašumljeni signal je prikazan na slici 2.10 (a), dok su odgovarajući DHT1 koeficijenti prikazani na slici 2.10 (c), zajedno sa pragom (2.59). Originalni nezašumljeni signal i signal nakon uklanjanja šuma su upored¯eni na slici 2.10 (b), dok su njihove DHT1 upored¯ene na slici 2.10 (d). Prilikom uklanjanja, korišćen je parametar α = 4. Može se uočiti da je šum značajno redukovan. Pretpostavljeno je da je varijansa šuma σε2 unaprijed poznata, budući da se može estimirati postupkom koji je opisan u. Nelinearni prag uspješno selektuje koeficijent sa indeksom p = 6 koji predstavlja komponentu signala, iako on ima gotovo istu vrijednost kao koeficijent na poziciji šuma p = 154 (koji ostaje ispod praga). Samo koeficijenti signala sa najmanjim vrijednostima ostaju ispod praga. U cilju pored¯enja, uklanjanje šuma je obavljeno i u DFT domenu, ekvivalentnim hard-thresholding pristupom, gdje je korišćen odgovarajući DFT prag TDFT = αNσε2, pri čemu je α = 4, kao za slučaj DHT1. Rezultati uklanjanja su prikazani na slici 2.9 (e)-(f), gdje su lošije performanse u odnosu na DHT1 pristup evidentne. U slučaju DHT1 pristupa, rezultujući MSE je iznosio -24.23 dB, dok je u slučaju DFT pristupa MSE jednak -16.07 dB. Redukcija MSE u odnosu na polazni zašumljeni signal je iznosila 11.8 dB u DHT1 pristupu, i 3.63 dB u DFT slučaju. Primjer 2.5. U cilju što je moguće bolje numeričke validacije rezultata, prethodno opisani eksperimenti su sprovedeni za opseg SNR vrijednosti: od -10 dB do 15 dB, sa korakom 1 dB. Za svaku SNR vrijednost izračunata je MSE izmed¯u originalnog signala i signala iz kojeg je uklonjen šum, na bazi 500 nezavisnih slučajnih realizacija vještačkog aditivnog bijelog Gausovog šuma koji je dodat signalu. Rezultati su prikazani na slici 2.11. Rezultati uklanjanja šuma u slučaju UWB signala iz primjera 2.4 su prikazani na slici Zašumljeni UWB signal 1 (a) Amplituda 0.5 0 -0.5 -1 0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 Vrijeme [ns] DHT1 zašumljenog UWB signala 1 Zašumljeni koeficijenti Prag (c) |C (p)| 0.5 0 15 |X(k)| 10 5 0 0 50 100 150 p Uklanjanje šuma u DFT domenu (e) 0 50 100 150 k Originalni i UWB signal nakon uklanjanja šuma 1 (b) Amplituda -1 -1.5 0.5 0 -0.5 0 Hermitski koficijenti nakon uklanjanja šuma 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 Vrijeme [ns] |C (p)| 1 Originalna DHT1 DHT1 nakon uklanjanja šuma (d) 0.5 0 0 50 100 150 p Originalni i UWB signal nakon uklanjanja šuma 1 (f) Amplituda 0.5 0 -0.5 -1 0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 Vrijeme [ns] Slika 2.10: Uklanjanje aditivnog bijelog Gausovog šuma iz realnog UWB signala: (a) zašumljeni UWB signal, (b) nezašumljeni originalni signal (puna linija) i signal iz kojeg je uklonjen šum (crta-tačka-crta linija), (c) Hermitski koeficijenti zašumljenog signala i prag, (d) DHT1 zašumljenog optimalno pomjerenog kompleksa i prag, (e) DFT zašumljenog signala (plave tačke), prag (horizontalna linija), odabrani koeficijenti (crvene tačke) i originalni koeficijenti (crne tačke), (f) pored¯enje originalnog nezašumljenog signala i signala dobijenog uklanjanjem šuma u DFT domenu. 2.11 (a). Rezultati potvrd¯uju da primjenom DHT1 metoda sa nelinearnim pragom dolazi do značajnog smanjenja srednje kvadratne greške. Štaviše, eksperiment je ponovljen i za slučaj uklanjanja šuma hard-thresholding pristupom u kombinaciji sa diskretnom wavelet transformacijom (DWT). Razmatrano je uklanjanje šuma zasnovano na „Symlet 8" (sym8) i „Daubechies 8" (db8) wavelet-ima. U oba slučaja je korišćena dekompozicija nivoa 5. Ove specifične vrste wavelet-a su odabrane usljed velike sličnosti talasnih oblika njihovih baznih funkcija sa razmatranim signalom. Uklanjanje šuma je izvršeno pomoću dva različita pravila za odabir praga za wavelet koeficijente: Štajnov „Unbiased Risk Estimate" u slučaju db8 wavelet-a, i „Universal threshold with level-dependent estimation of the noise" predložen od strane Donohoa i Džonstona za sym8 wavelet . U svim slučajevima primjenjena je metoda hard-thresholding-a. U ovom numeričkom eksperimentu je korišćena implementacija funkcije wden dostupna u okviru Wavelet Toolbox-a softverskog paketa MATLAB○R. Skaliranje praga je obavljeno korišćenjem jedne estimacije nivoa šuma zasnovane na koeficijentima prvog nivoa. Na slici 2.11 (a) je uočljivo da oba wavelet pristupa daju slučne rezultate. Eksperiment potvrd¯uje da mogućnost visoko koncentrisane reprezentacije signala u DHT1 domenu može biti ključno u uklanjanju šuma, čak i kada je ono zasnovano na veoma jednostavnim metodama, kao što je hard-thresholding. Dodatno, performanse uklanjanja šuma su testirane i u slučaju pristupa zasnovanom na postavljanju praga u DCT domenu. U ovom slučaju, prag (2.59) je postavljen na nivo TDCT = ασε2, imajući u vidu ortogonalnost DCT transformacione matrice. I u ovom slučaju je korišćen parametar α = 4. Uklanjanje šuma zasnovano na DHT1 metodu je i u ovom slučaju dalo bolje rezultate, 2.11 (a). Konačno, izvršeno je i pored¯enje sa metodom uklanjanja šuma zasnovano na hard-thresholding pristupu i DHT2, sa pragom TDHT2(p) = ασε, uz istu vrijednost parametra α = 4. U slučaju ove verzije diskretne Hermitske transformacije korišćena je ista vrijednost faktora skaliranja vremenske ose σ = 1, kao u slučaju DHT1. Sa slike 2.11 (a) uočljivo je da je uklanjanje šuma u DHT2 domenu produkovalo nešto lošije rezultate od uklanjanja u DHT1 domenu. Zanimljivo je uočiti da postoji visoka vizuelna sličnost izmed¯u MSE krivih, što je u skladu sa prethodno diskutovanom sličnošću izmed¯u baznih funkcija ovih transformacija. Performanse DHT2 mogu biti poboljšane ukoliko se izvrši optimizacija faktora skaliranja vremenske ose, kao što je to urad¯eno za DHT1. Označimo sa T˜H(σ) DHT2 transformacionu matricu sa baznim funkcijama ψ˜p(n, σ) , n, , p = 0, . . . , N − 1. Važno je istaći da promjena parametra σ ne narušava svojstvo ortogonalnosti [5]. Poboljšana koncentracija DHT2 se može postići rješavanjem problema: M−1 M−1 σopt = min T˜H(σ)x = min σ σ s(n)ψ˜p(n, σ) , (2.62) ‖ 1 ‖ ‖ ∑p=0 ∑n=0 koji predstavlja minimizaciju ℓ1-norme transformacio|nih koeficijenata|, koja se koristi u ‖ ‖ kontekstu obrade rijetkih signala i kompresivnog odabiranja. Rješenje problema (2.62) je faktor skaliranja koji produkuje najbolju moguću koncentraciju transformacionih koeficijenata. Rješenje se može pronaći direktnim pretraživanjem u zadatom prostoru mogućih vrijednosti parametra σ. Dalje istraživanje ovog koncepta i komparativna analiza prevazilazi okvire ove disertacije, i predmet je budućih istraživanja. Eksperiment sa opsegom SNR vrijednosti je ponovljen i za QRS komplekse iz primjera 2.4. Na slici 2.11 rezultati su prikazani za nekoliko vrijednosti parametra α: slika 2.11 (b) α = 3, slika 2.11 (c) α = 3.5, slika 2.11 (c) α = 4. U cilju pored¯enja pod jednakim uslovima, uklanjanje šuma postavljanjem praga u DFT domenu urad¯eno je i za uniformno odabrani signal iz baze [150] (slučaj je označen sa „DFT1" na slikama 2.11 (b)-(d)), ali i za slučaj neuniformno odabranog signala orišćenog za DHT1 (u oznaci .„DFT2" na slikama 2.11 (b)-

(d)). U oba slučaja, isti šum je dodat odbircima signala. Rezultati pokazuju da uklanjanje šuma u DHT1 domenu daje dominantno niže MSE vrijednosti u svim slučajevima. MSE nakon uklanjanj.a šuma: UWB signal -5 DHT1 DFT -10 db8 sym8 MSE [dB] DCT DHT2 -15 -20 -25 (a) α = 4 -10 -5 0 SNR [dB] 5 10 15 MSE nakon uklanjanja šuma: QRS kompleks -15 (c) α = 3.5 -20 MSE [dB] -25 -30 DHT1 DFT 1 -35 DFT 2 -10 -5 0 5 10 15 SNR [dB] MSE nakon uklanjanja šuma: QRS kompleks -15 (b) α = 3 -20 MSE [dB] -25 -30 DHT1 DFT 1 DFT 2 SASS -35 DCT -10 -5 0 5 10 15 SNR [dB] MSE nakon uklanjanja šuma: QRS kompleks -15 (d) α = 4 -20 MSE [dB] -25 -30 DHT1 DFT 1 DFT 2 -35 -10 -5 0 SNR [dB] 5 10 15 Slika 2.11: Srednja kvadratna greška (MSE) izmed¯u originalnog (nezašumljenog) signala i signala iz kojeg je uklonjen šum, prikazana za različite odnose signal-šum (SNR): (a) u slučaju UWB signala, (b)-(d) u slučaju QRS kompleksa za različite nivoe parametra α. Za α = 3, izvršeno je pored¯enje i sa procedurom za uklanjanje šuma postavljanjem praga u DCT domenu. U ovom slučaju prag je psotavljen u skladu sa varijansom DCR koeficijenata TDCT = lσ2ε. Na slici 2.11 (b) uočljive su niže MSE vrijednosti dobijene DHT1 metodom za uklanjanje šuma. Rezultati su dodatno upored¯eni i sa veoma naprednim modernim algoritmom za uklanjanje šuma iz EKG signala: „Sparsity-Assisted Signal Smoothing" (SASS). U eksperimentu je korišćena implementacija dostupna online, sa originalnim setom parametara. Rezultati su prezentovani na slici 2.11 (b). MSE kriva prikazana na slici je dobijena na način čiji opis slijedi. SASS algoritam je napravljen tako da radi sa čitavim EKG signalima, umjesto da se procesiranje vrši samo sa selektovanim QRS kompleksom. Stoga, algoritmu se kao ulaz prosljed¯uje cio EKG signal iz baze [150], čiji je dio i razmatrani QRS komples. Ovaj signal je oštećen aditivnim bijelim Gausovim šumom sa istim varijansama koje su korišćene pri evaluaciji ostalih razmatranih tehnika. Uklanjanje šuma je obavljeno SASS algoritmom, sa podrazumijevanim setom parametara iz dostupne implementacije. Nakon toga, QRS kompleks od interesa je izdvojen iz signala iz kojeg je šum otklonjen, a zatim je taj rezultat upored¯en sa originalnim QRS kompleksom. Kao i u ostalim slučajevima, eksperiment je ponovoljen Varijansa u funkciji pozicije p Zavisnost varijanse od σϱ2 0.008 σ2X (p) 0.15 σ¯X2 V arijansa σ¯2 X 0.006 0.1 0.004 Teorija 0.002 Numerički rezultat 0.05 Teorija Prosjek (teorija) Numerički rezultat 0 0 50 100 150 0.2 0.4 σϱ2 0.6 0.8 0.01 (a) 0.2 Prosječna varijansa (b) p Slika 2.12: Varijansa DHT1 koeficijenata za UWB signal oštećen aditivnim bijelim Gausovim šumom: (a) varijansa u funkciji od indeksa p transformacionog koeficijenta, (b) prosječna varijansa transformacionih koeficijenata u funkciji od varijanse ulaznog šuma. po 500 puta (sa slučajnim realizacijama šuma) za svaku posmatranu SNR vrijednost, na bazi kojih je izračunata MSE koja je prikazana na slici 2.11 (b). Na ovaj način, SASS algoritam je testiran bez ikakvih promjena parametara. Sa rezultata na slici 2.11 (b) može se uočiti da ovaj metod daje umjereno bolje rezultate od metoda uklanjanja šuma primjenom DHT1 sa pragom, i to u SNR opsegu od 0 dB do 10 dB. Med¯utim, cijena ovog poboljšanja je značajno povećana numerička složenost u slučaju SASS algoritma. Jednostavna (primitivna) procedura za uklanjanje šuma primjenom DHT1 sa pragom dala je rezultate koji su uporedivi sa rezultatima veoma napredne tehnike za uklanjanje šuma (u razmatranom kontekstu QRS kompleksa). Numerička validacija izraza za varijansu U cilju numeričke potvrde validnosti izvedenog izraza za variansu (2.55) i njene srednje vrijednosti (2.56), sprovedena su dva eksperimenta sa zašumljenim UWB signalom posmatranim u primjeru 2.4. U prvom testu, signal je zašumljen vještačkim aditivnim bijelim Gausovim šumom sa varijansom σε2 = 0.030 , koja daje SNR nivo od 5 dB. Varijansa DHT1 koeficijenata je numerički izračunata na bazi 10000 nezavisnih realizacija šuma. Rezultat prikazan na slici (2.12) (a) se potpuno poklapa sa teorijskim izrazom (2.55). Na istoj slici je srednja vrijednost (2.56) varijanse prikazana horizontalnom linijom. U drugom eksperimentu, varijansa ulaznog šuma σε2 je varirana u opsegu od 10−6 do 1, sa korakom 10−2. Za svaku posmatranu SNR vrijednost, izračunata je srednja varijansa DHT1 koeficijenata, koja se u velikoj mjeri poklapa sa teorijskim rezultatom (2.56), što je prikazano na slici (2.12) (b). Na obije posmatrane slike je, zbog bolje vizuelne prezentacije, prikazana svaka peta vrijednost numeričkog rezultata. 2.4

Rekonstrukcija signala rijetkih u Hermitskom transformacionom domenu Motivacija za proučavanje diskretne Hermitske transformacije u kontekstu kompresivnog odabiranja stoji u činjenici da odred¯ene vrste realnih signala, kao što su QRS kompleksi i UWB signali mogu biti visoko koncentrovano (rijetko) reprezentovani u ovom transformacionom domenu. U okviru ove sekcije, biće prezentovana analiza uticaja nedostajućih odbiraka na koeficijente diskretne Hermitske transformacije, koji će biti interpretirani kao slučajne varijable, čije su statističke karakteristike predmet prezentovane analize. Pored toga, biće uspostavljena veza sa indeksom koherentnosti parcijalne matrice diskretne Hermitske transformacije, zatim če biti analiziran uticaj aditivnog Gausovog šuma na performanse CS rekonstrukcije. Dodatno, biće izveden eksplicitni izraz za grešku u rekonstrukciji signala koji nijesu rijetki, ali koji su rekonstruisani pod pretpostavkom da jesu rijetki u DHT1 domenu. Analiza će biti potkrijepljena većim brojem numeričkih eksperimenata. Na kraju, biće prezentovana originalna interpretacija gradijentnog algoritma za rekonstrukciju signala rijetkih u Hermitskom transformacionom domenu. 2.4.1 Uticaj nedostajućih odbiraka Razmatra se DHT1 signala x(tn), gdje tačke odabiranja tn , n = 1, . . . , N , odgovaraju nulama Hermitskog polinoma reda N . Tada se Hermitski koeficijenti računaju primjenom Gaus-Hermitske kvadrature (2.14) N C(p) = 1 ψp(tn) N n=1 (ψN−1(tn))2 x(tn), (2.63) ∑ pri čemu uzeto da je σ = 1 bez gubljenja opštosti izlaganja. Budući da je pokazano da parametar može biti inkorporiran u razmatrani signal, ali i zbog činjenice da ne utiče na med¯usobnu ortogonalnost diskretnih funkcija ψp(tn), parametar σ će biti izostavljen u notaciji Hermitskih funkcija u ovoj podsekciji, uz pretpostavljenu vrijednost σ = 1. Pretpostavlja se da je posmatrani signal x(tn) rijedak u Hermitskom transformacionom domenu (DHT1), što podrazumijeva da se on može zapisati na sljedeći način: K x(tn) = Alψpl(tn), (2.64) ∑l=1 gdje je K ≪ N broj nenultih komponentni signala, odnosno stepen rijetkosti, dok su Al amplitude komponenti signala i pl indeksi njihovih pozicija u Hermitskom transformacionom domenu. Skup pozicija nenultih komponenti biće označen sa ΠK = {p1, p2,...,pK}. Za multikomponentni signal (2.64), Hermitski koeficijenti zadati su sljedećim izrazom: N K C(p) = ∑n=1 ∑l=1 N (ψN−1(tn))2 , p = 0, . . . , N − 1. Al ψp(tn)ψpl(tn) (2.65) Normalizovane komponente signala se množe sa baznim funkcijama ψp(tn)/(ψN−1(tn))2, dajući signal z(pl, p, tni) definisan izrazom: z(pl, p, tn) = ANl ψ(pψ(Ntn−)1ψ(ptln()t)n2) . Vrijednosti signala z(pl, p, tn) pripadaju skupu Al ψp(tn)ψpi(tn) Ω = 2 , n = 1, . . . , N, l = 1, . . . , K, p = 0, . . . , N − 1 . { N (ψN−1(tn)) } Imajući u vidu svojstvo ortogonalnosti Al N ψp(tn) N n=1 (ψN−1(tn))2 ψpl(tn) = Alδ(p − pl), ∑ slijedi da članovi skupa Ω zadovoljavaju relaciju: N z (pl , p, tn) = z (pl , p, t1) + z (pl , p, t2) + ... + z (pl , p, tN) = 0 ∑n=1 za p ≠ pl , l = 1, 2, . . . , K , odnosno, N z (pl , p, tn) = z (pl , p, t1) + z (pl , p, t2) + ... + z (pl , p, tN) = Al ∑n=1 za p = pl , l = 1, 2, . . . , K . Neka je dostupno NA < N odbiraka signala (nedostupno NQ = N − NA): y = x(tn1),x(tn2),...,x(tnNA) ⊆ x = {x(t1),x(t2),...,x(tN)} { } gdje je N (2.66) (2.67) (2.68) (2.69) (2.70) x(tni) = C(p)ψp(tni), i = 1, . . . , NA, (2.71) ∑p=0 na pozicijama tn ∈ NA = {tn1,tn2,...,tnNA} ⊆ N = {t1,t2,...,tN}. Skup pozicija nedostupnih odbiraka je podskup skupa pozicija svih dostupnih odbiraka NQ = N\NA i prećutno je podrazumijevana uniformnna funkcija gustine raspodjele pozicija odbiraka ni ∈ NA. U matričnom zapisu, dostupni odbirci se mogu zapisati u formi y = AC gdje A predstavlja NA × N matricu mjerenja, dok je C = [C(0), C(1), . . . , C(N − 1)]T vektor Hermitskih signala koji odgovara vektoru signala x. Matrica mjerenja je parcijalna inverzna DHT1 matrica, čije su vrste jednake onim vrstama matrice T−H1, koje odgovaraju pozicijama dostupnih odbiraka tni, i = 1, . . . , NA: ψ0(tn1) ψ1(tn1) . . . ψN−1(tn1) A= ⎡ ψ0(tn2) ψ1(tn2) ··· ψN−1(tn2) ⎤ . . . . (2.72) ⎢ψ0(t ⎣ nNA) ψ1(tnNA) ··· ψN−1(tnNA) ⎥ ⎦ Inicijalna DHT1 zasnovana na ℓ2-normi ima sljedeću formu: K C0(p) = z(pl, p, tn), (2.73) tn∑∈NA ∑l=1 ili matrično: C0 = AT y. U slučaju kompresivnog odabiranja, razmatra se, dakle, podskup skupa Ω od NA ≤ N slučajno pozicioniranih odbiraka: Θ = {z(pl,p,tn1),z(pl,p,tn2),...,z(pl,p,tnNA)} ⊆ Ω. (2.74) Budući da je DHT1 linearna transformacija u kojoj se vrši unutrašnje množenje signala sa baznim funkcijama, nedostupni odbirci u signalu daju isti rezultat kao kada su ti odbirci jednaki nuli. Kao posljedica toga, redukovani broj obiraka (mjerenja) može se posmatrati kao skup svih odbiraka, u kojem su neki od njih oštećeni aditivnim šumom koji se može modelovati na sljedeći način: η(pl, p, tn) = −z(pl, p, tn), tn ∈ NQ { 0, tn ∈ NA. (2.75) Inicijalna DHT1 (zasnovana na ℓ1 normi) se na bazi dostupnih odbiraka može dalje zapisati na sljedeći način: C0(p) = K z(pl, p, tn) = tn∑∈NA ∑l=1 N K [z(pl, p, tn) + η(pl, p, tn)], (2.76) ∑n=1 ∑l=1 za p = 0, . . . N − 1. Ovo je slučajna promjenljiva, i cilj je odred¯ivanje njenih statističkih karakteristika. Statističke karakteristike DHT1 koeficijenata u slučaju signala sa nedostajućim odbircima Monokomponentni signali. Posmatra se slučaj jednokomponentnog signala sa K = 1, Al = 1 i pl = p1. Inicijalna DHT1 (zasnovana na ℓ1 normi) se na bazi dostupnih odbiraka može izračunati na sljedeći način: NA C0(p) = z(p1, p, tn) = z(p1, p, tni), (2.77) tn∑∈NA ∑i=1 za p = 0, . . . N − 1. Ovo je slučajna varijabla, formirana kao suma NA slučajno pozicioniranih odbiraka. Po Centralnoj graničnoj teoremi, varijabla C0(p) ima normalnu (Gausovu) distribuciju. Odred¯ivanje srednje vrijednosti i varijanse ove slučajne promjenljive je predmet daljeg izlaganja. Navedena varijabla ima drugačije statističke osobine na pozicijama p = p1 od statističkih osobina na pozicijama p ≠ p1. Pozicije p = p1 će u daljem izlaganju biti označene kao pozicije komponenti signala, dok će pozicije p ≠ p1 biti označene kao pozicije (CS) šuma, jer one ne odgovaraju komponentama signala. Slučaj kada je p ≠ p1. Za Hermitske koeficijente koji ne odgovaraju komponentama signala, može se smatrati da korespondiraju aditivnom šumu u transformacionom domenu. Imajući u vidu da su posmatrani odbirci z(p1, p, tni), i = 1, . . . , NA slučajno pozicionirani (sa uniformnom raspodjelom), na bazi (2.69) se može zaključiti da je E {z(p1, p, tni)} = 0, gdje se operator matemaitičkog očekivanja primjenjuje po vremenskoj varijabli tni. Stoga, srednja vrijednost posmatrane slučajne varijable jednaka je nuli: NA μC0(p) = E {C0(p)} = E z(p1, p, tni) = 0, p ≠ p1. { i=1 } (2.78) ∑ Varijansa slučajne promjenljive C0(p), p ≠ pl definisana je sljedećim izrazom: σC20(p) = E |C0(p)|2 = E { NA NA} z(p1,p,tni)z(p1,p,tnj) {i=1 j=1 } ∑∑ NA NA NA =E z2(p1, p, tni) + E } ⎧ z(p1, p, tni)z(p1, p, tnj)⎫ . (2.79) { i=1 ∑ ⎪⎬∑i=1 ∑ji=≠j1 ⎨⎪ S 1 S 2 ︸ ︸︸ ︸ ⎪⎩⎭⎪ Množeći lijevu i desnu stranu izraza (︸2.69) sa z(pl, p, tn︸︸i), i + 1, 2, . . . , N︸A, i primjenom operatora matematičkog očekivanja na lijevu i desnu stranu izraza, dobija se: E {z (pl , p, tni)[z (pl , p, t1) + z (pl , p, t2) + ... + z (pl , p, tN)]} = 0, (2.80) odnosno: E {z (pl , p, tni)z (pl , p, t1)} + · · · + E {z (pl , p, tni)z (pl , p, tN)} = 0, (2.81) za i = 1, 2, . . . , NA. Vrijednosti z(pl, p, tni) su jednako distribuirane, pa su očekivanja E {z(pl, p, tni)z(pl, p, tj)} , i ≠ j, tni ∈ NA, tj ∈ N ista i jednaka konstanti B. Za ni = j i p ≠ p1 očekivanje postaje: E{z2(pl, p, tni)} = E {N12 ψ(pψ(Ntn−i)1ψ(tpn(it)n)i2) ψ(p1ψ(Ntn−i1)(ψtpn1i()t)n2i) } =E 1 ψp(tni)ψp(tni) 1 ψp1(tni)ψp1(tni) {N (ψN−1(tni))2 {N (ψN−1(tni))2 E , (2.82) } } gdje je iskorišćena statistička nezavisnost vrijednosti Hermitskih funkcija reda p1 i p po tni , pa su matematička očekivanja razdvojena. Dalje, usljed ortogonalnosti (2.70) slijedi: E { N1 ψ(pψ(Ntn−i1)ψ(tpn(it)n)i2) = E {N1 ψ(p1ψ(Ntn−i)1(ψtpn1i()t)n2i) = 1 . } } N Dakle, zaključuje se da važi E{z2(pl,p,tni)} = E{z(p,p,tni)}E{z(pl,pl,tni)} = N2 1 . (2.83) (2.84) Pošto u izrazu (2.81) postoji N − 1 očekivanja jednakih B za ni ≠ j i jedno očekivanje dato izrazom (2.84) za ni = j, izraz (2.81) dalje postaje: 1 N2 + (N − 1)B = 0. (2.85) Odavde je dalje moguće izraziti nepoznatu vrijednost B: E {z (pl , p, tni)z (pl , p, tj)} = B = −1 N 2 (N − 1) , ni ≠ j (2.86) Budući da u članu S1 izraza (2.79) postoji NA sumanada, dok u članu S2 postoji NA(NA − 1) sumanada, traženi izraz za varijansu Hermitskih koeficijenata u slučaju signala sa nedostajućim odbircima, na pozicijama koeficijenata p ≠ p1 koje ne odgovaraju komponentama signala postaje: σC20(p) = NNA2 + NA(NA − 1)B, odnosno, nakon preured¯ivanja i uvod¯enja oznake σc2sN = σ2C0(p) za p ≠ p1: σc2sN = NNA(2N(N−−N1A)) . (2.87) (2.88) Može se zaključiti da varijansa Hermitskog transformacionog šuma u koeficijentima na pozicijama p ≠ p1 koje ne odgovaraju komponentama signala zavisi samo od broja dostupnih odbiraka NA i dužine orignalnog signala N. Prema Centralnoj graničnoj teoremi, slučajna varijabla C0(p) za p ≠ p1 ima normalnu (Gausovu) raspodjelu. Slučaj kada je p = p1. Statističke osobine Hermitskih koeficijenata se u slučaju pozicija p = p1 koje odgovaraju komponentama signala značajno razlikuju od osobina koeficijenata na pozicijama p ≠ p1. Budući da proizvod ψp1(tni)ψp1(tni) u razmatranom slučaju zavisi od vrijednosti specifičnih Hermitskih funkcija ψp1(tni), čiji su odbirci dostupni na slučajnim pozicijama, može se zaključiti da su koeficijenti C0(p), p ≠ p1 takod¯e slučajne varijable sa normalnom distribucijom, što je i u ovom slučaju posljedica Centralne granične teoreme. Na osnovu definicije signala z(p1,p1,tn) iz skupa Θ sa NA slučajno pozicioniranih dostupnih odbiraka, srednja vrijednost slučajne varijable C0(p) p = p1 (definisana kao suma tih signala) direktno slijedi kao posljedica principa ortogonalnosti (2.70): μC0(p) = { i=1 ψp(1ψ(Ntn−i)1(ψtpn1i()t)n2i) NA , p = p1, 1 N A N E } = N (2.89) ∑ budući da su vrijednosti jednako distribuirane. Za slučajnu promjenljivu sa nenultom srednjom vrijednošću i normalnom raspodjelom varijansa se definiše u obliku: NA NA NA σC20(p) = E z2(p1, p, tni) + E ⎧ z(p1, p, tni)z(p1, p, tnj)⎫ − μC0(p) 2 , (2.90) {∑i=1 } ⎪⎪∑i=1 ∑ji=≠j1 ⎪⎨ ⎪ gdje je p = p1. Računanje pojedinačnih djelova u (2.90) će se razlikovati od prethodno ⎪⎩⎪⎭ ⎪ razmatranog slučaja za (p ≠ p1). Polazeći od svojstva ortogonalnosti (2.70) uz A1 = 1, množenjem lijeve i desne strane izraza sa z(p1, p, tni), tni ∈ NA, i primjenom operatora matematičkog očekivanja dobija se: E{z(p1, p, tni)z(pl, p, t1)} + · · · + E{z(p1, p, tni)z(pl, p, tN)} = E{z(p1, p, tni)}, (2.91) odnosno, E{z(p1, p, tni)z(pl, p, t1)} + · · · + E{z(p1, p, tni)z(pl, p, tN)} = 1 N , (2.92) Za ni ≠ j, tni ∈ NA, tj ∈ N, važiće: E{z(p1,p,tni)}E{z(pl,p,t1)} = ⋯ = E{z(p1,p,tni)}E{z(pl,p,tN)} = E{z(p1,p,tni)}E{z(pl,p,tj)} = D. (2.93) Za ni = j, matematičko očekivanje E{z2(p1, p, tni)} ne može biti estimirano u obliku proizvoda E{z(p1, p, tni)}E{z(pl, p, tj)}, budući da članovi nijesu statistički nezavisni. Stoga, u cilju odred¯ivanja E{z2(p1, p, tni)} posmatraće se sljedeća suma: N 1 N 2 ∑i=1 z2(p1,p,tni) = N2∑i=N1((ψψNp−211((ttnnii)))2) = 1 1 N 2 a(tni,p1,N) = N2Pp1 (2.94) ∑i=1 što odgovara energiji monokomponentnog signala definisanog Hermitskom funkcijom reda p1. Treba uočiti da je uvedena notacija (ψNψp2−11((ttnnii)))2 = z2(p1, p, tni) = a(tni, p1, N), gdje su 2 tni ∈ NA slučajne pozicije NA dostu(pnih odbirak)a. Pokazuje se da važi E {a(tni, p1, N)} = a(p1, N) = PNp31 . Sada (2.91) postaje: a(p1, N) + (N − 1)D = 1 N , (2.95) dok se nepoznato D može izraziti u obliku D = 1 − N a(p1, N) N (N − 1) (2.96) Varijansa (2.90) razmatrane slučajne promjenljive C0(p), p ≠ p1 se sada može zapisati u obliku: σC20(p) = NAa(p1, N) + NA (NA − 1) D − NA 2 (N) 2 = NAa(p1, N) + NA (NA − 1) 1 − N a (p1, N) NA N (N − 1) − . (2.97) (N) Nakon jednostavnog sred¯ivanja prethodnog izraza, varijansa se predstaviti na sljedeći način: σC20(p1) = NNN2(AN−−N1A2) N 2a(p1, N) − 1 = σN2 ⎛ N ∑ti=1 ((ψψNp−211((ttnnii)))2 1 N (2) − 1 ⎞ = σN2 Pp 1 − 1 . (2.98)) (N) ⎝⎠ Primjer 2.6. Relacija (2.98), koja opisuje na koji način varijansa zavisi od pozicije p1 komponente signala u Hermitskom transformacionom domenu je verifikovana i numerički. Rezultati su prikazani na slici 2.13 za slučaj signala dužine N = 200, sa NA = 120 dostupnih odbiraka. Numerički proračun varijanse je dobijen na bazi 5000 nezavisnih realizacija signala sa slučajno pozicioniranim nedostajućim odbircima. 0.02 Varijansa DHT1 koeficijenata u funkciji od pozicije p0 Numerički rezultat Teorijski rezultat 0.015 V arijansa 0.01 0.005 0 0 20 40 60 80 100 120 140 160 180 200 p0 Slika 2.13: Varijansa na poziciji komponente signala, kao funkcija od indeksa p1 Kada je dostupno samo NA od ukupno N odbiraka, očekivani bias u amplitudi se može kompenzovati sa NNA , dok član Pp1 može biti estimiran na osnovu dostupnih odbiraka na sljedeći način: NA ψp21 (tni) 2 P˜p1 = ∑i=1 ((ψN −1 (tni))2 . (2.99)) Korišćenjem ove estimacije, varijansa Hermitskog koeficijenta C0(p) na poziciji komponente signala p = p1 u slučaju nedostajućih odbiraka može se aproksimirati na sljedeći način: σ˜C20(p1) = NA σN2 P˜p N (N 1 −1 .) (2.100) Za amplitude A1 ≠ 1, dobijene izraze za srednje vrijednosti je potrebno pomnožiti sa A1, a dobijene izraze za varijanse je potrebno pomnožiti sa A21. Analiza greške u detekciji komponente signala. Na osnovu predstavljene teorije o stohastičkim karakteristikama Hermitskih koeficijenata monokomponentnih signala rijetkih u DHT1 domenu, moguće je izvršiti probabilističku analizu greške u detekciji Hermitskog koeficijenta koji predstavlja komponentu signala, odnosno njegovog razdvajanja od ostalih koeficijenata. Prema Centralnoj graničnoj teoremi, uspostavljeno je da je slučajna varijabla C0(p) sa Gausovom raspodjelom. Srednje vrijednosti i varijanse su različite za indekse p = p1 i p ≠ p1. Za p ≠ p1 raspodjela je: N(0,σc2sN), dok za p = p1 važi raspodjela N(NNAA1,σC20(p1)). Izvedene statističke karakteristike koeficijenata izmed¯u ostalog će poslužiti u definisanju metoda za razdvajanje komponenti signala od šuma u transformacionom domenu indukovanog nedostajućim odbircima u signalu. Navedeni postupak se može posmatrati kao detekcija komponente signala. U tu svrhu, posmatraćemo apsolutne vrijednosti slučajnih varijabli C0(p) za p = p1 i p ≠ p1. Apsolutna vrijednost slučajne varijable C(p), p = p1 sa raspodjelom N(NNAA1,σC20(p1)) sa srednjom vrijednošću (2.89) i varijansom (2.98) ima „savijenu" normalnu distribuciju (engl. folded normal distribution): p(ξ) = 1 √ exp − (ξ − NNA A1)2 (ξ + NNA A1)2 σC0(p1) 2π ((2σC20(p1)) + exp − (2σC20(p1))) , (2.101) gdje je slučajna promjenljiva ξ = |C (p)|. Raspodjela je prikazana na slici 2.14 (a). Na istoj slici prikazan je i numerički dobijen histogram, baziran na 20000 nezavisnih realizacija jednokomponentnog signala rijetkog u Hermitskom domenu, sa slučajno pozicioniranim nedostajućim odbricima. Slučajna varijabla koja korespondira šumu u Hermitskom transformacionom domenu, C (p), p ≠ p1, ima takod¯e normalnu raspodjelu N (0, σc2sN). Njena aposolutna vrijednost, ξ = |C0(p)| p ≠ p1 podliježe tzv. polunormalnoj funkciji gustine raspodjele (engl. half-normal distribution): √ η(ξ) = 2 ξ2 (2.102) σcsN √ exp −2σc2sN) π , (gdje je varijansa σc2sN data izrazom (2.88). Navedena distribucija, sa eksperimentalno dobijenim histogramom (u istom eksperimentu sa 20000 ponovljenih realizacija signala sa slučajno pozicioniranim nedostajućim odbircima), prikazana je na slici 2.14 (b). Vjerovatnoća da je slučajna promjenljiva ξ = |C (p)| , p ≠ p1 manja od vrijednosti Ξ je data formulom: Ξ √ PN (Ξ) = 2 √ exp − ξ2 π 2σc2sN) dξ = erf √ Ξ (2.103) ∫0 σcsN ((2σcsN) . Ukupan broj Hermitskih koeficijenata koji ne odgovaraju komponentama signala je N − 1. Raspodjela koeficijena.ta na poziciji p = p0 14 Monokomponentni signal, p0 = 149 (a) Skalirani histogram 12 10 8 p(ξ),ξ = |C(p0)| 6 4 2 0 0 0.2 0.4 0.6 0.8 Apsolutna vrijednost koeficijenta Raspodjela koeficijenata na pozicijama p ≠ p0 30 Skalirani histogram 25 Monokomponentni signal, p0 = 149 (b) 20 15 η(ξ), ξ = |C(p)|, p ≠ p0 10 5 0 0 0.2 0.4 0.6 0.8 Apsolutna vrijednost koeficijenta Slika 2.14: Histogrami i funkcije gustine raspodjele za Hermitske koeficijente monokomponentnog signala na: (a) pozicijama koje odgovaraju komponentama signala (b) na ostalim pozicijama. Histogrami ((a) siva površina za koeficijent na poziciji komponente signala (b) plava površina za koeficijent mimo pozicije signala) su simulirani sa NA = 120 od N = 200 dostupnih odbiraka, amplitudom A0 = 1, na bazi 20000 nezavisnih realizacija signala sa slučajno pozicioniranim nedostajućim odbircima. Teorijski rezultati su dobijeni korišćenjem iskrivljene normalne distribucije (2.101) računate sa varijansom (2.98) i polunormalne distribucije (2.102) sa varijansom (2.88). Vjerovatnoća da su N − 1 nezavisnih koeficijenata šuma manji od praga Ξ je: N −1 PN N (Ξ) = erf √ Ξ . (2.104) (2σcsN) Vjerovatnoća da je najmanje jedan šumni koeficijent veći od Ξ iznosi PN L (Ξ) = 1 − PN N (Ξ). U terminologiji standarde teorije detekcije, nulta hipoteza H0 može biti formulisana kao: C (p) je Hermitski koeficijent koji odgovara čistom šumu, odnosno, H0 : C (p), p ≠ p1 . Druga hipoteza može biti formulisana u obliku: C (p) je Hermitski koeficijent na poziciji signala, odnosno, H1 : C (p), p + p = 1. Ako je vrijednost koeficijenta signala u opsegu od ξ do ξ + dξ sa vjerovatnoćom x(ξ)dξ , on neće biti detektovan ukoliko je najmanje jedan Hermitski koeficijent šuma iznad vrijednosti ξ . Navedeno će se desiti sa vjerovatnoćom PN L (ξ)x(ξ)dξ = (1 − PN N (ξ))x(ξ)dξ . Razmatranjem svih mogućih vrijednosti ξ , greška u detekciji će nastupiti sa vjerovatnoćom ∞ PE(1) = (1 − PNN(ξ))x(ξ)dξ ∫0 ∞ N −1 = 1 σC0(p1) 2π ∫0 √ (1 − erf √ ξ (2σcsN)) × [exp − ((ξ − 2NNA A1)2 + exp 2σC0(p1)) (− (ξ 2+σC2NN0A(pA1)1)2)] dξ . (2.105) Prethodna relacija je vjerovatnoća greše u detekciji Hermitskog koeficijenta koji predstavlja komponentu signala, u jednokomponentnom signalu rijetkom u Hermitskom domenu sa slučajno pozicioniranim nedostajućim odbircima. Budući da je za jednokomponentne signale komponenta deterministička (jednaka je svojoj srednjoj vrijednosti), može se izvesti jednostavna apoksimacija prethodnog izraza za grešku: PE(1) ≈ 1 − erf √NNA A1 N −1 (2σcsN) . (2.106) Ovaj aproksimativni izraz može biti korigovan za 1.5 standardnu devijaciju komponente signala, uzimajući u obzir činjenicu da komponente signala koje su manje od srednje vrijednosti više doprinose veličini greške u detekciji od komponenti koje bi bile veće od srednje vrijednosti: PE(1) ≈ 1 − erf NA A1 − 1.5σC0(p1) N−1 N (√ 2σcsN) . (2.107) Vjerovatnoća lažnog alarma (engl. false alarm probability, vjerovatnoća da je koeficijent šuma iznad praga Ξ) data je izrazom: PFA(Ξ) =

1 − PNN(Ξ) = 1 − erf √ Ξ N −1 , (2.108) (2σcsN) dok vjerovatnoća prave detekcije (engl. true detection probability, vjerovatnoća da je koeficijent komponente signala iznad praga Ξ) moće biti izračunata na sljedeći način: ∞ PT D (Ξ) = (ξ − NNA A1)2 (ξ + NNA A1)2 (exp (− 2σC20(p1)) + exp − (2σC20(p1))) dξ , (2.109) ∫Ξ za zadati prag Ξ. Za datu dužinu signala N , ove vjerovatnoće su funkcije od broja dostupnih odbiraka NA, budući da se on pojavljuje u izrazima za varijanse i srednje vrijednosti. Primjer 2.7. Na osnovu izraza PFA(Ξ) i PTD(Ξ) može se izračunati tzv. ROC kriva (engl. receiver operating characteristic). Neka se posmatra jednokomponentni signal dužine N = 200 sa jediničnom amplitudom A1 = 1. Variranjem praga 0 ≤ Ξ ≤ 1 i računanjem ROC krivih (prikaz PTD(Ξ) u funkciji od PFA(Ξ)) za različite brojeve dostupnih odbiraka NA ∈ {10,20,40,60}, dobijeni su rezultati prikazani na slici 2.15. Šum usljed kompresivnog odabiranja nastaje kao posljedica nedostajućih odbiraka u samo jednoj komponenti signala, pa je stoga očekivano da se dekcija komponente u Hermitskom domenu može uspješno obaviti na osnovu malog broja dostupnih odbiraka, što je i potvrd¯eno prikazanim rezultatima. Ako se izračuna of PE(1) za razmatrane brojeve dostupnih odbiraka, dobija se sljedeći niz vjerovatnoća: PE(1)(NA = 10) = 0.44, PE(1)(NA = 20) = 0.16, PE(1)(NA = 40) = 0.01 and PE(1)(NA = 60) = 0.0. Navedene vrijednosti su saglasne sa rezultatima sa slike 2.15. „True positive" vjerovatnoća detekcije ROC krive u detekciji komponente (logaritamska skala) 10-1 10-2 NA = 10 NA = 20 NA = 40 NA = 60 10-12 10-10 10-8 10-6 10-4 10-2 100 „False negative" vjerovatnoća detekcije Slika 2.15: ROC krive u detekciji komponente signala, prikazane za nekoliko zadatih brojeva dostupnih odbiraka. Multikomponentni signali. Prethodnu analizu proširićemo na slučaj multikomponentnih signala koji su rijetki u DHT1 domenu. Razmatrana slučajna promjenljiva, za signal z(pl, p, tn) ∈ Ω postaje K C0(p) = z(pl, p, tn) tn∑∈NA ∑l=1 K = Al ψp(tn)ψpl(tn) tn∑∈NA ∑l=1 N (ψN−1(tn))2 , (2.110) i sada ima K komponenti, gdje je pl ∈ ΠK. Hermitski koeficijenti C0(p) imaju karakteristike Gausove slučajne varijable, sa srednjom vrijednošću koja je jednaka: K μC0(p) = Al NA ∑l=1 N δ(p − pl), (2.111) gdje je p = pl ∈ ΠK , budući da šum uzrokovan nedostajućim odbricima u svakoj komponenti ima srednju vrijednost nula, što je pokazano u analizi monokomponentnih signala. Varijansa Hermitskih koeficijenata na pozicijama mimo komponenti signala jednaka je: NNA2N(N−−N1A2) A2l, p ≠ pl, pl ∈ ΠK, K σC20(p) = σc2sN = (2.112) ∑l=1 budući da u slučaju koeficijenata sa indeksima p ≠ pl nedostajući odbirci iz svih komponenti izazivaju šum koji se na ovim pozicijama sabira. Komponente šuma koje potiču iz različitih komponenti signala su nekorelisane, i imaju srednju vrijednost nula. Budući da se sabiraju slučajne varijable sa normalnim raspodjelama koje su nezavisne, njihove varijanse se sabiraju. Sa druge strane, na osnovu prezentovane analize za monokomponentne signale, komponenta signala sa indeksom q = 1, 2, . . . , K , na poziciji p = pq ∈ ΠK ima varijansu σ˜C20(pq) ≈ NNA2N(N−−N1A2) N N A ψ2pi (tni) 2 [NA A2q (∑i=1 ((ψN −1 (tni))2) −1)] . (2.113) Dodatno, šum uzrokovan nedostajućim odbircima u preostalih K − 1 komponenti je takod¯e prisutan na poziciji q-te komponente. Navedeno znači da, pored šuma uzrokovanog nedostajućim odbircima u posmatranoj komponenti signala sa indeksom p = pq, i čija je varijansa σ˜C20(pq), na poziciji pq se sa tim šumom sabiraju šumovi uzrokovani nedostajućim odbricima iz preostalih komponenti, čiji su indeksi p = pl ∈ ΠK = {p1,p2,...,pK}, p ≠ pq. Ove slučajne promjenljive su sa normalnom raspodjelom, sa srednjim vrijednostima nula i sa varijansama: NNA2(N(N−−N1A))A2l, l ≠ q, l = 1,2,...,K. Zaključujemo da je srednja vrijednost komponente signala na poziciji pq ∈ ΠK jednaka AqNNA, q = 1,2,...,K, dok je njena varijansa definisana izrazom: σC20(pq) = NN(N−−NA1) P˜p K ⎛ A2q (N q − 1) + A2l ⎞ , (2.114) ⎜ ⎝ ∑l=≠1q ⎠ ⎟ gdje je NA P˜pq = ψp2q (tni) 2 i=1 ((ψN−1(tni))2) . (2.115) ∑ Može se zaključiti da koeficijent DHT1 na poziciji signala p = ppq ∈ ΠK predstavlja slučajnu promjenljivu sa Gausovom raspodjelom, modelovanu kao N Aq NNA , σC20(pq) . Koeficijenti koji odgovaraju Šumu modeluju se slučajnom varijablom(sa normalno)m raspodjelom N (0, σc2sN), gdje je varijansa σN2 data izrazom (2.112). Analiza greške u detekciji komponenti signala. Ekvivalentno prethodno analiziranom slučaju monokomponentnog signala, moguće je izvesti vjerovatnoću greške u detekciji Hermitskih koeficijenata koji odgovaraju

komponentama mulikomponentnog signala, u uslovima kada postoje nedostajući odbirci u vremenskom domenu. Pogrešna detekcija komponente signala se dešava kada je barem jedan Hermitski koeficijent šuma, sa pozicija p ≠ pq , q ∈ {1, 2, . . . , K } iznad koeficijenta na poziciji pq . Apsolute vrijednosti razmatranih slučajnih varijabli C (pq), pq ∈ ΠK i C (p), p ≠ pl podliježu polunormalnoj i iskrivljenoj normalnoj distribuciji, respektivno, kao što je i prikazano na slici 2.16. Slučajna varijabla ξ = |C (pq)| ima funkciju raspodjele (2.101), srednjom vrijednošću Aq NNA , q = 1, 2, . . . , K i varijansom (2.114). Slučajna varijabla koja reprezentuje koeficijente šuma ξ = |C (p)| , p ≠ pq , ima srednju vrijednost nula i varijansu (2.112), dok je njena funkcija raspodjele (2.102). Vjerovatnoća da N − K nezavisnih koeficijenata šuma budu manji od Ξ data je sljedećim Raspodjela koeficijenata na poziciji p = p1 2.5 Multikomponentni signal (a) Skalirani histogram 2 f(ξ),ξ = |C(p1)| 1.5 p0 = 9 p1 = 121 1 p2 = 109 p3 = 155 0.5 0 0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 Apsolutna vrijednost koeficijenta Raspodjela koeficijenata na pozicijama p ≠ pi 5 Multikomponentni signal (b) Skalirani histogram 4 η(ξ), v = |C(p)|, p ≠ pi, i = 0, 1, 2, 3 3 p0 = 9 p1 = 121 2 p2 = 109 p3 = 155 1 0 0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 Apsolutna vrijednost koeficijenta Slika 2.16: Histogrami i funkcije raspodjele za apsolutne vrijednosti Hermitskih koeficijenata multikomponentnog signala: (a) na poziciji jedne od komponenti signala (b) na pozicijama šuma. Histogrami ((a) siva površina za koeficijent na poziciji signala i (b) plava površina za koeficijent na poziciji šuma) su simulirani za multikomponentni signal sa NA = 120 dostupnih od ukupno N = 200 odbiraka, gdje su amplitude komponenti A1 = 1, A : 2 = 3, A3 = 4 i A4 = 2, na bazi 20000 nezavisnih realizacija signala sa slučajno pozicioniranim dostupnim odbircima. Teorijski rezultati su dobijeni korišćenjem iskrivljene Gausove raspodjele sa estimiranom varijansom (2.114), odnosno polunormalne raspodjele sa varijansom (2.112). izrazom: Ξ N −K PN N (Ξ) = erf √ . (2.116) (2σcsN) Slično kao u slučaju monokomponentnog signala, lako se pokazuje da je vjerovatnoća greške u detekciji q − te komponente signala u uslovima nedostajućih obiraka u multikomponentnom signalu data izrazom:: ∞ PE(q) 1 N −K √ 1 − erf √ ξ σC0(pq) 2π ∫0 ((2σcsN)) × [exp (− (ξ 2−σC2NN0A(pAq)q)2 + exp) (2σC0 (pq) − (ξ + 2NNA Aq)2)] dξ . (2.117) Uz iste pretpostavke kao u slučaju monokomponentnog signala, ova greška može biti aproksimirana izrazom: PE(q) ≈ 1 − erf (NNA Aq√−2σ1c.5sNσC0(pq) N −K) . (2.118) Numerička provjera izvedenih izraza Predstavljena teorija će biti evaluirana kroz nekoliko numeričkih eksperimenata. Sproveden je veći broj eksperimenata koji potvrd¯uju izvedene izraze za srednje vrijednosti i varijanse DHT1 koeficijenata kao slučajnih varijabli u kontekstu kompresivnog odabiranja, kao i izraza za vjerovatnoću greške u detekciji komponenti. Primjer 2.8. Na slikama 2.14 i 2.16 prikazani su histogrami Hermitskih koeficijenata C (p), na pozicijama komponenti signala i na pozicijama šuma, za slučaj monokomponentnog i multikomponentnog signala, respektivno. Histogrami su dobijeni na bazi 20000 realizacija signala sa slučajno pozicioniranim nedostajućim odbircima. Rezultati na slikama 2.14 i 2.16 numerički potvrd¯uju kako izraze za varijanse i srednje vrijednosti u razmatranim slučajevima, tako i prirodu odgovarajućih raspodjela Hermitskih koeficijenata kao slučajnih varijabli. Detalji eksperimenata predstavljeni su u sklopu caption-a slika. Primjer 2.9. Razmatra se monokomponentni signal rijedak u DHT1 domenu sa jediničnom amplitudom, definisan izrazom: x(tn) = ψp1(tn). (2.119) U signalu je dostupno NA od ukupno N odbiraka. Indeks p1 komponente signala u DHT1 domenu je variran izmed¯u: • 0 i 199 za signal dužine N = 200; • 0 i 399 za signal dužine N = 400. Za svaku zadatu vrijednost p1, izvedeno je 7000 nezavisnih realizacija signala sa NA slučajno pozicioniranih odbiraka u svakoj realizaciji, i na bazi njih je izračunata eksperimentalna vrijednost varijanse σ¯2C0(p1) koeficijenta na poziciji p1. Numerički dobijena varijansa je upored¯ena sa teorijskom σC20(p1) koja je data izrazom (2.98), ali i sa aproksimativnim izrazom (2.100). MSE je sračunata usrednjavanjem rezultata dobijenih za 7000 posmatranih realizacija. Rezultati su prikazani na slici 2.17 (a) i (b), za dvije razmatrane dužine signala, respektivno. Pored¯enje je sprovedeno za različite vrijednosti brojeve dostupnih odbiraka: (a) izmed¯u 2 i 200 sa korakom 10, i (b) izmed¯u 4 i 400, sa korakom 20. Plava isprekidana linija sa tačkama predstavlja srednju kvadratnu grešku izmed¯u eksperimentalnog rezultata i teorijskog modela (2.98), dok odgovarajuća crvena linija odgovara srednjoj kvadratnoj grešci izmed¯u eksperimentalnih rezultata i aproksimativnog modela (2.100), uz pretpostavku da p1 poznato. Može se uočiti da su MSE vrijednosti 10−9, što potvrd¯uje tačnost izvedenih teorijskih izraza. Primjer 2.10. Razmatra se monokomponentni signal (2.119), za tri moguće pozicije komponente signala (a) p1 = 1, (b) p1 = 266 i (c) p1 = 390. Dužina signala je N = 400. Broj MSE u računanju varijanse 5 4 3 2 1 0 ×10-9 N = 200 50 100 150 (a) 1.5 1 0.5 MSE u računanju varijanse 0 ×10-9 N = 400 (b) 50 100 150 200 250 300 350 Broj dostupnih odbiraka NA Broj dostupnih odbiraka NA Slika 2.17: Srednja kvadratna greška u proračunu varijanse korišćenjem izraza (2.98) i (2.100), za Hermitske koeficijente na poziciji komponente signala p1, za različite brojeve dostupnih odbiraka NA. Za posmatrano NA, MSE je reačunata za sve moguće pozicije p1. Razmatrane su dužine signala: (a) N = 200 i (b) N = 400. Za svaku poziciju p1, numeričke vrijednosti varijanse su sračunate na bazi 7000 nezavisnih realizacija signala sa slučajno pozicioniranim odbircima. dostupnih odibraka NA se varira izmed¯u 1 i N . Za svaku zadatu vrijednost NA, varijansa σC20(p) slučajne varijable C0(p) je izračunata numerički, na bazi 5000 nezavisnih realizacija signala, sa slučajno raspored¯enim pozicijama nedostajućih odbiraka. Varijansa σ2C0(p1) koja odgovara Hermitskim koeficijentima na poziciji p = p1 komponente signala je računata teorijski, po aproksimativnom izrazu (2.100), za svaku realizaciju signala. Rezultati su usrednjeni na bazi 5000 realizacija, za vako zadato NA. Za varijanse σ2C0(p1), rezultati su prikazani na slici 2.18 za: (a) p1 = 1, (b) p1 = 266 i (c) p1 = 390. Značajno poklapanje teorijskog i numeričkih rezultata evidentno je za sve razmatrane pozicije p1. Dodatno, varijansa σc2sN na pozicijama p ≠ p1 šuma je evaluirana eksperimentalno za sve tri razmatrane pozicije Hermitskog koeficijenta komponente p1. Za Hermitske koeficijente na pozicijama šuma, rezultati numeričke validacije izraza (2.88) prikazani su na slici 2.18 (d), potvrd¯ujući da je ova varijansa nezavisna od razmatrane pozicije komponente signala p1. Primjer 2.11. U ovom primjeru se vrši evaluacija izraza (2.117) za vjerovatnoću greške u detekciji Hermitskih koeficijenata koji odgovaraju komponentama signala, kao i odgovarajućeg izraza za aproksimaciju ove vjerovatnoće (2.118). Posmatra se signal dužine N = 200 sa K = 5 komponenti, zadat izrazom: K s(tn) = Alψpl(tn) (2.120) ∑l=1 uz Al = {1, 0.7, 0.5, 0.3, 0.2} i pl = {20, 54, 94, 162, 192} za l = 1, 2, . . . , K . Na slici 2.19 (a) prikazana je vjerovatnoća greške u detekciji za svaku od komponenti signala posebno, računata korišćenjem izraza (2.117). Na istoj slici prikazane su i krive odgovarajućeg aproksimativnog izraza (2.118). Broj distupnih odbiraka NA je variran izmed¯u 1 i 200. Horizontalna isprekidana ×10-3 Koeficijent na poziciji p1 = 1 ×10-3 Koeficijent na poziciji p1 = 266 8 (a) (b) V arijansa 6 4 2 Teorijski rezultat Numerički rezultat 0 0 × 10-3 NA Koeficijent na poziciji p1 = 390 100 200 300 400 4 (c) V arijansa 3 2 1 Teorijski rezultat Numerički rezultat 0 0 100 200 300 400 NA V arijansa 1 0.5 0 Teorijski rezultat Numerički rezultat 0 100 200 300 400 NA ×10-4Koeficijenti na pozicijama p0 ≠ p1 (d) 6 V arijansa 4 Teorijski p1 = 390 (num.) 2 p1 = 1 (num.) p1 = 266 (num.) 0 0 100 200 300 400 NA Slika 2.18: Statistička evaluacija izraza za varijansu Hermitskih koeficijenata jednokomponentnog signala u funkciji od broja dostupnih odbiraka NA: (a)-(c) varijansa koeficijenata na pozicijama komponenti signala, (d) prosječna varijansa Hermitskih koeficijenata jednokomponentnog signala na pozicijama šuma, p ≠ p1, prikazana u slučajevima tri različite pozicije komponenti p1. linija označava vjerovatnoću greške PE = 10−2. Može se zaključiti da se tačni i aproksimativni izraz u velikoj mjeri poklapaju za vjerovatnoću greške od 10−2. Treba uočiti da slika 2.19 (a) specificira koliki je broj dostupnih odbiraka NA neophodan za uspješnu detekciju posmatrane komponente signala, sa zadatom vjerovatnoćom. na primjer, NA = 80 dostupnih odbiraka je dovoljno ya detekciju komponente sa amplitudom A1 = 0.1, sa vjerovatnoćom greške u detekciji koja je bliska nuli. Isti broj odbiraka je dovoljan za detekciju komponente sa amplitudom A2 = 0.7, sa vjerovatnoćom greške u detekciji koja je jednaka 10−2. Takod¯e, može se zaključiti da je za detekciju svih komponenti signala odjednom sa vjerovatnoćom 10−2 potrebno oko NA = 176 dostupnih odbiraka. Posmatrane vjerovatnoće su takod¯e eksperimentalno verifikovane. Broj dostupnih odibraka NA je variran izmed¯u 1 i 200. Za svaku posmatranu vrijednost NA, vjerovatnoće greške u detekciji su računate na bazi 3000 realizacija signala sa slučajno pozicioniranim dostupnim odbircima. U svakoj realizaciji, i za svaku komponentu signala, vršeno je prebrojavanje pogrešnih detekcija. Pogrešna detekcija l-te komponente signala se dešava ako je najmanje jedan Hermitski koeficijent šuma (na poziciji mimo pozicija komponenti signala, p ≠ pl, l = 1, 2, . . . , K) ima amplitudu koja je jednaka ili veća od amplitude l − te komponente signala, odnosno koeficijenta na poziciji p ≠ pl, l = 1, 2, . . . , K. Broj pogrešnih detekcija je zatim podijeljen sa brojem realizacija signala. Postupak je ponovljen za svako posmatrano NA. Rezultati su prikazani na slici 2.19 (b). Može se uočiti velika vizuelna sličnost izmed¯u teorijski Vjerovatnoća greške (a) 10-1 A4 = 0.3 A5 = 0.2 10-2 10-3 A1=1 A2 = 0.7 A3 = 0.5 10-4 100 Vjerovatnoća greške u detekciji komponente signala i njena aproksimacija (teorija) Vjerovatnoća greške (b) 10-1 A4 = 0.3 A5 = 0.2 10-2 10-3 A1=1 A2 = 0.7 A3 = 0.5 10-4 20 40 60 80 100 120 140 160 180 200 Broj dostupnih odbiraka NA 100 Vjerovatnoća greške u detekciji komponente signala (numerički rezultat) 20 40 60 80 100 120 140 160 Broj dostupnih odbiraka NA 180 200 Slika 2.19: Vjerovatnoća pogrešne detekcije komponente signala, prezentovana u vidu funkcije od broja dostupnih odbiraka signala NA: (a) vjerovatnoća dobijena primjenom teorijskog izraza (2.117) i njegove aproksimacije (2.118), (b) eksperimentalni rezultati. dobijenih krivih vjerovatnoća (a) sa krivima koje su dobijene numeričkim putem (b). Primjer 2.12. Razmatra se signal sa nedostajućim odbircima iz primjera 2.11. Posmatraju se različiti brojevi nedostajućih odbiraka NA, koji se koriste za izračunavanje očekivanih vjerovatnoća greške u detekciji, prikazanih na slici 2.19: • NA = 56, koji obezbjed¯uje detekciju komponenti signala sa sljedećim vjerovatnoćama greške:

PE(1) = 0, PE(2) = 0. 0086, **PE(3) = 0.** 8679, **PE(4)** = 1, **PE(5)**	19

= 1. Navedeno znači da će prva i druga komponenta biti detektovane sa vjerovatnoćom većom od 0.99, treća komponenta će biti detektovana sa vjerovatnoćom od 0.13, dok četvrta i peta komponenta gotovo sigurno neće biti detektovane. • NA = 108, pri čemu su vjerovatnoće greške u detekciji različitih komponenti:

PE(1) = 0, PE(2) = 0, PE(3) = 0. 0109, **PE(4)** = 1 i **PE(5)**	19

= 1; • NA = 154, sa vjerovatnoćama greške u detekciji:

PE(1) = 0, PE(2) = 0, PE(3) = 0, PE(4) = 0. 0073 i **PE(5) = 0.**	19

9944; • NA = 176, sa odgovarajućim vjerovatnoćama greške u detekciji: PE(1) = 0, PE(2) = 0, PE(3) = 0, PE(4) = 0 i PE(5) = 0.0106. U ovom slučaju, u oko 99% realizacija signala sve komponente signala će biti uspješno detektovane, odnosno, biti iznad praga za detekciju T = Ξ iz (2.116). . 0.8 |C (p)| 0.6 0.4 0.2 NA = 56 (a) 0 0 50 100 150 200 p 0.8 NA = 154 (c) |C (p)| 0.6 0.4 0.2 0 0 50 100 150 200 p 0.8 NA = 108

(b) |C (p)| 0.6 0.4 0.2 0 0	95

50 100 p 150 200 0.8 |C (p)| 0.6 0.4 0.2 NA = 176 (d) 0 0 50 100 p 150 200 Slika 2.20: Ilustracija automatizovanog praga za detekciju komponenti čiji je nivo diktiran brojem dostupnih odbiraka NA. DHT1 koeficijenti i probabilistički prag (razmatran detaljno u narednom odjeljku) prikazani su na slici 2.20 (a)-(d), za jednu realizaciju signala sa različitim brojevima nedostajućih odbiraka NA. 2.4.2 Rekonstrukcija zasnovana na analizi uticaja nedostajućih odbiraka Detekcija komponenti signala Uzimajući u obzir njenu važnost, razmotrimo detaljno vjerovatnoću (2.116) da je N − K koeficijenata CS šuma u DHT1 domenu manje od neke zadate vrijednosti Ξ. Ova relacija može pomoći u definisanju praga sa slike 2.20 za razdvajanje komponenti signala (Hermitskih koeficijenata koji odgovaraju komponentama signala) od šuma. Na osnovu izraza (2.116), za Ξ = T ovaj prag se izvodi u obliku: T = 2σcsNerf−1 (PNN(T))N−K √ 1 ≈ √ 2σcsN erf −1 (PN N (T)) N 1 , (2.121) ( ) ( ) gdje je PN N (T) zadata vjerovatnoća. Uočava se da se nivo rijetkosti K može zanemariti u prethodnom izrazu, imajući u vidu da je on, po definiciji u kontekstu kompresivnog odabiranja, mnogo manji od dužine signala N (K ≪ N). Prag se može izračunati za bilo koju zadatu (željenu) vjerovatnoću PN N (T), korišćenjem varijanse šuma definisane izrazom (2.112) Dodatno, funkcija erf (x) može biti aproksimirana na sljedeći način: erf (x) ≈ sgn(x)√1 − exp −x2 1 + ax2 4/π + ax2 , (2.122) ( ) sa a ≈ 0.147, i x = √2σTcsN . Pošto važi T ≥ 0 i σcsN > 0 a posljedično i x > 0, zaključuje se da je uvijek zadovoljeno sgn(x) = 1. Tada se iz (2.122) dobija: (PN N (T)) N = 1 − exp −x2 π 1 4 + ax2 . (2.123) √ (1 + ax2) Primjenom operacije log(·) na obije strane prethodne jednačine, nakon preured¯ivanja izraza se dobija: ax4 + + a log 1 − (PN N (T)) N x2 + log 1 − (PN N (T)) N2 = 0. 4 2 (2.124) (π ( )) ( ) Ova jednačina se rješava uvod¯enjem smjene t = x2, i postoji samo jedno pozitivno rješenje (od ukupno četiri rješenja), koje izraz za prag: 2 T = σcsN 1 a ⎛ π − 4 − aL + 4 √(π + aL − 4aL ,) ⎞ (2.125) √ ⎝⎠ odnosno aproksimaciju izraza (2.121) pogodnu za hardverske realizacije, sa L = log 1 − (PN N (T)) N i a ≈ 0.147. 2 ( ) Algoritmi za rekonstrukciju zasnovani na izvedenom pragu Dosadašnja analiza može poslužiti kao osnov za definisanje algoritama za rekonstrukciju signala rijetkih u DHT1 domenu, koji imaju nedostajuće odbirke. Navedeni algoritmi su insipirisani OMP odnosno MP pristupima rekonstrukciji, i imaju za cilj povećavanje efikasnosti procesa rekonstrukcije. Prag T se koristi za odred¯ivanje pozicija ΠK = {p1, p2, ..., pK } komponenti signala u DHT1 domenu. Problem pronalaženja rješenja koje predstavlja DHT1 reprezentaciju signala koja ima najmanji mogući stepen rijetkosti (i koji odgovara vrijednostima nedostajućih odbiraka, pod uslovom da je signal rijedak, tj. K ≪ N) formalno se definiše u obliku: min ‖C‖0 pod uslovom y=AC. (2.126) Kao što je već naglašeno, budući da „ℓ0-norma" ne može biti korišćena u direktnoj minimizaciji, navedeni optimizacioni problem se, u kontekstu brojnih procedura za rekonstrukciju, preformuliše korišćenjem ℓ1-norme, otvarajući mogućnosti za primjenu Algoritam 6 Rekonstrukcija postavljanjem praga u DHT1 domenu (jednoiterativni postupak) Input: • Vektor mjerenja y • Mjerna matrica A 1: a ← 0.147 2: PN N (T) ← 0.99 ◃ Zadata vjerovatnoća da DHT1 koeficijenti šuma budu ispod praga 3: L ← log 1 − (PN N (T)) N 2 4: C0 ← A−(1y) ◃ Računa se inicijalna DHT1 estimacija 5: σcsN ← NNA2N(N−−N1A2) N−1 A |C0(p)|2 N ◃ Izraz N K N N A Np=−01 |C0(p)|2 aproksimira l=1 A 2 l √ p=0 ∑ ∑ ∑ 67:: TΠˆK←←σcsaNrg√{|aC0−|>π4 −T}aL + √(+ aL◃)P2r−ag4oamLse biraju ◃koPerafigcisjeenrtaičkuonmapnoanoesnntoivsiugnσacslNa 1 4 (π) 8: AK ← A(:, ΠˆK) ◃ Matrica AK sadrži kolone matrice A indeksima ΠˆK 9: CK ← ATKAK −1ATKy ◃ Izraz ATKAK −1ATK predstavlja pseudoinverziju matrice AK 10: CTz(k) (← CK)(k), k ∈ ΠˆK, 0, k ∈/ ΠˆK ( ) { Output: • Vektor rekonstruisanih koeficijenata CTz linearnog programiranja i drugih tehnika. Sa druge strane, ukoliko je poznat set pozicija transformacionih koeficijenata koji reprezentuju komponente signala, odnosno ukoliko je na adekvatan način estimiran u okviru skupa ΠˆK od K ≤ Kˆ ≤ N elemenata, tako da je zadovoljeno ΠK ⊆ ΠˆK , card ΠˆK ≤ NA uz K ≪ N , rekonstrukciju je moguće postići pseudoinverzijom: { } CK = ATKAK −1ATKy, (2.127) koja je jedan od ključnih momenata u mnogim rekonstrukcionim pristupima (predstavlja ( ) optimalno rješenje u srednjem kvadratnom smislu). Matrica AK predstavlja

podmatricu matrice A, sa izostavljenim kolona koje odgovaraju pozicijama nedostajućih odbiraka p ∈/ Πˆ K. Procedure za rekonstrukciju zasnovane na pragu su predstavljene algoritmima 6 (postupak za rekonstrukciju zanovan na jednoj iteraciji) i 7 (iterativni postupak za rekonstrukciju). Rekonstrukcija u jednoj iteraciji adekvatno postavljenim pragom, koji je zasnovan na prethodnoj teoriji, može biti primijenjen u slučaju kada su amplitude komponenti signala Al, l = 1, 2, . . . , K relativno bliskih vrijednosti. Iterativni algoritam se može smatrati njegovom generalizacijom. Princip rada predstavljenih algoritama je baziran na MP (engl. matching pursuit) pristupima rekonstrukciji, kao što je, na primjer, OMP. Iterativna forma algoritma se zapravo može smatrati OMP generalizacijom, koja smanjuje broj iteracija ovog algoritma bazirajući Algoritam 7 Rekonstrukcija postavljanjem praga u DHT1 domenu (iterativni postupak) Input: • Vektor mjerenja y • Mjerna matrica A • Zahtijevana tačnost δ 1: Πˆ K ← ∅ ◃ Skup estimiranih pozicija komponenti; na početku je prazan 2: e ← y ◃ Vektor greške na početku je jednak vektoru dostupnih odbiraka 3: a ← 0.147 4: PN N (T) ← 0.99 ◃ Zadata vjerovatnoća da DHT1 koeficijenti šuma budu ispod praga 5: L ← log 1 − (PN N (T)) N 2 6: while ∥e(∥22 > δ do) 7: C0 ← A−1e 8: σcsN ← NNA2N(N−−N1A2) N−1 A|C0(p)|2 N N ◃ Izraz N N A Np=−01 |C0(p)|2 aproksimira l=1 K A l 2 √ p=0 ∑ ∑ ∑ 9: TΠˆK←←σcsΠˆNK√∪a ar−g{π4|C−0a|L>+T √}(1 4 (π + aL 2 − 4aL ◃ Prag se računa na osnovu σcsN 10:)) 11: AK ← A(:,Πˆ K) CK ← ATKAK −1ATKy ◃ Izraz ATKAK −1ATK je pseudoinverzija matrice AK ◃ Matrica AK sadrži kolone matrice A indeksima Πˆ K 12: 13: yK ← AK CK 14: e ← y − yK ( ) ( ) 15: end while 16: CTz(k) ← CK(k), k ∈ Πˆ K, { 0, k ∈/ Πˆ K Output: • Vektor rekonstruisanih koeficijenata CTz detekciju komponenti signala adekvatnim izborom praga. Stoga, na ovom mjestu će biti napravljena paralela izmed¯u ova dva pristupa. Neka je na početku algoritma uveden signal greške, i inicijalizovan elementima vektora dostupnih odbiraka, e = y. U OMP algoritmu, pozicija prvog elementa u skupu Πˆ K se estimira kao pozicija maksimuma u vektoru C0 = A−1e, koji zapravo predstavlja DHT1 signala čije su nedostajuće vrijednosti postavljene na nulu: pˆ1 ← arg max {|C0|}. Ovaj indeks se dodaje u inicijalno prazni skup Πˆ K = {pˆ1}. Zatim se formira pacijalna matrica odabiranja A1 = A(:, pˆ1) (2.128) uzimanjem samo kolone matrice A koja ima indeks pˆ1. Prva komponenta se dobija rješavanjem linearnog sistema mjernih jednačina, korišćenjem pseudoinverzije: C1 = AT1 A1 −1AT1 y (2.129) U sljedećem koraku, odred¯uju se odbirci signala y1 = A1C1. Ukoliko važi e = y1, tada ( ) je stepen rijetkosti traženog signala 1, i C1 predstavlja rješenje problema. Ukoliko navedeni uslov nije ispunjen, tada se estimirana komponenta oduzima od vektora e, formirajući signal e1 = e − y1. Nakon ovog koraka, vrši se estimacija pozicije sljedeće komponente. Prvo se izračunava novi vektor C0 = A−1e1 i odred¯uje pozicija druge komponente pˆ2 ← max {|C0|}. Nakon toga, formira se skup pozicija Πˆ K = {pˆ1, pˆ2}. Pseudoinverzija računa se za drugu parcijalnu matricu C2 = AT2 A2 −1AT2 y ( ) (2.130) A1 = A(:, Πˆ K) (2.131) sa dvije kolone iz matrice A koje odgovaraju pozicijama detektovanih komponenti. Nakon odred¯ivanja y2 = A2C2 izračunava se vektor e2 = e − y2. Ukoliko je to vektor-nula, tada je pronad¯eno rješenje, i algoritam se zaustavlja. Ukoliko nije, proces se iterativno nastavlja, sve dok se ne dobije y = 0, ili neki prihvatljivi nivo greške, odred¯en zadatom tačnošću δ. Prethodno opisani princip rada OMP algoritma se koristi i u algoritmima 6 i 7. Teorijska analiza prezentovana u ovoj sekciji omogućila je promjenu kriterijuma za detekciju komponenti. Naime, detektovanjem seta komponenti, broj iteracija OMP algoritma je, u opštem slučaju, značajno smanjen. Kao što je već naglašeno, u slučaju kada komponente imaju relativno bliske vrijednosti amplituda, algoritam 6 obezbjed¯uje rekonstrukciju u samo jednoj iteraciji, budući da se predloženi prag T koristi u kriterijumu Πˆ K ← arg {|C0| > T } koji će rezultirati skupom Πˆ K koji sadrži pozicije svih komponenti. Ukoliko ovakav oblik detekcije nije moguć, kao, na primjer, u slučaju kada su neke amplitude komponenti značajno manje od ostalih, može se koristiti algoritam 7. On obezbjed¯uje detekciju pozicija komponenti u blokovima (sve komponente iznad trenutne vrijednosti praga će biti detektovane istovremeno). Stoga, može se smatrati varijacijom CoSaMP algoritma. Glavna prednost predstavljenih algoritama u odnosu na klasične algoritme iz konteksta kompresivnog odabiranja jeste redukovani broj iteracija. Na ovom mjestu je važno napomenti da se, u slučaju kada je nemoguće postići zadati nivo tačnosti, može dodati i uslov koji će ograničiti mogući broj iteracija algoritama, kako ne bi došlo do stvaranja beskonačnih petlji. Rekonstrukcija UWB signala Uzimajući u obzir njihovu relevantnost u komunikacionim, radarskim i drugim primjenama, razmotrićemo rekonstukciju UWB signala u kontekstu kompresivnog odabiranja. Model UWB signala uveden je u primjeru 2.2, gdje je navedeno da usljed činjenice da je talasni oblik ovih signala usko povezan sa Gausovim funkcijama i njihovim izvodima, ovi signali imaju potencijal za rijetku, odnosno visoko koncentrovanu, reprezentaciju u Hermitskom transformacionom domenu, za razliku od DFT domena u kojem imaju širok frekvencijski opseg. Izučavanje ove vrste signala u kontekstu obrade rijetkih signala prezentovano je u. Sparsifikacija, odnosno, povećanje stepena rijetkosti, bila je predmet proučavanja u. Primjena kompresivnog odabiranja u raznim aspektima radarskih signala i sistema: estimacija kanala, dizajn talasnih oblika, obrada radarskih slika (engl. radar imaging) predmet su skorašnjih istraživanja. Primjer 2.13. Efikasnost predloženih algoritama za rekonstrukciju, testirana je na realnom UWB signalu iz baze razmatrane u primjeru 2.2. Razmatrani signal je dobijen pri testiranju UWB radara na 1.3 GHz, u eksperimentu koji je detaljno opisan u, i dostupan je online. Prvih N = 165 odbiraka iz fajla sa nazivom ACW7FD45.dat koji je dio razmatrane baze signala. Signal je reodabran, tako da su odbirci dostupni u tačkama koje odgovaraju nulama Hermitskog polinoma reda N , primjenom sinc interpolatora i adekvatnog faktora skaliranja, korišćenjem relacije (2.33). Nakon toga, razmatran je scenario sa samo NA = 55 (33.33%) dostupnih, slučajno pozicioniranih odbiraka. Imajući u vidu izraz (2.117) za vjerovatnoću greške u detekciji komponenti, odred¯eno je da je sa zadatim brojem dostupnih odbiraka moguće rekonstruisati sve komponente signala, tako da vjerovatnoća greške u detekciji komponenti bude manja od 10−2 za sve komponente. Rezultati rekonstrukcije su prikazani na slici 2.21. Rekonstrukcija je sprovedena korišćenjem Algoritma 7. Originalni signal i mjerenja prikazani su na slici 2.21 (a). Rekonstrukcija je sprovedena u samo 4 iteracije posmatranog algoritma. DHT1 koeficijenti tokom ovih iteracija, kao i teorijski prag inkorporiran u sklopu algoritma prikazani su na slici 2.21 (b)-(e). Rezultati rekonstrukcije u vremenskom domenu su prikazani na slici 2.21 (f) gdje je rekonstruisani signal upored¯en sa originalnim (sa svim dostupnim odbircima), dok se njihovo pored¯enje u Hermitskom transformacionom domenu Tabela 2.2: Pored¯enje procesa i rezultata rekonstrukcije realnog UWB signala primjenom Algoritma 7 i OMP algoritma, za različite vrijednosti NA, sa stanovišta: srednje kvadratne greške (MSE), vremena izvršavanja algoritama i prosječnog broja iteracija. MSE NA Algoritam 7 OMP Vrijeme izvršavanja Algoritam 7 OMP Prosječni broj iteracija Algoritam 7 OMP 30 10.02 dB 9.05 dB 0.007 s 0.006 s 48.49 29.83 50 3.63 dB 3.38 dB 0.008 s 0.015 s 27.10 40.91 70 -5.18 dB -5.35 dB 0.003 s 0.008 s 9.31 22.77 90 -21.08 dB -12.81 dB 0.001 s 0.003 s 4.70 14.61 110 -268.80 dB -31.65 dB 0.0016 s 0.0018 s 4.08 12.15 130 -270.09 dB -270.83 dB 0.0017 s 0.0019 s 3.68 12.00 može vidjeti na slici 2.21 (g). Mali broj iteracija postignut je zahvaljujući blokovskoj detekciji pozicija komponenti. Rezultujuća srednja kvadratna greška (MSE) izmed¯u originalnog i rekonstruisanog signala je 2.1451·10−27, odnosno, -266.66 dB. Vrijeme izvršavanja je testirano na laptopu sa

Intel(R) Core(TN) **i7-6700HQ CPU @2.60 GHz** procesorom i **8 GB RAM-** 2

a. Algoritam za rekonstrukciju je izvršen u softverskom paketu MATLAB○R R2015a. Vrijeme izvršavanja je 0.0156 sekundi. Primjer 2.14. Razmatra se rekonstrukcija eksperimentalnog UWB signala iz primjera 2.13. Navedeni signal je rijedak u DHT1 domenu, med¯utim, postoji odred¯eni broj nenultih odbiraka sa jako malim vrijednostima. Od ukupno N = 165, dostupno je samo NA slučajno pozicioniranih odbiraka, gdje je NA = {30, 50, 70, 90, 110, 130}. Rekonstrukcija je izvršena korišćenjem predloženog Algoritma 7, kao i klasičnog OMP algoritma. U ovom primjeru je izvršeno pored¯enje njihovih performansi. Kao kriterijum zaustavljanja u oba algoritma, korišćen je stepen tačnosti δ = 10−13. Maksimalan broj iteracija u oba algoritma je limitiran na 50, u slučaju kada zahtijevanu tačnost nije moguće postići. Pored¯enje sa stanovišta rekonstrukcione srednje kvadratne greške, vremena izvršavanja i prosječnog broja iteracija predstavljeno je u tabeli 2.2. Rezultati su dobijeni na osnovu usrednjavanja na bazi 500 nezavisnih rekonstrukcija signala sa slučajno pozicioniranim dostupnim odbircima. Iz tabele je jasno uočljivo da je smanjenje broja iteracija i kraće vrijeme izvršavanja, uz zadovoljavajući nivo tačnosti, kod predloženog Algoritma 7 u odnosu na OMP postoji dok god su ispunjeni uslovi za rekonstrukciju, odnosno za NA ≥ 50 u ovom primjeru. Navedene prednosti postaju manje evidentne kada se broj dostupnih odbiraka NA približava dužini signala N , zbog toga što su slabije komponente postaju manje izložene šumu nastalom usljed nedostajućih odbiraka. 2.4.3 Veza sa indeksom koherentnosti Pretpostavimo da se rekonstrukcija vrši MP klasom algoritama, na primjer, OMP algoritmom. U najgorem mogućem slučaju, uticaj drugih komponenti na detekciju najjače komponente biće najveći kada svih K komponenti imaju jednake amplitude (bez gubljenja . UWB signal i mjerenja 1 Amplituda 0.5 Signal (a) Mjerenja 0 -0.5 -1 20 40 60 0.6 DHT1 koeficijenti - 1. iteracija

(b) |C (p)| 0.4 0.2 0 0. 04 |C (p)| **0.** 118

02 0 50 100 150 p DHT1 koeficijenti - 3. iteracija (d) 80 100 120 140 160 n 0.1 DHT1 koeficijenti - 2. iteracija (c) |C (p)| 0.05 0 0 50 100 150 p 0.01 DHT1 koeficijenti - 4. iteracija (e) |C (p)| 0.005 0 0 0 50 p 100 150 0 50 Rezultat rekonstrukcije u vremenskom domenu p 100 150 Amplituda -0.5 -1 1 0.5 0 (f) Original Rekonstrukcija 20 40 60 80 100 120 140 160 n Rezultat rekonstrukcije u Hermitskom transformacionom domenu 1 (g) DHT1 originalnog signala (svi odbirci) |C (p)| DHT1 rekonstruisanog signala 0.5 0 0 20 40 60 80 100 120 140 160 p Slika 2.21: Rekonstrukcija UWB signala: (a) originalni signal i dostupna mjerenja (crvene tačke), (b)-(e) proces detekcije komponenti tokom 4 iteracije, sa adaptivnim pragom (horizontalna crvena linija), (f) originalni i rekonstruisani signal, (g) pored¯enje Hermitskih koeficijenata originalnog signala (sa svim dostupnim odbircima) i rekonstruisanog signala. opštosti - amplitude jednake jedinici). Pretpostavlja se da je dostupno samo NA od ukupno N odbiraka signala. Srednja vrijednost posmatrane komponente je NNA . Indeks koherentnosti za matricu AT A definisan je sljedećim izrazom: N N A μ = max Al ψp(tni)ψpl(tni) NA i=∑1,p≠pl N (ψN−1(tni))2 , l = 1, 2, . . . , K. (2.132) Sa druge strane, kompone|nta na poziciji p koja odgov|ara šumu u DHT1 domenu usljed nedostajućih odbiraka, odnosno, za čiju poziciju važi p ∈/ Πk, može biti zapisana u sljedećoj formi: NA Q(p, pl) = n=∑1,p≠pl N (ψN−1(tn))2 Ai ψp(tn)ψpl(tn). (2.133) Očigledno je da se može uspostaviti relacija sa indeksom koherentnosti. Ukoliko se šum koji potiče od nedostajućih odbiraka u svim komponentama sabira na poziciji koja ne odgovara komponentama, odnosno, p ≠ pl, tada koeficijent šuma na posmatranoj poziciji ima najveću moguću vrijednost. K max |Q(p, pl)| = K NA N μ (2.134) Posmatrajmo sada poyiciju komponente signala p = pl ∈ ΠK . Posmatrana komponenta će biti oštećena šumom koji potiče od nedostajućih odbircima iz preostalih K − 1 komponenti. U najgorem mogućem slučaju, sve ove komponente šuma se sabiraju, i to u suprotnom smjeru od srednje vrijednosti signala (u posmatranom slučaju NNA , u opštem slučaju Al NNA). Pretpostavljajući najveću moguću vrijednost šuma K max |np|, rezultujuća, najgora moguća vrijednost koeficijenta signala je min {cpl } = NA − (K − 1) max |np| = NA N N − (K − 1) NA N μ. (2.135) Posmatrana komponenta signala može biti detektovana ako je veća od najvećeg koeficijenta šuma: NA N − (K − 1) μ > K NA NA N N μ. (2.136) Ovaj izraz se može preurediti u poznati uslov za rekonstrukciju, zasnovan na sparku posmatrane matrice [61]: K < 1+ 1 1 2 μ , (2.137) ( ) koji predstavlja dobro poznati rezultat u kontekstu teorije

kompresivnog odabiranja. 2.4.4 Uticaj aditivnog šuma i rekonstrukcija zašumljenih signala Dosadašnja analiza u ovoj sekciji podrazumijevala je da mjerenja nijesu zahvaćena eksternim aditivnim šumom. Budući da je šum uobičajen u praktičnim aplikacijama, u ovom odjeljku će prethodna analiza biti proširena na signale koji su zahvaćeni aditivnim šumom. Pretpostavimo da su mjerenja zahvaćena bijelim Gausovim šumom varijanse σε2. U takvom slučaju, ukupna smetnja u transformacionom domenu uzrokovana je i eksternim šumom i šumom usljed nedostajućih odbiraka. U prethodnoj sekciji je pokazano da varijansa je aditivnog šuma u DHT1 domenu u srednjem zadata izrazom (2.56): σ¯2e = Nσ2ε2 ∑n=1 ψ2N−1(tn) N 1 = ξ(N)σε2, dok je tačna varijansa definisana kao (2.55): σe2(p) = Nσε22 ∑n=1 [ψNψ−p2(1(tntn))]4 = γ (p, N) σ2ε. N (2.138) (2.139) koja je u cilju boljeg naglašavanja njenog porijekla označena sa σe2 u okviru ove sekcije. Budući da su posmatrane slučajne varijable Gausovske prirode i med¯usobno nekorelisane, koeficijenti šuma u DHT1 domenu u uslovima nedostajućih odbiraka i aditivnog eksternog šuma imaju sljedeću totalnu varijansu: ∑l=1 (54) pri čemu ξ(N) = N12 Nn=1ψ−N2−1(tn) ne zavisi od pozicije koeficijenata, dok γ(p,N) = 1 N N2 n=1 [ψNψ−p2(1t(ntn))]4 zavisi.∑KakobisezadržalaistavjerovatnoćaPNN (T)daN K nezavisnih − σT2 (p) = σc2sN + σe2(p) = NNA2N(N−−N1A2) K A2l + σe2(p), (2.140) koe∑ficijenata šuma bude manje od praga Ξ = T , koji je dat izrazom (2.121), sljedeći uslov treba da bude zadovoljen: NNA2(N(N−−N1A)) l=1 A2l K NNi(2N(N−−N1i)) Kl=1∑A2l + σe2(p) =1 (2.141) Aproksimacija izraza Kl=1 A2l se može jednostavno dobiti na bazi dostupnih odbiraka, ∑ korišćenjem K l=1 A2l ≈ NNA∑ Np=−01 c2p, stoga, taj izraz se može smatrati poznatim. Za zadatu dužinu signal∑aN , dostupni br∑ojodbiraka NA i varijansu eksternog šuma σε2 , može se odrediti Ni koje reprezentuje povećanje broja mjerenja (dostupnih odbiraka), neophodno da se u prisustvu šuma zadrži ista vjerovatnoća PN N (T), koja je važila u slučaju kada eksternog aditivnog šuma nije bilo. U cilju postizanja optimalnih rezultata prilikom rekonstrukcije signala zašumljenog aditivnim bijelim šumom varijanse σε2, prag (2.121) može biti zamijenjen nelinearnim pragom T (p) = 2σT (p)erf −1 (PN N (T)) M √ 1 , (2.142) ( ) ili se u okviru σT (p) može koristiti prosječna varijansa σ¯e2 koja je nezavisna od pozicija p u DHT1 domenu. Ulazni odnos signal-šum (SNR), za signal sa aditivnim šumom i u slučaju kada su svi odbrici prisutni jednak je: SNR=10log

n=1| x (tn)|2 N Ex ∑n=1| ε (tn)|2 N 109

= 10 log E (2.143) ε gdje je Eε = Nσε2 i Ef = Nn=1|x(t∑n)|2. Komponente signala u DHT1 domenu imaju srednju vrijednost NNAAl, l ∈∑ΠK. U procesu rekonstrukcije, koeficijenti koji odgovaraju komponentamasignalasupojačanizafaktor NNA.PretpostavljajućiuspješnuCSrekonstrukciju, koeficijentkomponentesignalapostajejednakoriginalnojvrijednosti,odnosnoonojvrijednosti koju bi imao kada su svi odbirci signala dostupni. Ako u NA mjerenja postoji mali aditivni šum varijanse σε2, tada u jednom koeficijentu inicijalne DHT1 (računate uz pretpostavku da nedostajući odbirci imaju vrijednosti jednake nuli) varijansa šuma se množi sa NNA . Energija aditivnog šuma će biti uvećana za NA u svakom nenultom koeficientu rekonstruisanog N 2 signala. Budući da uspješna rekons(trukc)ija daje tačno K nenultih DHT1 koeficijenata koji odgovaraju komponentama signala, pri čemu je preostalih N − K koeficijenata jednako nuli, energija šuma ostaje prisutna samo u K nenultih koeficijenata. Odnos signal-šum u rekonstruisanom signalu je stoga jednak: N SN Rr = 10 log n=1 |x(tn)|2 = 10 log Ef K∑NNA NNA σε2 2 NKA Eε ( ) To znači da je inicijalni SNR povećan za −10 log (K/NA): S N Rr = S N R − 10 log K (NA) (2.144) (2.145) budući da je K < NA. Važno je naglasiti da navedeni rezultat važi u prisustvu slabog aditivnog šuma u mjerenjima, odnosno kada je moguća rekonstrukcija K nenultih komponenti signala. To takod¯e znači da predstavljeni algoritmi mogu biti primijenjeni u svrhu redukcije aditivnog šuma namjernim smanjivanjem broja dostupnih odbiraka signala. Naime, ukoliko se pri rekonstrukciji koristi najmanje moguće K, zaostali aditivni šum će biti nakon rekonstrukcije prisutan u samo K koeficijenata selektovanih algoritmom. Navedeni zaključci će biti numerički verifikovani u okviru ove sekcije. Numerički rezultati Primjer 2.15. Razmatra se zašumljeni signal definisan sljedećim izazom: K x(tn) = Alψpl(tn) + ε(tn), (2.146) ∑l=1 koji je rijedak u DHT1 domenu, koji ima K = 6 komponenti sa amplitudama A1 = 2, A2 = −3, α3 = 2.7, A4 = 2.1, A5 = 2.1, A6 = 1.4, na pozicijama p1 = 0, p2 = 1, p3 = 3, p4 = 6, p5 = 7 i p6 = 18. Signal je zašumljen aditivnim bijelim Gausovim šumom, tako da je rezultujući odnos signal-šum SNR = 7 dB. Iz signala je odabrano NA = 54 slučajno pozicioniranih odbiraka, od ukupno N = 128 (42.19%). Rekonstrukcija je obavljena u samo dvije iteracije algoritma 6, sa modifikovanim nelinearnim pragom (2.142). Rezultati rekonstrukcije su prikazani na slici 2.22. Inicijalna MSE izmed¯u originalnog (nezašumljenog) i zašumljenog signala od -11.67 dB primijenjenom rekonstrukcijom je smanjena za oko 12 dB. Rezultujuća MSE izmed¯u originalnog (nezašumljenog signala) i rekonstruisanog signala iznosi -23.66 dB. Ovaj primjer ilustruje činjenicu da je moguće smanjivanje nivoa šuma redukovanjem broja mjerenja, što je u skladu sa relacijom (2.145). Zašumljeni signal i dostupni odbirci (mjerenja) prikazani su na slici 2.22 (a), proces biranja komponenti primjenom nelinearnog praga u DHT1 domenu prikazan je na slikama 2.22 (b) i (c), rezultat rekonstrukcije je upored¯en sa originalnim nezašumljenim signalom na slici 2.22 (d), dok je pored¯enje ovih rezultata u DHT1 domenu prikazano na slici 2.22 (e). Primjer 2.16. Razmatra se signal (2.146) sa K = 3 komponente, čije su amplitude A1 = 1 A2 = 0.9 i A3 = 0.6. Pozicije komponenti pl l = 1, 2, 3 biraju se slučajno sa uniformnom raspodjelom iz skupa pl ∈ Πk = {1, 2, . . . , N − 1}. Varijansa aditivnog bijelog Gausovog šuma ε(tn) je σε2 = 0.1, dok je (ulazni) SNR za sve dostupne odbirke SN Ri = 7.67 dB. Izlazni prosječni SNR, odnosno odnos signal-šum nakon rekonstrukcije, dat izrazom (2.145) je evaluiran eksperimentalno. Numerički rezultat za rezultujući odnos signal-šum dobijen je na bazi 500 usrednjavanja rezultata rekonstrukcije (dobijenih primjenom OMP algoritma) za signale sa slučajnim pozicijama dostupnih odbiraka, slučajnim šumom ε(tn) i slučajnim pozicijama komponenti pl. Odnos signal-šum rekonstrukcije je u svakoj realizaciji računat na bazi N rezultujućih odbiraka. Rezultati su prikazani u tabeli 2.3, za nekoliko različitih brojeva dostupnih odbiraka (500 eksperimenata je ponovljeno za svaku zadatu vrijednost NA). Može se uočiti da postoji veliko poklapanje teorijskih i eksperimentalnih rezultata, što potvrd¯uje validnost relacije (2.145). 2.4.5 Analiza rekonstrukcije signala koji nijesu rijetki Ukoliko se izvrši rekonstrukcija signala koji nije rijedak u DHT1 domenu pod pretpostavkom da je rijedak, i to sa stepenom rijetkosti K , doći će do greške u rekonstrukciji, Zašumljeni signal i mjerenja 6 (a) Zašumljeni signal Amplituda 4 Mjerenja 2 0 -2 20 40 60 80 100 120 n DHT1 koeficijenti - 1. iteracija DHT1 koeficijenti - 2. iteracija 1.5 (b) 0

.5 (c) |C (p)| 1 **|C** (p)| **0.** 4 **0.** 3 **0.** 5 **0.** 2 **0.1 0** 86

0 20 40 60 80 100 120 0 0 20 40 60 80 100 120 p p Rezultat rekonstrukcije u vremenskom domenu (d) 4 Amplituda 2 0 Originalni signal Rekonstruisani signal 20 40 60 80 100 120 n Rezultat rekonstrukcije u Hermitskom transformacionom domenu 3 (e) DHT1 kompresivno odabranog zašumljenog signala DHT1 originalnog nezašumljenog signala (svi odbirci) |C (p)| 2 DHT1 rekonstruisanog signala 1 0 0 20 40 60 80 100 120 p Slika 2.22: Rekonstrukcija zašumljenog signala koji je rijedak u DHT1 domenu sa NA = 54 od N = 128 dostupnih odbiraka: (a) originalni signal i dostupna mjerenja (crvene tačke), (b),(c) proces detekcije komponenti tokom dvije iteracije, sa adaptivnim nelinearnim pragom (horizontalna linija), (f) originalni i rekonstruisani signal, (g) pored¯enje Hermitskih koeficijenata originalnog signala (sa svim dostupnim odbircima), zašumljenog signala i rekonstruisanog signala. čija će energija biti proporcionalna energiji nerekonstruisanih

N − K komponenti signala. Budući da realni signali najčešće nijesu potpuno rijetki, već su rijetki samo aproksimativno, analiza i zaključci u vezi rekonstrukcije takvih signala uz pretpostavku o zadatom stepenu rijetkosti ima veliki značaj. Tabela 2.3: Odnos signal šum: polaznog zašumljenog signala (zašumljenih dostupnih odbiraka) i rekonstruisanog signala (teorijski i eksperimentalni rezultat), prikazan za različite brojeve dostupnih odbiraka NA. Broj mjerenja NA 60 120 180 240 Ulazni SNR SNR rekonstrukcije (teorija) SNR rekonstrukcije (numerički) 7.82 dB 20.83 dB 20.13 dB 7.45 dB 23.47 dB 23.28 dB 7.48 dB 25.26 dB 25.12 dB 7.27 dB 26.31 dB 26.59 dB Teorema o grešci u rekonstrukciji signala koji nijesu rijetki Posmatra se signal koji nije čisto rijedak, čije su najveće amplitude Al , l = 1, 2, . . . , K , i koji ima NA od ukupno N slučajno pozicioniranih dostupnih odbiraka, gdje je 1 ≪ NA ≪ N . Pretpostavimo da je taj signal rekonstruisan kao da je rijedak, sa stepenom rijetkosti K . Energija greške u K rekonstruisanih koeficijenta ‖CK − CT ‖22 je direktno povezana sa energijom nerekonstruisanih komponenti ‖CTz − C‖22 sljedećom relacijom ‖CK − CT ‖22 = KN(AN(N−−N1A)) ‖CTz − C‖22 , (2.147) gdje je CK dimenzija K × 1 vektor rekonstruisanih komponenti, CT dimenzija K × 1 je vektor koji zadrži prave vrijednosti koeficijenata na pozicijama rekonstruisanih koeficijenata, C je vektor dimenzija N × 1 i sadrži DHT1 koeficijente originalnog signala (kada su svi odbirci dostupni), dok je CTz vektor dimenzija N × 1 koji sadrži K originalnih koeficijenata na rekonstruisanim (detektovanim) pozicijama, i nule na preostalih N − K pozicija. Dokaz teoreme U signalu se nerekonstruisana l-ta komponenta manifestuje kao ulazni Gausov šum, čija je varijansa σc2sN = A2l NNA(2N(N−−N1A)) . (2.148) Sve nerekonstruisane komponente će u transformacionom domenu predstavljati Gausov šum, čija je ukupna varijansa jednaka sumi: N σT2 = A2l NNA(2N(N−−N1A)) . (2.149) l=∑K+1 Nakon završene rekonstrukcije, ukupna energija šuma koji potiče od nerekonstruisanih komponenti (koji je prisutan u K rekonstruisanih komponenti) biće jednaka: N ‖CK − CT ‖22 = K NA2 σT2 = N 2 K(N − NA) NA(N − 1) A2l . (2.150) l=∑K+1 0 Statistička i teorijska greška [dB] -10 -20 -30 -40 -50 -60 -70 -80 Prosječna greška (numerički) Greške u svim realizacijama Teorija NA = 128, N = 256 5 Pretpostavljeni stepeni rijetkosti K 10 15 20 25 Slika 2.23: Rekonstrukcija zašumljenog signala koji je rijedak u DHT1 domenu sa NA = 54 od N = 128 dostupnih odbiraka: (a) originalni signal i dostupna mjerenja (crvene tačke), (b),(c) proces detekcije komponenti tokom dvije iteracije, sa adaptivnim nelinearnim pragom (horizontalna linija), (f) originalni i rekonstruisani signal, (g) pored¯enje Hermitskih koeficijenata originalnog signala (sa svim dostupnim odbircima), zašumljenog signala i rekonstruisanog signala. Šum koji potiče od nerekonstruisanih komponenti se može direktno povezati sa energijom nerekonstruisanih komponenti N CTz − XC 2 2 = A2l. ‖ ‖ ‖ l=∑K+1 Dakle, ukupna energija nerekonstruisanih komponenti jednaka je ‖CK − CT ‖22 = KN(AN(N−−N1A)) ‖CTz − C‖ , (2.151) (2.152) čime je dokaz završen. U slučaju kada razmatrani signal sadrži eksterni aditivni šum, sa vrijednostima ispod nivoa rekonstruisanih komponenti u DHT1 domenu, posmatrana energija greške postaje: CK − XCT KN(AN(N−−N1A)) ‖CTz − C‖22 + 2 = K 2 N (2.153) A σε2 N . Primjer 2.17. Razmatra se signal koji nije rijedak u DHT1 domenu: ‖ ‖ N s(tn) = Alψpl(tn) + ε(tn), (2.154) ∑l=1 sa amplitudama Al = 1 za l < S i Al = 0.5e−2l/(S+1) za S + 1 ≤ l ≤ N, uz S = 10. Pozicije komponenti pl ∈ ΠK su selektovane slučajno. Ovaj signal je, dakle, aproksimativno S-rijedak u DHT1 domenu. Dostupno je samo NA = 128 od ukupno N = 256 slučajno pozicioniranih odbiraka. Signal je oštećen slabim bijelim Gausovim šumom srednje vrijednosti nula i standardne devijacije σε = 0.1/N . Rekonstrukcija nedostajućio odbiraka je obavljena OMP algoritmom, pretpostavljajući različite stepene rijetkosti: 3 ≤ K ≤ 27. Srednje kvadratne greške u rekonstrukciji su izračunate na bazi 100 nezavisnih realizacija zašumljenog signala sa slučajno pozicioniranim dostupnim odbircima i slučajnim realizacijama šuma. Dobijeni rezultati su upored¯eni sa izvedenim izrazom za grešku. Obavljena je odgovarajuća normalizacija sa pretpostavljenim stepenom rijetkosti, tako da se razmatraju sljedeći izrazi: EN = 10 log K1 ‖CK − CR‖22 za numerički dobijenu grešku i ( ) (2.155) ET = 10 log (N(NA(−N N−A1)) ‖C − CK ‖22 + N N , A σε2) (2.156) za teorijsku grešku. Rezultati su prikazani na slici 2.23. Može se uočiti da se numerički i teorijski rezultati poklapaju u velikoj mjeri, što predstavlja eksperimentalnu potvrdu teorijski izvedenih izraza za grešku u rekonstrukciji signala koji nijesu rijetki, ali i za uticaj aditivnog šuma. 2.4.6 Gradijentni rekonstrukcioni algoritam Do sada prezentovane tehnike za rekonstrukciju signala rijetkih u DHT1 domenu podrazumijevaju indirektnu minimizaciju u cilju rješavanja optimizacionog problema min ‖C‖0 pod uslovom y=AC, (2.157) gdje se, na bazi analize uticaja nedostajućih odbiraka na vektor DHT1 koeficijenata estimiraju pozicije komponenti signala, a zatim rješenje traži u vidu pseudoinverzije CK = AKTAK −1ATKy, gdje je matrica AK sastavljena od kolona matrice mjerenja A koje o(dgovara)ju estimiranim pozicijama komponenti. Pomoću ove pseudoinverzije odred¯uju se vrijednosti koeficijenata. Drugačiji pristup rješavanju ovog problema podrazumijeva njegovu reformulaciju u obliku: min ‖C‖1 pod uslovom y=AC, (2.158) gdje se vrši minimizacija ℓ1 norme ‖·‖1, koja se može obaviti, na primjer, pomoću algoritama iz oblasti linearnog programiranja. Sa druge strane, minimizaciju je moguće obaviti i korišćenjem varijante gradijentnog algoritma, Algoritam 4. Na ovom mjestu algoritam će biti interpretiran sa stanovišta DHT1, uz notaciju koja će bolje naglasiti mehanizam rekonstrukcije u pojedinim koracima, Algoritam 8. Ideja je da se u vremenskom domenu vrši varijacija vrijednosti odbiraka signala, malom konstantom ±∆ i mjeri uticaj tih varijacija na mjeru koncentracije. Na početku se inicijalizuje vektor: xr(0)(tn) ← y(tn) { 0 za tn ∈ NQ za tn ∈ NA (2.159) Formirajmo N × N matricu sastavljenu od mjernih vektora, sa nulama na nedostajućim pozicijama. U m-toj iteraciji ova matrica je: X(m) = x(rm) 11×N = x(rm) x(rm) . . . x(rm) . (2.160) [ ] čime se zadržavaju dostupne vrijednosti, dok se nedostajući odbirci posmatraju kao varijable minimizacije. Odgovarajuća matrica Y∆(m+) kao kolone sadrži odgovarajuće vektore xr(m), kojima je na pozicijama tn ∈ NQ = N\NA dodato ∆, dok ekvivalentna matrica Y∆(m−) sadrži ove vektore sa oduzetim ∆ na pozicijama nedostajućih odbiraka. Svaka kolona odgovara jednoj poziciji tn. Ukoliko je tn ∈ NA, u koloni će biti samo prepisan vektor xr(m). Formirane matrice su (koraci 9. i 10. u Algoritmu 8): xr(m)(t1) x(rm)(t1) δ(t1−tn1) ··· 0 X(∆m+) = ⎡ xr(m)(t2) ... x(rm)(t2) ⎤ +∆ ⎡ 0 ··· ... 0 ⎤ (2.161) . . . . ⎢ xr(m)(tN) x(rm)(tN) ⎣ ⎦ ⎥ ⎥ 0 ⎣ ··· δ(tN −tnN) ⎥N×N ⎦ odnosno xr(m)(t1) x(rm)(t1) δ(t1 − tn1) · · · 0 X(∆m−) = ⎡ xr(m)(t2) . . . x(rm)(t2) ⎤ ⎡ − ∆ 0 · · · . 0 ⎤ (2.162) . . . . . . ⎢ xr(m) (tN) x (m)(tN) r ⎣ ⎢ 0 ⎦ ⎥ ⎣ · · · δ(tN − tnN) ⎥N×N ⎦ gdje δ(·) označava diskretnu, odnosno, Kronekerovu delta funkciju. Dalje, za obije matrice je potrebno, po kolonama, izračunati odgovarajuće DHT1. U tu svrhu uvodi se operator H(c) {·} koji, za svaku kolonu matrice računa proizvod TH xi∆±, i = 1, . . . , N . Uvedimo i simboličku oznaku za ℓ1-normu matrice ‖·‖(1c) koji ovu normu računa za svaku kolonu matrice zasebno. Cilj je aproksimirati gradijent mjere koncentracije, što se može postići oduzimanjem odgovarajućih mjera dobijenih za H(c) X(∆m+) (c) i H(c) X(∆m−) (c) konačnih razlika. Računanjem ove razlik{e, form}ir‖a se vektor {gradije}nt‖a mjere koncentracije, 1 1 , odnosno, na bazi g(m), čijim se oduzimanjem od aktu‖elnog rješenja x‖r(m) kl‖asičnim metod‖om najbržeg spuštanja, ‖ ‖ ‖ ‖ korak 12 u Algoritmu 8, ide ka rješenju koje minimizuje mjeru koncentracije (ℓ1-normu DHT1 koeficijenata). Cilj je naći minimum mjere koncetracije, koji odgovara pravim vrijednostima nedostajućih odbiraka. Korišćenjem uvedenih simboličkih oznaka, gradijent se računa na sljedeći način, korak 11 u Algoritmu 8: g(m) = 1 2∆ H(c) X(∆m+) (c) − H(c) (m) (c) X∆− [{ } ‖ 1 { }‖ 1] = 2∆ ‖‖‖ TH x(1m∆)+ ‖‖‖· · · ‖‖‖TH x(Nm∆)+ −‖‖‖ TH x(1m∆)− · · · TH x(Nm∆)− 1 ‖ 1 1] 1 1 . U našoj analizi i‖numerički‖m rezul‖tatima, kor‖isti se k‖orak µ =‖ 1 u lin‖iji 12 posm‖atranog {[‖‖ ‖ [‖‖ ‖]} algoritma. U blizini minimuma mjere koncentracije, algoritam će dostići stacionarno stanje sa stanovišta srednje kvadratne greške, i počeće proces oscilovanja oko rješenja. Kako bi se povećala tačnost rješenja, oscilovanje je moguće detektovati mjerenjem ugla: N βm = arccos n=1 g(m−1)(tn)g(m)(tn) Nn=1∑(g(m−1)(tn))2 Nn=1 (g(m)(tn))2 (2.163) izmed¯u dva gradijenta iz dvije susjedne iteracije. Ako je ovaj ugao, na primjer, veći od 170◦, √∑ √∑ može se zaključiti da su vrijednosti nedostajućih odbiraka započele oscilacije oko pozicije koja odgovara minimumu mjere koncentracije. Kada se ovaj dogad¯aj detektuje, neophodno je smanjiti korak, na primjer, ∆ ← ∆/3 u koracima 14 i 15 Algoritma 8. Konačno, kriterijum zaustavljanja, može se definisati na osnovu promjena vrijednosti nedostajućih odbiraka tokom zadnjih itereracija: tn∈NQ xpr(tn) − x(rm)(tn) 2 Tr = , ∑ tn|∈NQ x(rm)(tn) | (2.164) | 2 | koji predstavlja grubu estimaciju odnosa grešk|e u reko|nstrukciji i signala. U navedenoj ∑ | | relaciji, xpr(tn) označava signal koji je rekonstruisan prije redukcije koraka ∆, dok je x(rm)(tn) rekonstruisan nakon iteracija sa redukovanim korakom. Ako je vrijednost Tr veća od zahtijevane tačnosti, na primjer, Tr > −100 dB, tada se rekonstrukcija treba nastaviti sa redukovanim vrijednostima ∆. Primjer 2.18. Razmatra se signal N s(tn) = Alψpl(tn) + ε(tn), (2.165) ∑l=1 dužine N = 512 odbiraka, sa K = 35 komponenti. Signal je kontaminiran aditivnim bijelim Gausovim šumom, gdje je SNR = 30 dB, i dostupno je samo 50% odbiraka na slučajnim pozicijama. Amplitude Al i pozicije pl su slučajno odabrane. Rekonstrukcija signala je obavljena Algoritmom 8, i rezultati su prikazani na slici 2.24 (a)-(d). Iako signal nije potpuno rijedak u DHT1 domenu, i pored činjenice što je zašumljen, postignuta MSE u rekonstrukciji je reda 10−3. U pored¯enju sa ℓ1-magic algoritmom koji pripada grupi algoritama za konveksnu Algoritam 8 Gradijentni algoritam - interpretacija u DHT1 domenu Input: • Skup pozicija dostupnih odbiraka NA • Dostupni odbirci (mjerenja) y(n) • Korak µ • Zahtijevana tačnost Tmax 1: m ← 0 2: Inicijalizovati vektor xr(0) sa vrijednostima: 3: ∆ ← max |x(0)(n)| 4: repeat 5: xpr(tn) ← x(rm)(tn) 6: repeat 7: x(rm+1) ← xr(m) ◃ Inicijalizacija indeksa iteracije ◃ Vektor inicijalne estimacije signala xr(0)(tn) ← y(tn) zzaa ttnn ∈∈ NNQA { 0 ◃ Inicijalizacija koraka 8: X(m) ← xr(m) 11×N = xr(m) xr(m) . . . xr(m) ◃ 11×N je vektor jedinica 9:

X(∆m+) ← x (m) 1∆+ x(2m∆)+[· · · x(Nm∆)+] 10: X (∆m−) ← [x(112

1m∆)− x(2m∆)− · · · x(Nm∆)−] 11: g(m) ← 2[1∆ H (c) X (m) (c) ∆+ 1 − H](c) (∆m−) (c) X 12:

x(m+1) ← x[(m‖‖) − µ{g (m) }‖ ‖ { }‖ 1 ◃ Gradijent mjere] 13: m ← m + 1 ‖ ‖ ‖ ‖ ‖ ‖ N 91

14: until arccos √ n=1 Nn=1∑(g(m−1)(tn))2 (√tn)g(m)(tn) < 170◦ ◃ Adaptacija koraka 15: ∆ ← ∆/3 Nn=1 (g(m)(tn))2 ∑ 2 ∑ 16: until tn ∈ ∑ NtQn∈||NQ x(rm)(tn) 2 xrp(tn)−xr(m)(tn) | < Tmax ◃ Kriterijum zaustavljanja | 17: xr ← xr(m∑) || | || Output: • Rekonstruisani vektor signala xr optimizaciju, vrijeme izvršavanja na istom računaru i u istom MATLAB○R okruženju je izmed¯u 2 i 4 puta manje (zavisno od slučajnih pozicija mjerenja, pozicija koeficijenata signala i vrijednosti amplituda). Povećanjem broja dostupnih mjerenja, brzina gradijentnog algoritma se proporcionalno povećava. Primjer 2.19. Algoritam je testiran i u kontekstu rekonstrukcije QRS kompleksa realnog EKG signala iz baze [150]. Rezultati su prikazani na slici 2.25. Budući da su odbirci signala bili dostupni u uniformnim tačkama (kao u dosadašnjim primjerima), on je reodabran u tačkama proporcionalnim nulama Hermitskog polinoma, i u ovom slučaju koncentrisan korišćenjem 10 Originalni signal i nedostupni odbirci (a) Amplituda 5 0 -5 -10 (c) |C0 (p)| 4 2 6 Inicijalna DHT1 estimacija 0 100 200 300 400 500 tn 0 0 100 200 300 400 500 p 10 Rekonstruisani signal (b) Amplituda 5 0 -5 -10 (d) |C (p)| 4 6 DHT1 originalnog i rekonstruisanog signala 0 100 200 300 400 500 tn 2 0 0 100 200 300 400 500 p Slika 2.24: Rekonstrukcija sintetičkog signala rijetkog u DHT1 domenu primjenom gradijentnog algoritma: (a) originalni signal i nedostajući odbirci (crveni krstići), (b) rekonstruisani signal, (c) DHT1 signala sa nulama na mjestima nedostajućih odbiraka, (d) pored¯enje originalnog (crne tačke) i rekonstruisano (crveni krstići) signala u DHT1 domenu. Originalni i rekonstruisani QRS kompleks DHT1 originalnog i rekonstruisanog signala 0.4 Amplituda [mV] 0.2 0 0 -0.1 -0.2 C (p) -0.3 DHT1 originalnog signala DHT1 rekonstruisanog signala -0.2 Original Rekonstrukcija -0.4 (b) (a) -0.5 -60 -40 -20 t [ms] 0 20 40 60 10 20 30 40 50 p Slika 2.25: Rekonstrukcija QRS kompleksa realnog EKG signala primjenog gradijentnog algoritma: (a) Originalni i rekonstruisani signal, (b) pored¯enje originalnog (crne tačke) i rekonstruisano (crveni krstići) signala u DHT1 domenu. optimizacije (2.39). Relativna greška usljed sparsifikacije iznosi 5.23%, što je medicinski prihvatljivo (manja je od 10 %). MSE u rekonstrukciji od 1.262 · 10−7 je ostvarena nakon 18 iteracija gradijentnog algoritma. Glava 3 Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Diskretna kosinusna transformacija (DCT) je važan i često korišćen alat u analizi digitalnih slika i digitalnih audio signala [28]. Glavni razlog za to leži u činjenici da audio signali i digitalne slike mogu biti reprezentovani u kompaktnijoj formi u odnosu na Furijeovu transformaciju. Zbog toga mnogi kompresioni algoritmi koriste upravo DCT (jednodimenzionu i dvodimenzionu) [28, 41–43]. Ova glava disertacije sadrži originalne rezultate iz dva odvojena istraživačka pravca: (1) oblast jednodimenzione DCT sa primjenom na audio signale, (2) oblast dvodimenzione DCT sa primjenom na digitalnu sliku. Naučni doprinosi su prezentovani kroz dvije obimne sekcije ove glave. 3.1 Jednodimenziona diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala 3.1.1 Osnovne definicije Jednodimenziona diskretna kosinusna transformacija (DCT) drugog tipa (poznata i kao DCT-II) se definiše na sljedeći način: XC(k) = N−1 akx(n) cos π(22nN+ 1) k, (3.1) ∑n=0 ( ) gdje x(n) predstavlja diskretni signal dužine N , dok k = 0, ..., N − 1, označava odgovarajuće frekvencijske indekse. Uzimajući u obzir činjenicu da je ovo najzastupljenija forma navedene transformacije, ona će u nastavku izlaganja biti implicitno podrazumijevana, i indeks II će biti izostavljen iz odgovarajućih zapisa i skraćenica. Diskretna kosinusna transformacija je invertibilna, i relacija N−1 x(n) = akXC(k) cos π(2n + 1) k , (3.2) ∑k=0 (2N) omogućava računanje odbiraka signala x(n) na osnovu DCT koeficijenata XC(k), pri čemu indeksi diskretnog vremena uzimaju vrijednosti n = 0,...,N − 1. Skalirajući koeficijenti ak uzimaju vrijednosti ak = 1/N za k = 0 i ak = 2/N za k ≠ 0. U matričnoj formi, transformacija ima sljedeći √oblik √ XC = Φx, (3.3) gdje XC , Φ, i x predstavljaju: vektor DCT koeficijenata, DCT transformacionu matricu i vektor signala, respektivno. Za odgovarajuću inverznu transformaciju, matrična forma postaje: x = Φ−1XC. (3.4) Imajući u vidu ortogonalnost razmatrane transformacije, bitno je istaći da važi Φ−1 = ΦT , [64]. Za signal oblika K x(n) = aklAl cos π(2n + 1) 2N kl (3.5) ∑l=1 ( ) može se reći da je spars u DCT domenu ukoliko je odgovarajući broj komponenti (odnosno DCT koeficijenata sa nenultim vrijednostima) K mnogo manji od broja odbiraka signala N, tj. K ≪ N. Amplitude komponenti označene su sa Al, l = 1,2,...,K. U nastavku izlaganja, pozicije k1,k2,...,kK će biti označene kao pozicije komponenti signala. Računata po definiciji, DCT razmatranog modela signala (4.70) uzima oblik N −1 K XC(k)= Alakaklcos π(22nN+1)kl cos π(22nN+1)k (3.6) ∑n=0 ∑l=1 ( ) ( ) gdje k = 0, ..., N − 1. Komponente signala oblika Al cos (π kl (2n + 1)/(2N)) se množe sa DCT baznim funkcijama, produkujući u (3.6) članove z(kl,k,n) = Alakakl cos π(22nN+1)kl cos π(22nN+1)k . (3.7) ( ) ( ) U slučaju kada su svi odbirci signala dostupni, odgovarajuća DCT je XC(k) = Kl=1 Alδ(k − kl). ∑ 3.1.2 Uticaj nedostajućih odbiraka signala Pretpostavimo da je dostupno samo NA ≤ N slučajno rasporedˉenih odbiraka signala na pozicijama ni ∈ NA= {n1, n2, ..., nNA} ⊆ N = {0, 1, ..., N − 1}, iz skupa y = {x(n1), x(n2), . . . , x(nNA)} ⊆ x gdje je x(ni) = N−1 akXC(k) cos π(2n2Ni+ 1) k , i = 1, ..., NA. ∑k=0 ( ) Ne rizikujući gubitak opštosti izlaganja i zaključaka, prećutno je podrazumijevana uniformna funkcija gustine raspodjele pozicija odbiraka ni ∈ NA. U matričnom zapisu, dostupni odbirci se mogu zapisati u formi y = AXC, gdje A predstavlja NA × N matricu mjerenja. Ona je definisana kao parcijalna inverzna DCT matrica, čije su vrste jednake onim vrstama matrice (C−N1), koje odgovaraju pozicijama dostupnih odbiraka ni: √

2 2 cos π(22nN1 **+1) · · · cos π(2n1+** 21N **)(N−1)** √⎡ √ 2 **A=√** N2 **2 cos(π(** 22nN2 1
+1)) ⋯ cos(π(2n2+ 21N **)(N−1)**

) ⎤ . (.) ... (. √ .) 2 ⎥ 2 cos π(2n2NNA+1) ⋯cos π(2nNA2+N1)(N−1) ⎣ ( ) ( )⎦ ⎥ U teoriji kompresivnog odabiranja (očitavanja), uobičajena je normalizacija srednjih vrijednosti energija kolona (tj. elemenata na glavnoj dijagonali matrice AT A). U tom slučaju, koristio bi se faktor NA/2, umjesto faktora N/2. Inicijalna DCT√estimacija, koja je zasno√vana na ℓ2 normi, definiše se kao DCT koja je računata samo na bazi dostupnih odbiraka: X0C(k) = akx(n) cos π(22nN+ 1) k n∑∈NA ( ) NA K = z(kl, k, ni), (3.8) ∑i=1 ∑l=1 gdje je k = 0, 1, ..., N − 1. Identičan rezultat bi se dobio ukoliko bi nedostajući odbirci imali vrijednosti jednake nuli [7]. U matričnoj formi, prethodni rezultat postaje: XC0 = AT y. Članovi z(kl, k, ni) pripadaju skupu Θ = {z(kl, k, n1), z(kl, k, n2), ..., z(kl, k, nNA)} , koji je podskup kompletnog skupa odbiraka Alakakl cos

π(2n + 1) π(2n + 1) kl cos { (2N **k** , n, **k** = 0, ..., **N** − 1, **l** = 1, ..., **K** 43

.) (2N) } Zato je skup pozicija nedostajućih odbiraka NQ zapravo podskup skupa pozicija svih odbiraka, NQ = N\NA. Kako je ranije razmatrano [7], može se smatrati da su originalni odbirci signala na pozicijama definisanim skupom NQ zapravo zahvaćeni šumom: η(kl, k, n) = −z(kl, k, n), n ∈ NQ { 0, n ∈ NA, (3.9) gdje je k =

0, ..., N − 1, l = 1, ..., K . DCT koeficijenti NA **K** X0C **(k) = z(** kl, **k,** 1

ni) ∑i=1 ∑l=1 N−1 K = [z(kl, k, n) + η(k, kl, n)] (3.10) ∑n=0 ∑l=1 sa dostupnim odbircima koji su slučajno pozicionirani, i za 1 ≪ NA ≪ N, mogu se posmatrati kao slučajne promjenljive. Naš cilj je analiza statističkih osobina koeficijenata X0C(k). Statističke karakteristike DCT koeficijenata u slučaju signala sa nedostajućim odbircima Pretpostavimo da se posmatra spars signal sa K koeficijenata koji imaju nenulte vrijednosti u DCT domenu, na slučajnim pozicijama kl i sa amplitudama Al, l = 1, 2, ..., K. Pretpostavimo da je od ukupno N odbiraka signala dostupno samo njih NA, pri čemu je 1 ≪ NA ≪ N. DCT koeficijenti X0C(k) računati na osnovu dostupnih odbiraka su slučajne promjenljive sa aproksimativno Gausovom raspodjelom. Njihove srednje vrijednosti i varijanse date su sljedećim relacijama: μX0C (k) = N K A N Alδ(k − kl) (3.11) ∑l=1 i K σ2X0C (k) = NA(N − NA)

N 2(N − 1) A2l **[1** − 1δ **(k** − (N − kl)) − **1[1 + δ(** kl)]δ **(k** 1

− kl)], ∑l=1 2 2 (3.12) respektivno, gdje su ak ranije definisane DCT konstante. Dokaz će biti predstavljen u narednoj podsekciji. Dokaz U cilju očuvanja konciznosti i preglednosti izlaganja, dokazivanje ove teoreme ćemo razdvojiti u dva segmenta. Prvo ćemo posmatrati specijalni slučaj monokomponentnih (jednokomponentnih), a zatim i opšti slučaj multikomponentnih (višekomponentnih) signala. Monokomponentni signali. Posmatrajmo specijalni slučaj monokomponentnog signala, gdje je K = 1, kl = k1. Na početku, smatraće se da je amplituda A1 = 1. Polazeći od pretpostavki teoreme, inicjalna DCT signala sa NA dostupnih odbiraka se može računati kao: NA X0C(k) = z(k1,k,ni), (3.13) ∑i=1 gdje su z(k1, k, ni) definisani relacijom (3.7) sa A1 = 1. Budući da su signali i bazne funkcije ortogonalni, važiće sljedeće svojstvo: N−1 z(k1, k, n) = δ(k − k1). (3.14) ∑n=0 Drugim riječima, za kompletan skup odbiraka se može pisati:

z(k1, k, 0) + z(k1, k, 1) + ... + z(k1, k, N 25

− 1) = 1, za k = k1 (3.15) i

z(k1, k, 0) + z(k1, k, 1) + ... + z(k1, k, N 25

− 1) = 0, za k ≠ k1. (3.16) Slučaj kada je k = k1. Za k = k1 odgovarajući DCT koeficijent X0C(k1) je slučajna promjenljiva. Imajući u vidu relaciju (3.14), i činjenicu da su sve vrijednosti z(k1,k1,ni) jednakodistribuiranesaočekivanomvrijednošću1/N,lakosedolazidozaključkadajesrednja vrijednostpromjenljiveX0C(k1)jednaka: μX0C(k1) = E X0C(k1) = E {{z(k1, k1,}n1) + ... + z(k1, k1, nNA)} = N A N . (3.17) U slučaju kada je A1 ≠ 1, srednju vrijednost (3.17) treba pomnožiti sa A1. Po definiciji, varijansa posmatrane slučajne promjenljive je data relacijom σX20C (k1) =E X0C(k) − μX0C(k1) = E [X0C(k)]2 − μ2X0C(k1) 2 . (3.18) {| | } | | { } Razvijanjem prvog člana prethodnog izraza koristeći definiciju (3.13), dalje se dobija NA 2 σX20C(k1) = E ⎝ ⎛(∑i=1 z(k1, k1, ni) ⎞ − μ2C0(k1)) ⎛ N ⎝A NA ⎠ NA E ⎛ z2(k1, k1, ni) + (3.19) ⎜⎝∑i=1 z(k1, k1, ni)z(k1, k1, nj)⎞ − μ2X0C(k1). ∑i=1∑ji=≠1j ⎜⎜ Polazeći o⎜ ⎝d(3.14) za k = k1, nakon množenja lijeve i desne stran⎟⎠erelacije sa z(k1, k1, n), operator matematičkog očekivanja primijenjen na lijevu i desnu stranu daje: E {z(k1, k1, 0)z(n, k1, k1) + ... + z(k1, k1, N −1)z(k1, k1, n)} = E {z(k1, k1, n)} = 1 N . Vrijednosti z(k1, k1, n) su jednako distribuirane. Kao posljedica ove činjenice, očekivanja E{z(k1, k1, m)z(k1, k1, q)} za m ≠ q, m, q ∈ N su ista i jednaka konstanti B. Stoga dalje možemo pisati: (N − 1) B + E z2(k1, k1, m) = , ili 1 N B = N1 − E {N{z2(−k11, k1, m)}},m ∈ N. (3.20) Varijansa (3.19) sada dobija oblik: σX20C(k1)=NAE z2(k1,k1,m) +NA(NA−1)B−NNA22, m∈NA⊆N (3.21) Posmatrajmo očekivanje { } E z2(k1, k1, m) = E a2k1 cos2 π(22mN+1) k1 2 { } { [= E a4k 1 ( )] } 2 { 1 [2 + 12 cos 2 π(22mN+1) k1 = ( )] } = ak441 1 + E 2 cos 2 π(22mN+1) k1 + E cos2 2 π(22mN+1) k1 = a4k1 [+ a2k1 za k1 ≠ 0. { ( )} { ( )}] = 4 4N (3.22) Za k1 = 0 očekivanje postaje a4k1. U prethodnom izvod¯enju, srednji član je kosinus čija je srednja vrijednost 0 za slučajno m ∈ NA, dok je posljednji član DCT računat za z(k1, k, n), k = 2k1. Koristeći (3.17) i periodičnost DCT-a, možemo pisati: E ak21 cos2 π(2m2N+ 1) 2k1 = 1 . (3.23) { ( )} N Inkorporiranjem (3.22) u (3.21) i korišćenjem (3.20), nakon jednostavnog sred¯ivanja se dobija: σ2X0C(k1) = NNA(2N(N−−N1A)) N 2E z2(k1, k, m) − 1 = NA(N − NA) [} , za k1 ≠ 0,] N 2(N − 1) N 2 {a4k1 + a2k1 − 1 (3.24) [(4 4N)] odnosno, σX20C(k1) NNA(2N(N−−N1A)) = N2a4k1 − 1 = 0, za k1 = 0. (3.25) Za A1 ≠ 1 dobijene izraze treba pomnožiti sa[A21. Zamjenom odgovarajućih vrijednosti za ak1,] dobija se rezultat iz Teoreme: σX20C (k1) = NA(N − NA) 1 N 2(N − 1) 1 − (1 + δ(k1)) 2 A21 . (3.26) [ ] Slučaj kada je k ≠ k1. DCT koeficijent na pozicijama koje ne odgovaraju komponentama signala, X0C(k), k ≠ k1 predstavlja slučajne varijablu čije su statističke karakteristike drugačije od onih iz prethodno razmatranog slučaja. Naime, usljed svojstva ortogonalnosti (3.14) i činjenice da su sve vrijednosti z(k1, k, ni) jednako distribuirane, lako se zaključuje da je srednja vrijednost koeficijenta sada jednaka nuli, odnosno: μX0C(k) = E X0C(k) = 0, k ≠ k1. Imajući u vidu da je srednja vrijednost nula, varijansa po definiciji postaje: { } σ2X0C(k) = E |C0(k)|2 { NA } 2 =E ⎛⎜(∑i=1 z(k1, k, ni) ⎞ ⎛) ⎝ NA N⎠ A NA = E ⎛ z2(k1, k, ni) + x(k1, k, ni)z(k1, k, nj)⎞ , k ≠ k1. ⎜⎝∑i=1 ∑i=1 ∑ji=≠1j ⎜⎜ (3.27) (3.28) Polazeći od (3.14), množenjem lijeve i desne strane izraza sa z(k1, k, n) i primjenjivanjem ⎜⎝ ⎟⎠ operatora matematičkog očekivanja na lijevu i desnu stranu izraza, dobija se E {z (k1, k, 0)z(k1, k, n)} + ... + E {z(k1, k, N − 1)z(k1, k, n)} 25

= 0. (3.29) Analogno prethodno razmatranom slučaju, može se pretpostaviti da su vrijednosti z(k1, k, n) jednako distribuiranje, i da su očekivanja E {z(k1,

k, m)z(k1, k, q)} za m ≠ q, m, q = 0, 1, ..., N − 1 1

ista i jednaka konstanti D. Ovih članova je ukupno N − 1, dok postoji jedan član za koji je m = n. Navedene činjenice vode do (N − 1) D + E z2(k1, k, m) = 0. (3.30) Kako je k ≠ k1, uz pretpostavku da je k ≠ N − k1, nepoznato očekivanje E {z2(k1, k, m)} { } se može izraziti u formi E z2(k1, k, m) = E a2k1 cos2 π(22mN+A 1) k1 a2k1 cos2 π(2m + 1) k = { } { ( ) (2NA)} E {z(k1, k1, m)} E {z(k, k, m)} = 1 , (3.31) N2 m = 0, ..., N − 1. Sve vrijednosti z(k1, k1, m), odnosno z(k, k, m), jednako su distribuirane. Lako se pokazuje da važi E {z(k1, k1, m)} = E {z(k, k, m)} = 1/N . U specijalnom slučaju kada je k = N − k1, nepoznato očekivanje postaje E z2(k1, N − k1, m) = E a2k1k cos2 π(2m2N+ 1) k1 a2k1 cos2 π(2m + 1) (N − k1) { } { =E { a2k1cos2 π(2m2N+1)k1 a2k1cos2 ( ) (2N π(2m + 1))} k1 =E z2(k1,k1,m) , m=0,...,N−1 ( ) (2N)} { a a4k1}+ 4kN1 , k = N − k1 i k1 ≠ 0. 2 E z2(k1, k1, m) = 4 { } { a4k1 , k = N − k1 i k1 = 0. (3.32) Može se, dakle, zaključiti da je za koeficijent na poziciji k = N − k1 varijansa definisana izrazom (3.26). Ovdje valja napomenuti da je iskorišćeno da je sin π(22mN+1) N = 0 i cos π(2m+1) = −1, što se pojavljuje u 2 N N ( ) ( ) π(2m + 1) π(2m + 1) cos 2N (N − k1) = cos N π(2m + 1) cos 2N k1 (π(2m + 1)) (2N) ( ) + sin 2N N π(2m + 1) sin 2N k1 . ( ) ( ) Konačno, polazeći od definicije varijanse (3.28), odnosno izraza σX20C(k) = NAE {z2(k, k1, ni)} + NA (NA − 1) D, k ≠ k1, prateći prethodno izvedene izraze i inkorporirajući u rezultat nenultu amplitudu A1 ≠ 1, dobija se σX20C (k) = NNA(2N(N−−N1A)) A21 1 − δ(k − (N − k1)) 1 2 , k ≠ k1 (3.33) [ ] što vodi do rezultata predstavljenog u Teoremi. NA Gausova distribucija. Posmatrajmo distribuciju koeficijenata X0C(k1) = z(k1,k,ni) za veliko NA i k1 ≠ k. Funkcija gustine raspodjele vjerovatnoća normal∑izovane slučajne i=1 promjenljive sa srednjom vrijednošću koja je jednaka nuli, c = X0C(k1)/σX0C(k1), prema Edžvortovom izrazu [46] je f (c) = φ(c) + 1 κ4 φ(4)(c) + κ32 φ(6)(c) + O(1 4!NA σ4 [3σ6] NA2)(c). Prvi član je Gausova distribucija φ(c) = e−c2/2/ 2π, dok preostali članovi predstavljaju √ devijaciju od ove distribucije. Varijansa, zatim treći i četvrti momenti od z(k1, k, ni) su označeni sa σ2, κ3, i κ4, respektivno. U našem slučaju, za veliko NA, imamo σ2 → 1/N 2, κ3 → 0, i κ4 → 9/(4N 4). Zaključujemo da važi κ4/(4!NAσ4) → 3/(32NA) → 0 i f (c) → φ(c). Slučaj multikomponentnih signala. Prethodno predstavljenu analizu za slučaj monokomponentnih signala sada možemo generalizovati na slučaj multikomponentnih signala. Posmatrana slučajna promjenljiva (3.13) postaje: NA K X0C(k) = a2kAl cos π(2ni + 1) kl cos π(2ni + 1) k . (3.34) ∑i=1 ∑l=1 (2N) (2N) Prethodno sprovedena analiza indicira da i slučaju multikomponentnih signala, DCT koeficijenti na l-toj poziciji u inicijalnoj estimaciji X0C(k), k = kl predstavljaju Gausove slučajne promjenljive sa srednjim vrijednostima različitim od nule µX0C (k) = Al NA , l = N 1,2,...,K dok DCT koeficijenti na ostalim pozicijama, X0C(k), k ≠ kl takod¯e imaju karakteristike Gausove slučajne pormjenljive, u ovom slučaju sa srednjim vrijednostima jednakim 0, budući da na tim pozicijama postoji samo šum koji je posljedica nedostajućih odbiraka u komponentama signala, čija je srednja vrijednost nula. Ovi zaključci slijede iz Centralne granične teoreme [47], i činjenice da sumiranje Gausovih slučajnih varijabli produkuje nove Gausove slučajne varijable. Srednja vrijednost DCT koeficijenata za slučaj multikomponentnogsignalamožesepredstavitisljedećimunificiranimrezultatom: µX0C(k) = N Alδ(k − kl). NA K ∑l=1 Za

DCT koeficijente X0C(k) na pozicijama koje ne odgovaraju komponentama signala, tj. k ≠ kl varijansa je: σX20C(k) = NNA(2N(N−−N1A)) K A2l 1 − δ(k − (N − kl)) . 1 2 (3.35) ∑l=1 [ ] Ovaj izraz se jednostavno dobija, imajući u vidu da na pozicijama k ≠ kl nedostajući odbirci iz svih komponenti signala doprinose šumu, a šumovi koji potiču od svake pojedinačne komponente su Gausovi, med¯usobno nekorelisani slučajni procesi, sa srednjim vrijednostima 0. Varijansa šuma koji potiče od l-te komponente signala je Al2 NNA2(N(N−−N1A)) 1 − 12δ(k − (N − kl)) , l = 1, ..., K. Na ovom[mjestu treba istaći d]a rezultat (3.35) važi u smislu srednje varijanse DCT koeficijenata na pozicijama koje ne korespondiraju komponentama signala, budući da je u njenom izvod¯enju pretpostavljena statistička nezavisnost slučajnih promjenljivih. Med¯utim, u striktnom smislu, komponente signala pomnožene sa baznim funkcijama mogu izazvati tzv. efekat spajanja (coupling effect) ukoliko su pozicionirane tako da zadovoljavaju odred¯ene uslove. Tako na primjer, u dvokomponentnom spars signalu, sa komponentama na pozicijama k1 i k2, ako je zadovoljen uslov k1 + k2 = 2k, efekat spajanja (uparivanja) izazvaće povećanje varijansi na pozicijama kc1 = (k1 + k2)/2 i kc2 = (k2 − k1)/2. Med¯utim, na pozicijama N − kc1 i N −kc2 varijansa će biti u tom slučaju smanjena za iste vrijednosti. Kao posljedica navedenog, prosječna varijansa DCT koeficijenata na pozicijama koje ne odgovaraju komponentama signala k ≠ kl ostaje ista i data je formulom (3.35), bez obzira na opisani efekat. Prema analizi koja je predstavljena za monokomponentne signale, k-ta komponenta signala na poziciji k = kp, p ∈ {1, 2, ..., K} ima varijansu A2p NNA2(N(N−−N1A)) 1 − 12(1 + δ(kp)) i srednju vrijednost μX0C(kp) = A2pNA/N . Dodatno, na poziciji k = [kp postoji takod¯e] šum uzrokovan nedostajućim odbircima u preostalih K − 1 komponenti. Ovo znači da da je zbir slučajnih promjenljivih koje potiču od drugih komponenti signala sa pozicija kl, l = {1, 2, ..., K} , l ≠ p dodat postojećoj slučajnoj promjenljivoj na poziciji kp. Ovih K − 1 slučajnih promjenljivih predstavljaju Gausove procese sa srednjom vrijednošću nula, i imaju varijanse A2l NNA(2N(N−−N1A)) 1 − 12δ(k − (N − kl)) gdje je l ≠ p i l = 1, ..., K, p = 1, ..., K. Rezultujuća slučajna p[romjenljiva je takod¯e]Gausova, sa srednjom vrijednošću μX0C(kp) = Ap2NA/N i varijansom σ2X0C(kp) NNA(2N(N−−N1A)) A2p K = 1 − (1 + δ(kp)) 1 + A2l 1 − δ(k − (N − kl)) 1 . { [2] ∑ll=≠1p [2] } (3.36) Unifikacijom (3.35) i (3.36) se dolazi do izraza za varijansu (3.12) koji je predstavljen u formulaciji Teoreme. Numerička provjera izraza za varijanse koeficijenata Primjer 3.1. Posmatrajmo jednokomponentni signal koji je spars u DCT domenu i zadat relacijom (4.70), sa K = 1, k1 = 12, i N = 129. Od ukupno N , dostupno je samo NA odbiraka signala na slučajnim pozicijama. U prvom dijelu eksperimenta, broj dostupnih odbiraka NA variramo od 0 do N − 1. 1 ×10-3 Koeficijent na poziciji k = k1 2 ×10-3 Koeficjenti na pozicijama k ≠ k1 0.8 1.5 Varijansa 0.6 1 0.4 0.2 Eksperimentalno Varijansa 0.5 Eksperimentalno (a) Teorijski (b) Teorijski 0 0 20 40 60 80 100 120 0 0 20 40 60 80 100 120 Broj dostupnih odbiraka NA Broj dostupnih odbiraka NA 2.5 × 10-3 Svi DCT koeficijenti 1 × 10-3 Koeficijent na poziciji signala M=64 2 0.8 Varijansa Varijansa M=50 0.6 1.5 0.4 1 Eksperimentalno 0.2 Eksperimentalno (c) Teorijski (d) Teorijski 0.5 0 20 40 60 80 100 120 0 0 20 40 60 80 100 120 DCT indeks k DCT indeks k1 komponente signala Slika 3.1: Numerička evaluacija varijanse DCT koeficijenata u slučaju signala sa nedostajućim odbircima: (a) Varijansa DCT koeficijenta na poziciji signala k = k1, predstavljena kao funkcija od broja dostupnih odbiraka, (b) prosječna varijansa DCT koeficijenata na pozicijama koje ne odgovaraju komponentnama signala k ≠ k1 kao funkcija od broja dostupnih odbiraka, (c) varijansa svih DCT koeficijenata monokomponentnog spars signala sa k1 = 12 i NA = 64 dostupnih odbiraka, (d) varijansa DCT koeficijenata X0C(k = k1) u funkciji od k1, računata za signal sa NA = 50 dostupnih odbiraka. Za svaki posmatrani broj dostupnih odbiraka NA, varijansa DCT koeficijenta X0C(k1) na poziciji komponente signala k1 je izračunata numerički, usrednjavanjem rezultata dobijenih na bazi 30000 nezavisnih realizacija posmatranog signala sa slučajno rasporeded¯enim nedostajućim (odnosno dostupnim) odbircima. Rezultat pored¯enja numerički dobijene varijanse sa teorijskim modelom (3.12) predstavljen je na slici 3.1 (a). Zatim je eksperiment sproveden i za DCT koeficijente na pozicijama koje ne odgovaraju komponentama signala, k ≠ k1 (kao i k ≠ N − k1). Pošto se posmatra N − 2

= 127 koeficijenata, broj slučajnih realizacija je sada smanjen na 200 (ukupan broj posmatranih koeficijenata u svim realizacijama je 25400). Prosječna numerički dobijena varijansa i varijansa zadata teorijskim izrazom (3.12) su prikazane na slici. 3.1 (b). Kako bi istakli razliku izmed¯u varijansi koeficijenata na pozicijama koje odgovaraju komponentama signala i varijansi na pozicijama koje ne odgovaraju komponentama signala, varijanse svih DCT koeficijenata signala sa NA = 64 dostupnih odbiraka su izračunate numerički na osnovu 10000 nezavisnih realizacija signala i prikazane na slici Fig. 3.1 (c), gdje su upored¯ene sa teorijskim izrazom (3.12. Konačno, ispitana je i zavisnost varijanse od pozicije komponente signala k1. U tom cilju, pozicija komponente k1 je varirana u opsegu od 0 do N −1, pri čemu je broj dostupnih odbiraka NA = 50. Na bazi 10000 nezavisnih realizacija signala sa slučajno raspored¯enim nedostajućim Histogrami i funkcije raspodjele 2.5 2 N (µX0C(22), σ2X0C(22)) N (0, σX20C(130)) 1.5 1 0.5 0 -2 -1 0 1 2 3 4 Vrijednosti koeficijenata Slika 3.2: Skalirani histogrami DCT koeficijenata i odgovarajuće teorijske funkcije gustine raspodjele vjerovatnoća: za koeficijent koji ne odgovara komponenti signala (lijevo) i za koeficijent koji odgovara poziciji signala (desno). Teorijski rezultat je označen tačkama. odbircima, dobijen je numerički rezultat za varijansu koeficijenata X0C(k1), i on je upored¯en sa teorijskim rezultatom (3.12). Kao što je očekivano, varijansa nije zavisna od posmatrane pozicije k1, osim za k1 = 0, kada je jednaka nuli (što je predvid¯eno teorijskim izrazom). Rezultati za ovaj eksperiment su prikazani na slici 3.1 (d). U svim razmatranim slučajevima, dobijeno je veliko poklapanje teorijskog i numeričkih rezultata. Primjer 3.2. Posmatra se multikomponentni signal definisan izrazom (4.70), sa K = 5. Dužina kompletnog signala je N = 155. Pozicije komponenti signala su zadate indeksima kl = {22,49,47,89,100}, dok su odgovarajuće amplitude komponenti Al = {5,3.5,1.5,2.5,1}. U cilju numeričke provjere raspodjele slučajne promjenljive X0C(k), posmatra se 60000 nezavisnih realizacija signala sa slučajno rasporedženih NA = 90 odbiraka. Histogrami koeficijenta koji odgovara jednoj od komponenti, konkretno, X0C(22), i koeficijenta čiji indeks ne odgovara nijednoj komponenti signala, konkretno, X0C(130) su prikazani na slici 3.2. Histogrami su skalirani sa brojem realizacija. Histogram koeficijenta C(22) je upored¯en sa Gausovom distribucijom (predstavljenom tačkama) koja ima srednju vrijednost µX0C (22) = A1NA/N ≈ 2.90 i varijansu σX20C(22) = 0.0542, izračunatu po formuli (3.12). Rezultat je prezentovan na slici 3.2 (desno). Za koeficijent X0C(130) skalirani histogram je upored¯en sa Gausovom distribucijom čija je srednja vrijednost nula, a varijansa σX20C(130) = 0.0739, izračunata po formuli (3.12). Rezultat je predstavljen na slici 3.2 (lijevo). 3.1.3 Rekonstrukcija zasnovana na analizi nedostajućih odbiraka Koristeći rezultat (3.12), varijansa DCT koeficijenata koji ne odgovaraju pozicijama komponenti se može izraziti u obliku: σ2X0C(k) NNA(2N(N−−N1A)) K = A2l 1 − δ(k − (N − kl)) 1 2 , (3.37) ∑l=1 [ ] gdje je k ≠ kl. Koeficijentima na pozicijama k = N − kl, l = 1, ..., K je varijansa smanjena za A2l/2 u pored¯enju sa ostalim koeficijentima na pozicijama koje ne odgovaraju indeksima komponentama signala. Bez većeg gubitka tačnosti može se pretpostaviti da je varijansa koeficijenata na svim pozicijama koje ne odgovaraju komponentama signala nezavisna od samih pozicija: σc2sN = NNA(2N(N−−N1A)) K A2l . (3.38) ∑l=1 Na pozicijama k = N −kl njena vrijednost je precijenjena. Med¯utim, dalje izlaganje će pokazati da se to neće negativno odraziti na analizu performansi rekonstrukcije. Varijansa (3.38) zavisi od ukupne snage signala, koja se na bazi dostupnih odbiraka može estimirati kao K s2 (n). (3.39) ∑l=1 Al2 = Es ∼= NA n∑∈NA N Ukoliko bi postaivili prag na vrijednosti 4σcsN , tada (prema poznatom 4σ empirijskom pravilu) znamo da će manje od 1 u 15,000 koeficijenata (koji ne odgovaraju pozicijama signala) biti iznad ovog praga. Koeficijenti koji su iznad praga se mogu smatrati koeficijentima koji odgovaraju komponentama signala, i oni mogu biti rekonstruisani nakon što su njihove pozicije detektovane. U Algoritmu 9 i Algoritmu 10 predstavljene su procedure za rekonstrukciju signala zasnovanih na predstavljenoj analizi. Ukoliko bi ovakva detekcija uključila koeficijent šuma (koji ne odgovara nijednoj komponenti signala) njegova vrijednost nakon rekonstrukcije će biti jednaka nuli. U slučaju da postoje koeficijenti komponenti sa malim vrijednostima, odnosno vrijednostima koje su u nivou šuma, procedura za rekonstrukciju se može ponoviti nakon što su najjače komponente detektovane, rekonstruisane i njihov doprinos oduzet od vrijednosti dostupnih odbiraka. Primjer 3.3. Posmatra se trokomponentni signal dužine N = 256. Pozicije komponenti i odgovarajuće amplitude su k1 = 14, k2 = 162, k3 = 203 i A1 = 1, A2 = 1/ 2, A3 = √ 1/2, respektivno. Dostupno je samo NA = 128 slučajno pozicioniranih odbiraka signala. U cilju rekonstrukcije signala, računamo inicijalnu estimaciju X0C(k). Zatim definišemo prag na osnovu varijanse koeficijenata uzrokovane nedostajućim odbircima, čija je vrijednost σc2sN = 122586(22(5265−61−218))(1 + 1/2 + 1/4) = 0.0017. Na slici 3.3 je prikazana inicijalna estimacija, i prag 0.5 Inicijalna estimacija 0.4 0.3 0.2 |X0C (k)| 4σcsN -prag 0.6 0.1 0 0 50 100 150 Frekvencijski indeks k 200 250 Slika 3.3: Inicijalni DCT trokomponentnog rijetkog signala i odgovarajući 4σ empirijski prag (dat horizontalnom linijom): crveni krstići- DCT koeficijenti signala sa svim dostupnim odbircima, crne tačke - DCT koeficijenti signala sa pola slučajno raspored¯enih nedostajućih odbiraka. na 4 × 0.0017 = 0.1657. Može se uočiti da je srednja vrijednost najslabije komponente 1/4 √ daleko iznad nivoa praga. Sprovedena analiza se može generalizovati i na K -komponentne signale. U najgorem slučaju, detektabilna je barem najjača komponenta (detekcija ostalih komponenti bi se sprovela nakon rekonstrukcije i oduzimanja doprinosa najjače komponente iz dostupnih odbiraka signala). Najgori mogući slučaj za detekciju najjače komponente je slučaj kada su sve ostale komponente iste jačine (i bez gubljenja opštosti, jednake 1), odnosno, A1 = A2 = · · · = AK = 1. U najgorem slučaju K -spars signala sa jednakim komponentama, odgovarajući 4σ prag bi bio T = 4 NA(N − NA) √ N2(N − 1) K. (3.40) Možemo zaključiti da je srednja vrijednost koeficijenata koji odgovaraju komponentama signala iznad praga (sa vjerovatnoćom koju diktira posmatrano empirijsko pravilo) ako je ispunjeno NA NA(N−NA) N >4√ N2(N−1) K. (3.41) Navedeni uslov diktira gornju granicu za stepen rijetkosti K : NA(N − 1) K < 16(N − NA) . (3.42) Tako za N = 256 i NA = 128 dobijamo K < 15.94 ili K ≤ 15. Ako bi umjesto 4σ posmatrali 3σ empirijsko pravilo, dobili bi uslov K ≤ 28. Potrebno je istaći da u slučaju kada je nekoliko komponenti šuma pogrešno detektovano (kao da su komponente signala), to neće uticati na uspješnost rekonstrukcije, dok god su odgovarajući uslovi zadovoljeni. Rekonstrukcioni algoritam će ove pogrešno detektovane koponente jednostavno postaviti na nule. Algoritam 9 Rekonstrukcija postavljanjem praga u DCT domenu (jednoiterativni postupak) Input: • Vektor mjerenja y • Mjerna matrica A • Inverzna DCT matrica Φ−1 1: a ← 0.147 2: PN N (T) ← 0.99 ◃ Zadata vjerovatnoća da DCT koeficijenti šuma budu ispod praga 3: L ← log 1 − (PN N (T)) N 2 4: XC0 ← (A(T A)−1AT y) ◃ Računa se inicijalna DCT estimacija 5: σcsN ← (NM2((NN−−M1)) ∥y∥22 ∥y∥22 aproksimira l=1 K M ◃ Izraz M A 2 l √ 67:: TΠˆK←←σcsaNrg√ a − π4>−TaL + √(+ aL◃)P2r−ag4oamLse biraju koefi◃ciAjelntteirnkaotmivpnoon,eTnt←isig4nσacslNa 1 4 ∑ π X (C) 0 8: AK ← A(:,{Πˆ|K)| } ◃ Matrica AK sadrži kolone matrice A indeksima ΠˆK 9: XCK ← XKCA|TKAK −1ATKy 10: XKCz(k)(← X0,KC(k)), kk ∈∈/ ΠΠˆˆKK, { Output: • Vektor rekonstruisanih koeficijenata XCKz • Rekonstruisani signal x = Φ−1XCKz Nakon detekcije pozicija (frekvencijskih indeksa) komponenti, jednačina mjerenja postaje: y = AK XCK , (3.43) gdje XCK predstavlja vektor sastavljen od K nepoznatih koeficijenata na detektovanim pozicijama. Mjerna matrica je sada redukovana na dimenzije NA × K, odbacivanjem kolona koje odgovaraju koeficijentima čije su vrijednosti 0. Budući da je K < NA, posmatrana jednačina može biti riješena u srednjem kvadratnom smislu. Rezultat je vektor od K elemenata: XKC = (ATKAK)−1ATKy. (3.44) Ukoliko su dobijeni koeficijenti takvi da je greška e = y − AK XCK jednaka 0 (ili ima rijednost koja je u nekim prihvatljivim granicama), tada je nad¯eno rješenje problema. Ukoliko ova greška nije mala, tada neki nenulti koeficijenti nijesu detektovani i uključeni u XCK . Stoga računanje treba ponoviti, sa greškom e sada u ulozi signala. Kandidati za pozicije nenultih koeficijenata se sada detektuju na osnovu inicijalne DCT estimacije ovog novog signala, i dodaju se u prethodni skup pozicija nenultih koeficijenata K. Računanje XCK treba ponoviti sa ovim novim, tj. ažuriranim setom pozicija, sve dok se ne dostigne zadovoljavajući nivo greške (ili greška ne Algoritam 10 Rekonstrukcija postavljanjem praga u DCT domenu (iterativni postupak) Input: • Vektor mjerenja y • Mjerna matrica A • Zahtijevana tačnost δ • Inverzna DCT matrica Φ−1 1: Πˆ K ← ∅ ⊲ Skup estimiranih pozicija komponenti; na početku je prazan 2: e ← y ⊲ Vektor greške na početku je jednak vektoru dostupnih odbiraka 3: a ← 0.147 4: PN N (T) ← 0.99 ⊲ Zadata vjerovatnoća da DCT koeficijenti šuma budu ispod praga 5: L ← log 1 − (PN N (T)) N 2 6: while ‖e(‖22 > δ do) 7: XC0 ← A−1e 8: σcsN ← (NM2((NN−−M1)) ‖y‖2 ⊲ Izraz ‖y‖22 K M M l=1 A l 2 √ 9: TΠˆK←←σcsΠˆNK√∪a ar-g π4 − aL>+T√(1 4 π + aL 2 − 4aL ⊲ Prag se računa na osnovu σcsN (10: X C 11: AXKCK ←← AA(:TK,ΠAˆKK)−{1||ATKy 0)) | } ⊲ Matrica AK sadrži kolone matrice A indeksima ΠˆK 12: ⊲ Izraz ATKAK −1ATK je pseudoinverzija matrice AK 13: yK ← AK XCK 14: e ← y − yK ( ) ( ) 15: end while 16: XKC z (k) ← X0,KC(k), kk ∈∈/ ΠΠˆˆKK, { Output: • Vektor rekonstruisanih koeficijenata XCKz • Rekonstruisani signal x = Φ−1XCKz padne na nulu). U nastavku će biti predstavljena probabilistička analiza greške u detekciji koeficijenata koji korespondiraju komponentama signala. Neka se posmatra K-komponentni spars signal definisan modelom (4.70). DCT koeficijenti koji ne odgovaraju komponentama signala predstavljaju slučajne promjenljive opisane aproksimativno Gausovom funkcijom raspodjele, N(0,σc2sN) sa srednjom vrijednošću nula i varijansom σc2sN definisanom sa (3.38). DCT koeficijent koji odgovara l-toj komponenti signala takod¯e predstavlja slučajnu promjenljivu sa aproksimativno Gausovom distribucijom, N(NNAAl,σ2X0C(kl)), l = 1,2,...,K, sa srednjom vrijednošću µX0C(kl) = NNAAl i varijansom σX20C(kl) definisanom relacijom (3.12). Apsolutna vrijednost DCT koeficijenta na poziciji l-te komponente signala imaće „savijenu" normalnu distribuciju (engl. folded normal distribution) p(ξ) = 1 √ exp − (ξ − NNAAl)2 (ξ + NNAAl)2 σX0C(kl) 2π[(2σX20C(kl)) + exp (− 2σX20C(kl)) . (3.45)] Apsolutne vrijednosti DCT koeficijenata šuma (koji ne odgovaraju komponentama signala) podliježu tzv. polunormalnoj funkciji gustine raspodjele (engl.

half-normal distribution) √ q(ξ) = √ exp − 2 **ξ2 σ** . (3.46) **N π** (2σc2sN) **DCT** 43

koeficijent na poziciji šuma imaće vrijednost manju od Ξ sa vjerovatnoćom Ξ √ Q(Ξ)= √ exp − 2 ξ2 dξ =erf √ Ξ ∫0 σ N π (2σc2sN) (2σcsN) . (3.47) Ukupan broj DCT koeficijenata na pozicijama šuma je N − K. Vjerovatnoća da je N − K nezavisnih DCT koeficijenata koji ne odgoavarju komponentama signala manji od Ξ je Q(Ξ)N−K. Vjerovatnoća da je barem jedan od N − K DCT koeficijenata šuma veći od Ξ iznosi G(Ξ) = 1 − Q(Ξ)N−K. Greška u detekciji komponente signala nastaje kada DCT koeficijent koji ne odgovara pozicji signala svojom vrijednošću nadmašuje DCT koeficijent koji je na poziciji komponente signala. U cilju izračunavanja vjerovatnoće ove greške, razmatrajmo apsolutnu vrijednost DCT koeficijenta na poziciji komponente signala na i oko vrijednosti ξ. DCT koeficijent na poziciji signala ima vrijednost u opsegu od ξ do ξ + dξ sa vjerovatnoćom p(ξ)dξ, gdje je p(ξ) definisano relacijom (3.45). Vjerovatnoća da najmanje jedan od N − K DCT koeficijenata na poziciji šuma ima vrijednost veću od ξ iznosi G(ξ) = 1−Q(ξ)N−K. Može se zaključiti da vjerovatnoća da je apsolutna vrijednost DCT koeficijenta na poziciji signala u opsegu od ξ do ξ+dξ i da je apsoloutna vrijednost najmanje jednog DCT koeficijenta na poziciji šuma veća od vrijednosti DCT koeficijenta komponente signala zadata izrazom G(ξ)p(ξ)dξ. Uzimajući u obzir sve moguće vrijednosti ξ, zaključuje se da je vjerovatnoća pogrešne detekcije l-te komponente signala definisana relacijom: PE(l) = 1 ∞ N−K σX0C(kl) 2π ∫0 √ (1 − erf √ ξ (2σcsN)) × [exp − ((ξ −2NNAAl)2 2σX0C(kl)) + exp − ((ξ2+σX2NN0CA(Akl)l)2)] dξ . (3.48) Navedeni izraz se može pojednostaviti korišćenjem aproksimacije predstavljene u [7]. 3.1.4 Veza sa indeksom koherentnosti U cilju analize najgoreg mogućeg scenarija, pretpostavimo maksimalni mogući uticaj DCT koeficijenata šuma na detekciju koeficijenta najjače komponente signala. Maksimalan med¯usobni uticaj posmatranih K komponenti postoji kada sve one imaju jednake (bez gubljenja opštosti - jedinične) amplitude. U slučaju kada je dostupno NA odbiraka signala, srednja vrijednost komponente (DCT koeficijenta na poziciji komponente signala) je NA/N . Šumna komponenta (DCT koeficijent koji ne odgovara nijednoj komponenti signala) na frekvencijskom indeksu k, koja potiče od komponente signala na poziciji kl je jednaka je: Q(k, kl) = akakl cos π(2n + 1) π(2n + 1) 2N kl cos k . (3.49) n∈N∑A,k≠kl ( ) (2N) Ona se može povezati sa indeksom koherentnosti matrice AT A, koji je definisan na sljedeći način: μ = max N akakl cos π(2n + 1) π(2n + 1) 2N kl cos 2N k . (3.50) NA n∈N∑A,k≠kl ( ) ( ) | | Ukoliko je šum koji potiče od svih komponenti signala takav da se sumira po fazi na | | poziciji k koja ne odgovara pozicijama komponenti signala, tada, pretpostavljajući maksimalnu moguću vrijednost za μ, maksimalna moguća vrijednost DCT koeficijenta šuma je K max |Q(k, kl)| = Kμ NA N . (3.51) Ukoliko se istovremeno na poziciji komponente signala svi šumovi koji potiču od preostalih K − 1 komponenti sabiraju u fazi, i to u smjeru suprotnom znaka srednje vrijednosti posmatrane komponente signala, opet pretpostavljajući njihove maksimalne moguće apsolutne vrijednosti μ, tada će rezultujuća najgora moguća amplituda komponente signala biti min{X0C(kl)} = NA N − (K − 1) max |Q(k, kl)|. (3.52) Detekcija komponente signala će biti još uvijek moguća ukoliko je zadovoljen uslov min{X0C (kl)} > K max |Q(k , kl)|, odnosno NNA − (K − 1) NNA μ > K μ NNA . Uslov 1 − (K − 1)μ > K μ je zapravo ekvivalentan dobro poznatom uslovu za rekonstrukciju signala zasnovanom na sparku posmatrane matrice [61]: K < 1+ 1 1 2 . (3.53) (μ) Prethodno izvod¯enje odlično ilustruje činjenicu da je, u literaturi inače široko prihvaćena, relacija izmed¯u stepena rijetkosti K i indeksa koherentnosti μ (3.53) zapravo ekstremno pesimističan uslov za rekonstrukciju nedostajućih odbiraka signala. Kada bi bili u poziciji da pravimo strategiju odabiranja na osnovu izbora pozicija, tada bi to trebalo učiniti tako da se minimizuje vrijednost μ. Minimalna vrijednost je definisana Velčovom granicom (engl. Welch bound) μ ≥ N(NA−(NN−A1)), [63]. Jednakost važi u slučaju specifičnih formi transformacija i mjernih matrica k√oje se označavaju skraćenicom ETF (engl. equiangular tight frames). Važno je istaći da DCT ne zadovoljava svojstva ETF-ova. Med¯utim, čak i kada bi DCT predstavljala ETF, tada za N = 256 i NA = 128 prema Velčovoj granici važi uslov μ ≥ (256 − 128)/128/255 = 0.0626. Minimalna moguća vrijednost μ garantuje rekonstrukciju √za K < 8.5. Navedeni uslov je ekstremno pesimističan za realne slučajeve. Na osnovu naše numeričke analize, za N = 256 i NA = 128 smo zaključili da je moguće rekonstruisati signale sa mnogo većim brojem komponenti K. Na primjer, u najgorem slučaju jednakih amplituda i sa pesimističnim 3σ empirijskim pravilom, potpuna rekonstrukcija je moguća za K koje ide do vrijednosti 28. 3.1.5 Uticaj aditivnog šuma Budući da DCT koeficijenti koji odgovaraju komponentama signala imaju srednju vrijednost μX0C(kl) = Al NNA , l = 1, 2..., K, tokom procesa rekonstrukcije oni se pojačavaju sa faktorom N/NA, kako bi se produkovale tačne vrijednosti amplituda Al. Ukoliko u signalu postoji slabi aditivni šum varijanse σε2, tada u odnosu na inicijalnu DCT estimaciju šuma σ2X0C (k) = a2kE ε(n)ε(m) cos π(22nN+ 1) k cos π(2m + 1) k = n∑∈NA m∑∈NA { ( ) (2N NA σε2,)} N ova varijansa će biti pojačana (N/NA)2 puta. Stoga je varijansa u jednom estimiranom koeficijentu jednaka: σX20C(k) = σε2. N N (3.54) A Energija šuma u rekonstruisanom signalu sa K komponenti (odnosno energija šuma prisutna u K rekonstruisanih DCT koeficijenata) će biti K puta veća: EεR = NAσε2K (NA) N 2 K N = N A σε2 N . (3.55) Sada se može definisati odnos signal-šum u rekonstruisanom signalu kao: SNR = 10log Es Es (EεR) = 10log (NKAσε2N) Es = SN Ri − 10 log K = 10 log (NKA Eε) N , (3.56) (A) pri čemu je SN Ri = 10 log(Es/Eε) ulazni odnos signal-šum u svim odbircima signala. Ovaj rezultat, dobijen jednostavnim i intuitivno jasnim izvod¯enjem, može se uporediti sa rezultatom dobijenim u kontekstu tzv. Bajesovog kompresivnog odabiranja [26]. Naime, matrica kovarijanse estimiranih koeficijenata, prema ovom kontekstu rekonstrukcije, je definisana kao Σ = (AT A/σε2 + D)−1, gdje je D dijagonalna matrica tzv. hiperparametara. Nakon nalaženja pozicija nenultih koeficijenata, korišćenjem iterativne procedure u Bajesovom pristupu, koeficijenti sa velikim hiperparametrima su isključeni zajedno sa odgovarajućim elementima matrice D i kolonama A. Za našu mjernu matricu, varijansa estimiranih koeficijenata je jednaka dijagonalnim elementima matrice AT A, pošto su hiperparametri jednaki 0 za nenulte koeficijente. Srednja vrijednost dijagonalnih elemenata matrice AT A je NA/N . Ona se ne mijenja izostavljanjem kolona u mjernoj matrici. Stoga, dijagonalni elementi matrice kovarijanse u finalnoj iteraciji rekonstrukcije zasnovane na Bajesovom metodu jednaki su σε2N/NA, vodeći do (3.54). Prezentovani rezultati za uticaj aditivnog šuma će biti korišćeni i numerički provjereni u kontekstu analize rekonstrukcije signala koji nijesu čisto spars. 3.1.6 Analiza rekonstrukcije signala koji nijesu rijetki Signali koji nijesu čisto spars, a da pri tome posjeduju dobru koncentraciju u posmatranom domenu, često se susrijeću u praktičnim primjenama. Za DCT domen, kao ilustrativan primjer navešćemo audio signale. Zbog njihove dobre koncentracije, ovakve signale vrlo često ima smisla rekonstruisati algoritmima iz konteksta kompesivnog odabiranja, uz pretpostavku da su K -spars, odnosno, uz pretpostavku da se preostalih N − K odbiraka signala mogu zanemariti. Greška koja se pravi takvom pretpostavkom je neizbježna, a u realnim scenarijima - njen nivo je često više nego prihvatljiv u kontekstu primjene. Na primjer, ukoliko se radi rekonstrukcija audio signala nakon odbacivanja odbiraka teško oštećenih impulsnim šumom, distorzijama, ili jednostavno rekonstrukcija odbiraka koji su nedostajući zbog prirode procesa akvizicije signala, gubitaka tokom prenosa, oštećenja medijuma za skladištenje i slično, greška u rekonstrukciji će biti zanemarljivo mala. U sekciji 3.1.7 pokazaćemo da objektivne perceptualne mjere kvaliteta u eksperimentima sa većim brojem realnih signala pokazuju potpunu perceptualnu prihvatljivost rekonstruisanih signala. Drugim riječima, naši numerički testovi ali i testovi slušanja pokazuju da ljudsko uho ne može detektovati greške i napraviti razliku izmed¯u originalnih i rekonstruisanih signala. U ovom odjeljku, navedenu grešku ćemo kvantifikovati. Pored njene analitičke forme, numeričkim eksperimentima sa generisanim i realnim signalima pokazaćemo validnost ovog bitnog teorijskog rezultata. Izvedena greška kvantitativno odred¯uje performanse rekonstrukcionog procesa, i za posmatrane klase signala može predvidjeti očekivane ishode rekonstrucije. Teorema o grešci u rekonstrukciji signala koji nijesu rijetki Posmatra se signal koji nije čisto spars, i čije su najveće amplitude Al , l = 1, 2, ..., K . Pretpostavimo da je od ukupnog broja N dostupno samo NA odbiraka posmatranog signala, uz 1 ≪ NA ≪ N . Pretpostavimo i da je rekonstrukcija signala sprovedena kao da je on bio K -spars. Energija greške u K rekonstruisanih koeficijenta XCK − XCT 22 je direktno povezana sa energijom nerekonstruisanih komponenti XTCz − XC 22 ‖sljedećom relacijom ‖ ‖ ‖ XKC − XCT KN(AN(N− −N1A)) ‖XCTz − XC 2 = 2 2 2 , (3.57) ‖ ‖ gdje je XKC vektor dimenzija K × 1 koji sadrži rekonstruisane komponente, XTC je vektor ‖ ‖ ‖ ‖ dimenzija K × 1 koji zadrži prave vrijednosti koeficijenata na pozicijama rekonstruisanih koeficijenata, XC je vektor dimenzija N × 1 i on sadrži DCT koeficijente originalnog signala (sa svim dostupnim odbircima), dok je XCTz vektor dimenzija N × 1 koji sadrži K originalnih koeficijenata na rekonstruisanim (detektovanim) pozicijama, i nule na preostalih N − K pozicija. Dokaz teoreme Nerekonstruisana l-ta komponenta u signalu se manifestuje kao ulazni Gausov šum varijanse σc2sN = A2l NNA(2N(N−−N1A)) . (3.58) Sve nerekonstruisane komponente će predstavljati Gausov šum ukupne varijanse N σT2 = A2l NNA(2N(N−−N1A)) . (3.59) l=∑K+1 Nakon rekonstrukcije, ukupna energija šuma koji potiče od nerekonstruisanih komponenti (koji je prisutan u K rekonstruisanih komponenti) biće jednaka: XKC − XCT = EεR = K NA2 σT2 = KN(AN(N−−N1A)) 2 N 2 N 2 A2l . (3.60) ‖ ‖ l=∑K+1 Šum koji potiče od nerekonstruisanih komponenti se može direktno povezati sa energijom nerekonstruisanih komponenti N XCTz − XC 2 2 = A2l . (3.61) ‖ ‖ ‖ l=∑K+1 Ovo znači da je ukupna energija nerekonstruisanih komponenti jednaka XKC − XCT KN(AN(N−−N1A)) XCTz − XC 2 2 = , (3.62) čime smo završili dokaz.‖ ‖ ‖ ‖ ‖ ‖ Rezultat prethodne teoreme može se lako generalizovati na slučaj zašumljenih signala. Ukoliko posmatrani signal sadrži ulazni aditivni šum čije su vrijednosti ispod nivoa rekonstruisanih komponenti u transformacionom domenu, tada je posmatrana greška definisana relacijom: XKC − XCT KN(AN(N−−N1A)) XCTz − XC 2 2 K 2 = 2 + N (3.63) A σε2 N . Primjer 3.4. Posm‖atrajmo sig‖nal koji nije potpun‖o rijedak: ‖ ‖ ‖ N x(n) = akl Al cos π(2n + 1) kl + ε(n), (3.64) ∑l=1 (2N) pri čemu je Al = 1 za l ≤ S i Al =

0.5e−2l/(S+1) ta S + 1 ≤ l ≤ N, gdje su odgovarajući DCT indeksi 0 ≤ kl < N 1

slučajno raspored¯eni. Neka je samo NA = 192 od ukupno N = 256 odbiraka signala dostupno na slučajnim pozicijama. Odgovarajuće normalizacione DCT konstante su označene sa akl. Ovaj signal je aproksimativno S-spars, pri čemu je S = 10. Signal je kontaminiran bijeli Gausovim šumom, srednje vrijednosti 0 i standardne devijacije σε = 0.11/N. Signal je rekonstruisan korišćenjem OMP algoritma (Algoritam 1), sa različitim pretpostavljenim vrijednostima K koji definišu koliko je signal spars, 3 ≤ K ≤ 32. Na bazi 200 realziacija signala sa slučajnim DCT indeksima, pozicijama dostupnih odbiraka i slučajnim realizacijama šuma, numerički je izračunata srednja kvadratna greška (MSE), i upored¯ena je sa teorijskim izrazom. Greška (3.63) je izračunata sa odgovarajućom normalizacijom pretpostavljenom vrijednošću K. Greške su računate po pravilima: Enum = 10 log ‖XCK − XCT ‖22 1 K (3.65) ( ) za slučaj numeričke greške, i Eteor = 10 log (NNA(−N N−A1) XTCz − XC 2 + 1 2 N . (3.66) A σε2N za slučaj teorijske greške. Rezultati su predsta‖vljeni na sli‖ci 3.4. Crvene linije predstavljaju ‖) teorijski MSE, plave tačke označavaju dobijene numeričke podatke, čije usrednjavanje produkuje vrijednosti označene crnim kružićima. Numerički i teorijski rezultati pokazuju vrlo visok nivo poklapanja. Statistička i teorijska greška [dB] 0 Prosječna greška (numerički) -20 Greške u svim realizacijama Teorija -40 NA = 192, N = 256 -60 -80 5 10 15 20 25 30 Pretpostavljeni stepeni rijetkosti K Slika 3.4: Energija greške u rekonstrukciji zašumljenog signala koji nije rijedak u DCT domenu: računata numerički, i na osnovu prezentovane teorije. Greška je prikazana za različite pretpostavljene stepene rijetkosti K . 3.1.7 Primjena u obradi audio signala U kontekstu primjena, DCT je zastupljena u obradi različitih vrsta signala: radarskih, biomedicinskih (ECG, EEG etc.), audio signala, kao i digitalnih slika [28, 41–43]. Važno je istaknuti da se ova transformacija nalazi u jezgru čitave klase algoritama za kompresiju EKG signala [91] i digitalnih slika [28], ali i algoritama za različite vrste obrade audio signala (kompresiju, speech enhancement - poboljšavanje govornih signala, uklanjanje šuma, zatim inpainting - popunjavanje nedostajućih ili nedostupnih segmenata signala itd.) [8, 42, 43, 49, 60]. Navedene činjenice ukazuju na potencijal DCT domena za predstavljanje audio signala pomoću malog broja transformacionih koeficijenata (odnosno, na potencijal DCT domena za njihovu visokokoncentrisanu reprezentaciju). Imajući u vidu fundamentalne teorijske zahtjeve kompresivnog odabiranja, ovo indicira na mogućnost primjene razvijenih reoknstrukcionih algoritama na audio signale sa nedostajućim ili nedostupnim odbircima, što potvrd¯uju i noviji naučni radovi u ovoj oblasti, kao na primjer [8, 49]. Audio signali su nestacionarni, odnosno, imaju vremenski promjenljiv spektralni sadržaj. Generalno govoreći, iako audio signali nijesu rijetki u DCT domenu [42], njihov stepen rijetkosti se može značajno poboljšati ukoliko se posmatraju odgovarajući lokalizovani segmenti [8, 42, 43]. Ova vrsta signala se u tom slučaju može smatrati aproksimativno rijetkom u DCT domenu. U cilju poboljšanja stepena rijetkosti, odnosno koncentracije reprezentacije, u praksi se koriste prozorske forme (engl. windowed forms) DCT-a, kao na primjer tzv. MDCT [48]. Ova forma transformacije je široko zastupljena u procedurama za kompresiju inkorporiranim u modernim audio formatima [41]. Audio signali x(n) dužeg trajanja se analiziraju (odnosno obrad¯uju) pomoću DCT-a primjenjenog na uzastopne blokove uprozorenih segmenata xi(n) = w(n)x(n + iN/2), (3.67) gdje je w(n) prozorska funkcija unutar 0 ≤ n ≤ N − 1. Susjedni blokovi su preklopljeni tako da je druga polovina jednog bloka preklopljena sa prvom polovinom sljedećeg bloka. Važno je napomenuti da je ovakav blokovski pristup analizi i obradi audio signala od velike važnosti i za analizirane algoritme za rekonstrukciju rijetkih signala, budući da se segmentiranjem signala velikog trajanja smanjuju dimenzije parcijalne DCT matrice čija se inverzija mora vršiti tokom procesa rekonstrukcije. Blokovski pristup nije stran u primjenama – on je široko zastupljen i u analizi slika zasnovanoj na DCT-u. Ukoliko je forma prozorske funkcije takva da je zadovoljen uslov w(n) + w(n + N/2) = 1 unutar intervala preklapanja N/2 ≤ n ≤ N − 1, tada se rekonstrukcija čitavog signala jednostavno sprovodi na osnovu rekonstruisanih uprozorenih segmenata xˆi(n), u formi xˆ(n) = xˆi(n − iN/2). (3.68) ∑i Veliki broj široko zastupljenih prozorskih funkcija zadovoljava spomenuti uslov [28]. Takav je i često korišćeni Haningov prozor w(n) = 0.5(1 + cos(2Nπ(n + N2))) = sin2(Nπn). U daljem razmatranju, biće pretpostavljeno da je u svakom bloku dostupan redukovani skup nezašumljenih obiraka signala, na pozicijama n ∈ NA= {n1, n2, ..., nNA}. Različite okolnosti mogu biti uzrok nedostupnosti odbiraka audio signala. Ilustrativan primjer su smetnje u obliku klikova (engl. clicks and pops) koje su prisutne u starim audio snimcima, karakteristične po tome da teško oštećuju odred¯eni procenat odbiraka signala na pozicijama n ∈ NQ [42,43,49,54,67]. U našem razmatranju, skup NQ ćemo smatrati poznatim, budući da se za detekciju impulsnih smetnji može koristiti neki od široko prihvaćenih i efikasnih algoritama za ovu namjenu. Nakon uklanjanja impulsnih smetnji, odbirci na ovim, slučajno raspored¯enim pozicijama n ∈ NQ se mogu posmatrati kao nedostupni. Oni će biti rekonstruisani CS Algoritmom 10, odnosno, OMP pristupom (Algoritam 1). Ovakva forma primjene će biti ilustrovana primjerima 3.5 i 3.6. U kontekstu kompresivnog odabiranja, redukovani skup slučajno pozicioniranih odbiraka može da bude inicijalni rezultat akvizicije. Takva vrsta signala ilustrovana je primjerom 3.7. Bez obzira na to da li su teško oštećeni odbirci na pozicijama n ∈ NQ namjerno odbačeni, ili je akvizicija signala vršena na slučajnim pozicijama n ∈ NA, pristupima kompresivnog odabiranja oni se procesiraju na potpuno isti način. Primjer 3.5. Razmatra se testni signal iz fajla mtlb.mat, koji je standardno dostupan u softverskom paketu MATLAB○R. U pitanju je audio snimak niskog kvaliteta, u kojem ženski glas na engleskom jeziku izgovara riječ Matlab, pri čemu je odgovarajuća frekvencija odabiranja 7418 Hz. Vremenska forma signala je prikazana na slici Fig. 3.5 (a). Ukupno 15% slučajno raspored¯enih odbiraka signala je oštećeno impulsnim šumom, Fig. 3.5 (b). Pozicije impulsa šuma mogu biti jednostavno detektovane korišćenjem limitera. U slučaju složenijeg oblika impulsnog šuma, u kojem se pojavljuju impulsi u opsegu vrijednosti odbiraka signala, mogu se koristiti napredniji metodi detekcije, na primjer, algoritam predstavljen u [45]). Odbirci signala na pozicijama impulsa su proglašeni za nedostupne, i rekonstrukcija se sprovodi Originalni signal 5 (a) 0 -5 0 500 1000 1500 2000 2500 3000 3500 4000 4500 Zašumljeni signal 5 (b) 0 -5 0 500 1000 1500 2000 2500 3000 3500 4000 4500 Vremenski indeks n 0 (c) Numerički rezultat Ukupna greška [dB] -5 Teorijski rezultat -10 -15 -20 -25 Rekonstruisani signal 0 (d) 5 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150 Pretpostavljeni indeks rijetkosti K -5 0 0 500 1000 1500 2000 2500 3000 3500 4000 4500 Vremenski indeks n Slika 3.5: Rekonstrukcija audio signala mtlb.mat nakon uklanjanja impulsnog šuma: (a) originalni signal, (b) signal oštećen impulsnim smetnjama, (c) ukupna greška nakon rekonstrukcije sa različitim pretpostavljenim stepenima rijetkosti, (d) rekonstruisani signal na osnovu preostalih odbiraka unutar bloka. Za svaki blok, korišćen je Haningov prozor dužine N = 500, sa preklapanjem na polovini dužine prozorske funkcije. Rekonstrukcija je vršena korišćenjem prezentovanog algoritma iz MP klase, sa različitim pretpostavljenim stepenima rijetkosti K. Za rekonstruisani signal je numerički estimirana srednja kvadratna greška, i izračunata odgovarajuća teorijska greška (3.66). Na slici 3.5 (c) estimirana greška je predstavljena simbolom „*”, dok je teorijska greška (3.66) predstavljena punom linijom. Može se uočiti veliko poklapanje numeričkog i teorijskog rezultata. Krajnji signal formiran na osnovu rekonstruisanih segmenata je predstavljen na slici 3.5 (d), za slučaj kada je pretpostavljeni stepen rijetkosti K = 150. Kvadratni korijen srednje kvadratne greške, u literaturi poznat i kao RMSE (engl. root-mean-squared error), računat za signale predstavljene na slikama 3.5 (a) i 3.5 (d) iznosi 0.0738. Primjer 3.6. U ovom primjeru se razmatra snimljeni audio signal u kojem je riječ „Aleluja” izgovorena na našem jeziku. Signal je snimljen korišćenjem MacBook računara sa softverskim paketom MATLAB○R. Frekvencija odabiranja je 11025 Hz. U ovom slučaju je 20% of slučajno pozicioniranih odbiraka signala oštećeno jakim impulsnim šumom. Ovi odbirci su izostavljeni iz signala, i rekonstrukcija je sprovedena samo na osnovu preostalih odbiraka. Rezultati rekonstrukcije su prezentovani na slici 3.6, gdje je, pored elemenata iz prethodnog primjera, dodatno uvećano prikazan i segment polaznog signala, u cilju bolje vizuelizacije rezultata. Primjer 3.7. Razmatra se ugrad¯eni MATLAB○R signal, train.mat, prikazan na slici 3.7 (a). U pitanju je audio zapis zvižduka voza, odabran sa frekvencijom 8192 Hz. Pretpostavljeno je da je signal kompresivno odabran i da je samo 50% odbiraka dostupno na slučajnim pozicijama, što je i ilustrovano na zumiranim slikama 3.7 (b) i 3.7 (c). I u ovom slučaju je signal rekonstruisan uz različite stepene rijetkosti, dok su odgovarajuće greške u rekonstrukciji prikazane na slici3.7 (e). Rekonstruisani signal za K = 50 je prikazan na slici 3.7 (d). 3.1.8 Eksperimentalna evaluacija u kontekstu obrade audio signala Teoriju prezentovanu u ovoj sekciji ćemo eksperimentalno evaluirati na primjeru tri seta realnih audio signala iz [49]. Svaki set se sastoji od 10 signala pojedinačnog trajanja 5 s. Signali su dobijeni tokom kampanje „2008 Signal Separation Evaluation Campaign" i dostupni su online [65, 66]. Bazu čine sljedeća tri skupa podataka • Muzika @ 16kHz: set od 10 muzičkih signala odabranih na 16 kHz, • Govor @ 16kHz: set od 10 muških i ženskih govornih signala odabranih na 16 kHz, • Govor @ 8kHz: set od 10 govornih signala odabranih na 8 kHz, koji reprezentuju govor sa telefonskim kvalitetom. Ovi signali su dobijeni pododabiranjem signala iz drugog seta. Signali su pažljivo odabrani tako da sadrže veliki broj raznovrsnih zvučnih izvora i zvučnih kombinacija: muški i ženski govor različitih govornika, glas koji pjeva, zvuk različitih muzičkih instrumenata itd. [49]. U našoj eksperimentalnoj evaluaciji, smetnje su simulirane kroz dva scenarija. U prvom slučaju, pretpostavljeno je da su audio signali oštećeni na slučajnim pozicijama. U drugom slučaju, oštećeni odbirci su grupisani u slučajno pozicionirane blokove različitih dužina, simulirajući oštećenja kao što su klikovi (clicks), gubici paketa tokom prenosa putem komunikacionog kanala, zatim posljedice oštećenja prenosnih medijuma itd. [54]. U oba razmatrana slučaja, signali su rekonstruisani, i tačnost predloženog teorijskog izraza (3.66) za MSE je numerički testirana. Prezentovani CS algoritam je upored¯en sa drugim tehnikama za rekonstrukciju i restauraciju audio signala (engl. audio restoration techniques): median i niskopropusnim filtriranjem, zatim sa dvija često korišćena algoritma zasnovana na modelovanju audio (a) Signal 0.2 0 -0.2 -0.4 0 2000 4000 6000 8000 10000 12000 14000 16000 (b) Signal sa šumom 0.2 0 -0.2 -0.4 2000 4000 12000 14000 16000 6000 8000 10000 Rekonstrusian signal Uvećan dio slike (b) (c) Vremenski indeks n 0.2 0 -0.2 -0.4 2000 2100 2200 2300 2400 2500 2600 2700 2800 2900 3000 (d) Vremenski indeks n 0.2 0 -0.2 -0.4 -5 0 2000 4000 6000 8000 10000 12000 14000 16000 Vremenski indeks n (e) Ukupna greška u signalu [dB] -10 -15 -20 -25 -30 -35 Numerički rezultat Teorijski rezultat 0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150 Pretpostavljeni stepen rijetkosti K Slika 3.6: Rekonstrukcija snimljenog audio signala nakon uklanjanja impulsnog šuma: (a) originalni signal, (b) signal oštećen impulsnim smetnjama, (c) uvećano prikazani dio oštećenog signala od 1000 odbiraka, (d) rekonstruisani signal, (e) ukupna greška nakon rekonstrukcije sa različitim pretpostavljenim stepenima rijetkosti. (a) 1 Signal 0 -1 2000 4000 6000 8000 10000 12000 (b) Signal (uvećan) 1 0 -1 2400 2410 2420 2430 2440 2450 2460 2470 2480 2490 2500 Rekonstruisan signal Mjerenja (uvećano) (c) 1 0 -1 2400 2410 2420 2430 2440 2450 2460 n 2470 2480 2490 2500 (d) Vremenski indeks 1 0 -1 0 2000 4000 6000 8000 10000 12000 Vremenski indeks n (e) 0 Ukupna greška u signalu [dB] Numerički rezultat -5 Teorijski rezultat -10 -15 -20 -25 0 10 20 30 40 50 Pretpostavljeni stepen rijetkosti K Slika 3.7: Rekonstrukcija kompresivno odabranog audio signala sa 50% dostupnih odbiraka na slučajnim pozicijama: (a) originalni signal, (b) uvećani dio signala: crveno - nedostajući odbirci, plavo - dostupni odbirci, (c) uvećani dio signala sa krstićima na pozicijama nedostajućih odbiraka, (d) rekonstruisani signal, (e) ukupna energija nakon rekonstrukcije računata za različite stepene rijetkosti. signala, kao i sa algoritmom iz CS konteksta zasnovanom na optimizaciji ℓ1-norme. U eksperimentu su razmatrani median filtri dužine 3 i 5, i niskopropusni filtri Batervortovog (engl. Butterworth) tipa sa dvije presječne frekvencije, postavljene u skladu sa spektralnim karakteristikama razmatranih signala. Što se tiče tehnika za rekonstrukciju i restauraciju audio signala, razmatrane su dvije reprezentativne procedure iz konteksta interpolacije zasnovane na autoregresivnom (AR) modelovanju [67], [76], [87]. Prvi razmatrani metod je interpolator zasnovan na AR modelovanju u smislu najmanjih kvadrata (LSAR, engl. least-squares AR interpolator), originalno uveden za popravljanje ozbiljnih grešaka koje nastaju u CD sistemima [67], [76]. Korišćena je javno dostupna implementacija u sklopu online dostupnog softvera Audio Inpainting Toolbox [49]. U razmatranim eksperimentima, dužina AR modela je postavljena na 30, dok se interpolacija sprovodi u blokovima dužine 500 odbiraka, kako je predloženo u originalnom pristupu. Drugi razmatrani algoritam je iz klase AR + reprezentacija bazne funkcije [67], [87]. U našoj komparativnoj analizi korišćena je implementacija sa sinusoidama u ulozi baznih funkcija (LSAR+SIN), [87], koja je nedavno testirana od strane eminentnih istraživača iz oblasti [50, 52]. Algoritam je korišćen sa podrazumijevanim podešavanjima, a koja uključuju: AR model dužine P = 31, broj baznih funkcija Q = 31, i dužina blokova 1024 odbiraka, što je u skladu sa eksperimentalnim rezultatima prezentovanim u [50] i [87]. U svim razmatranim tehnikama, performanse rekonstrukcije jako zavise od uspješnosti detekcije pozicija oštećenih odbiraka. Kako bi obezbijedili pored¯enje pod istim uslovima, u svim algoritmima su umjesto rezultata procedura za detekciju impulsnih smetnji prosled¯ivane tačne pozicije impulsa. Na ovaj način, obezbijed¯eno je isključivo pored¯enje performansi rekonstrukcije. Ulogu reprezentativne tehnike iz skupa CS algoritama zasnovanih na minimizaciji ℓ1-norme, imao je LASSO-ISTA (engl. Iterative Shrinkage Thresholding Algorithm for LASSO problem), [28], [37]. Korišćena je regularizaciona konstanta λ = 0.01. U drugom scenariju, pored prethodno pobrojanih standardih tehnika, u komparativnu analizu su uključena su i dva nedavno publikovana pristupa visoko adaptirana za uklanjanje i rekonstrukciju klikova u audio signalima, [50, 51]. U ovim algoritmima, rekonstrukcija se obavlja nakon detekcije koja je sastavni i nerazdvojni dio pristupa. Za veliki broj impulsa/blokova u oba razmatrana scenarija, zadovoljavajuću detekciju nije bilo moguće postići. Implementacije algoritama su korišćene sa njihovim podrazumijevanim podešavanjima. Slučajno pozicionirane impulsne smetnje U prvom eksperimentu, signali iz sva tri seta signala su oštećeni jakim impulsnim šumom u p% slučajno pozicioniranih odbiraka, kao što je ilustrovano u primjeru 3.5 i na slici 3.5. Posmatrani signali, u blokovima od N = 500 odbiraka i pomnoženi Haninogovom prozorskom funkcijom, dobro su koncentrisani u DCT domenu. Med¯utim, oni su samo aproksimativno rijetki u razmatranom domenu. Pozicije jakih impulsa se mogu jednostavno detektovati korišćenjem limitera. Naprednije tehnike detekcije, čije izučavanje prevazilazi okvire ove teze, opisani su u [45,50,51,54,67]. Bilo koja od ovih tehnika može biti korišćena u postupku detekcije koji prethodi rekonstrukciji. U kontekstu kompresivnog odabiranja, detektovani oštećeni odbirci na pozicijama n ∈ NQ se posmatraju kao nedostupna mjerenja. Rekonstrukcija se sprovodi na bazi preostalih odbiraka u blokovima, koji se posmatraju kao dostupna CS mjerenja na pozicijama n ∈ NA. Blokovi su preklopljeni na polovinama dužina prozorskih funkcija. Rekonstrukcija se sprovodi prezentovanim CS algoritmom, sa različitim pretpostavljenim stepenima rijetkosti K. Teorijska greška. Na početku, izvršićemo evaluaciju predloženog izraza za MSE. Razmatra se slučaj sa p = 30% oštećenih odbiraka. Za i-ti blok, numerička greška se računa po formuli: En(iu)m = 10 log ‖XKC − XTC ‖22 1 K , (3.69) ( ) dok je teorijska greška definisana izrazom: Et(ei)or=10log N−NA XCTz −XC 2 NA(N−1) 2 . (3.70) Kvadratne greške su usrednjene po blokovima i‖upored¯ene‖na slici 3.8, kao funkcije od (‖) pretpostavljenog stepena rijetkosti K , za svaki iz svakog razmatranog seta. Punim linijama su prezentovane teorijske MSE vrijednosti, dok tačke označavaju rezultate dobijene numeričkim putem. Može se uočiti da postoji visok stepen njihovog poklapanja, potvrd¯ujući validnost predloženog izraza za MSE. Muzika @ 16 kHz -5 Ukupna greška [dB] -10 -15 -20 -25 -30 10 20 30 40 50 Pretp. stepen rijetkosti K Govor @ 8 kHz Govor @ 16 kHz Ukupna greška [dB] -4 -6 -8 -10 -12 -14 -16 10 20 30 40 50 Pretp. stepen rijetkosti K -5 Ukupna greška [dB] -10 -15 -20 10 20 30 40 50 Pretp. stepen rijetkosti K Slika 3.8: Energije grešaka u rekonstrukciji zašumljenih audio signala koji nijesu rijetki - računate numerički (crne tačke) i u skladu sa prezentovanim teorijskim izrazom (pune linije), za slučajno pozicionirane impulsne smetnje. Greške su prikazane sa različitim pretpostavljenim stepenima rijetkosti K . Prva slika prikazuje rezultat za 10 muzičkih signala odabranih na 16 kHz, druga slika prikazuje greške za 10 govornih signala odabranih na 8 kHz, dok treća slika prikazuje odgovarajuće greške za 10 različitih govornih signala sa frekvencijom odabiranja od 16 kHz. Pored¯enje sa stanovišta srednje kvadratne greške (MSE). Rezultate rekonstrukcije korišćenjem razmatranog CS algoritma sa pretpostavljenim stepenom rijetkosti K = 80 ćemo uporediti sa rezultatima dobijenim standardnim tehnikama zasnovanim na filtiranju, algoritmima za rekonstrukciju i restauraciju audio signala zasnovanim na modelovanju, kao i sa CS algoritmom zasnovanim na minimizaciji ℓ1-norme [34, 35, 37]. U ovom dijelu eksperimentalne analize, p = 40% obiraka signala je zahvaćeno impulsnim smetnjama. Rezultati pored¯enja sa stanovišta srednje kvadratne greške - MSE su predstavljeni u tabeli 3.1. Prezentovani CS algoritam za rekonstrukciju je prvo upored¯en sa klasičnim metodom za uklanjanje impulsnih smetnji zasnovanim na median filtru. Razmatrani su filtri dužine 3 i 5. Za sva tri seta podataka, median filtar dužine 3 je smanjio MSE za 17.26 dB u prosjeku, a slični rezultati su dobijeni i korišćenjem median filtra dužine 5 (vrste označene sa „med3” i „med5” u tabeli 3.1). Razmatrani algoritam je zatim upored¯en i sa niskopropusnim filtrom Batervortovog tipa, kao reprezentativnom klasičnom tehnikom filtriranja. Za setove signala „Muzika @ 16kHz” i „Govor @ 16kHz”, razmatrani su filtri sa dvije presječne učestanosti, koje su odred¯ene na osnovu analize spektralnog sadržaja ovih signala. Prvi filtar (vrsta označena sa „LPF1”) je dizajniran sa normalizovanom presječnom frekvencijom od 0.375, dok drugi filtrar (vrsta „LPF2”) ima normalizovanu presječnu frekvenciju od 0.625. Za treći set signala, „Govor @ 8kHz” odgovarajuće normalizovane frekvencije su 0.5, za prvi i 0.7 za drugi dizajnirani filtar, takod¯e dobijene empirijski. Oba filtra su pokazala slične performanse, sa MSE padom od 16.25dB u prosjeku (u pored¯enju sa MSE-om zašumljenog signala). Rezultati koje su produkovali LSAR i LSAR+SIN algoritmi bili su značajno bolji u pored¯enju sa rezultatima dobijenim klasičnim tehnikama zasnovanim na filtriranju. Prosječno MSE poboljšanje je iznosilo 25.42 dB za LSAR tehniku, odnosno 26.55 dB za tehniku LSAR+SIN. Bitno je napomenuti da je u razmatranom scenariju implementacija LSAR algoritma [49] imala odred¯ene ispade koji su produkovali pikove velikih vrijednosti, za koje se smatra da su posljedica nesposobnosti algoritma da podesi parametre AR modela usljed velikog broja nedostajućih (oštećenih) odbiraka. Ova naša hipoteza je potvrd¯ena činjenicom da do navedenih ispada algoritma nije dolazilo u testovima sa manjim brojem oštećenih/nedostajućih odbiraka, kada su MSE rezultati bili približno jednaki kao u slučaju LSAR+SIN algoritma. Rezultati dobijeni prezentovanom CS rekonstrukcionom tehnikom su bili u prosjeku za 4 dB bolji od LSAR+SIN rezultata, i za 5 dB bolji od rezultata LSAR pristupa. Zanimljivo je uočiti da je poboljšanje bilo najmanje u slučaju skupa pododabranih signala „Govor @ 8kHz”, i ono je iznosilo 1.69 dB. Razlog bi mogao biti redukovani stepen rijetkosti ovih signala u DCT domenu, nastao kao posljedica njihovog pododabiranja. CS algoritam za rekonstrukciju primjenom minimizacije ℓ1-norme (LASSO-ISTA) pokazao je gore rezultate od onih dobijenih prezentovanim CS algoritmom. Oni su u prosjeku bili za 0.5dB gori od odgovarajućih LSAR rezultata. Pored¯enje sa stanovišta objektivnih mjera perceptualnog kvaliteta. Audio signali dobijeni prethodno opisanim tehnikama, čije su MSE vrijednosti prezentovane u tabeli 3.1, evaluirani Tabela 3.1: Srednja kvadratna greška (MSE) dobijena usrednjavanjem rezultata za sve signale iz odgovarajućih setova, u eksperimentalnom scenariju sa slučajno pozicioniranim impulsnim smetnjama Muzika @ 16 kHz Govor @ 8 kHz Govor @ 16 kHz Zašumljeni signali Med3 Med5 LPF1 LPF2 LSAR LSAR+SIN LASSO MP

-12.40dB -25.85dB -25.60dB -27 .42dB -44.04dB -44.16dB -27 .41dB -43.52dB -44.20dB 1
-26 .92dB -42.42dB -43.24dB -26 .89dB -42.55B -43.37dB -36 .22dB -52.58dB -51.31dB

-37.48dB -53.59dB -52.44dB -40 .69dB -49.80dB -51.15dB -41 .33dB -55.28dB -59.02dB 1

su i sa stanovišta mjera perceptualnog kvaliteta. U cilju predikcije kvaliteta percepcije (od strane ljudskih slušalaca) audio signala iz seta „Muzika @ 16kHz", koriščen je široko prihvaćeni PEMO-Q method [88]. U našim eksperimentima smo koristili implementaciju ovog algoritma dostupnu online, u sklopu softverskih dodataka radova [89], [90]. Mapiranje izlaza algoritma, odnosno odgovarajuće mjera perceptualnog kvaliteta (PSMt), na standardno prihvaćenu skalu poznatu kao ODG (engl. objective difference grade) izvršeno je pomoću procedure koja je opisana u [88]. Navedena skala obuhvata opseg ocjena od −4 (veoma iritirajuće pogoršanje) do 0 (pogoršanje koje nije moguće percipirati). Odgovarajući PEMO-Q ODG su izračunati za oštećene signale, i za sve rekonstruisane signale koji su razmatrani u prethodnoj sekciji za set podataka „Muzika @ 16kHz". Kao i u slučaju srednje kvadratne greške, pored¯enje se u svim slučajevima vrši sa originalnim, nezašumljenim signalima. Rezultati pored¯enja, prikazani na slici 3.9 (prvi grafik), indiciraju da je prezentovana CS bila dominantna u odnosu na ostale metode, imajući prosječnu ocjenu od -1.32, u pored¯enju sa LSAR+SIN ocjenom od -1.81, i LASSO-ISTA ocjenom od -1.85. Med¯utim, potrebno je i istaći činjenicu da u slučaju signala br. 5 i signala br. 7, prezentovani metod je imao nešto gore rezultate od LSAR-SIN tehnike, a u slučaju signala br. 8 i signala br. 10, rezultati su malo gori od onih koje je dao LASSO-ISTA algoritam. Za dva seta govornih signala, pored¯enje sa stanovišta perceptualnog kvaliteta je obavljeno korišćenjem PESQ metrike [62]. Kao jedna od standarnih mjera kvaliteta, PESQ se koristio u evaluaciji kvaliteta govornih signala nakon primjene CS algoritama u kontekstu poboljšanja govora (speech enhancement), [8], [9], gdje je ulogu domena rijetkosti takod¯e igrala DCT primijenjena na odgovarajuće uprozorene blokove (frejmove) audio signala [8]. Na odgovarajućoj PESQ-MOS skali ocjene idu od 1 do 5, gdje se sa 5 ocjenjuje najbolji rezultat. Rezultati evaluacije zasnovane na PESQ algoritmu, dobijeni za setove audio signala „Govor @ 8kHz" and „Govor @ 16kHz" prikazani su na slici 3.10. Odgovarajuće PESQ ocjene su izračunate kako za oštećene signale, tako i za signale rekonstruisane svim razmatranim metodama. Za slučaj signala iz seta „Govor @ 8kHz", the prosječna PESQ ocjena za signale rekonstruisane prezentovanim CS metodom iznosi 2.89. U prosjeku, ona je veća od LSAR+SIN prosječne ocjene od 2.59, LSAR ocjene od 2.45, kao i od prosječne ocjene signala rekonstruisanih korišćenjem LASSO-ISTA algoritma, koja iznosi 2.1. Svi ovi algoritmi uzrokovali su značajno poboljšanje perceptualnog kvaliteta u pored¯enju sa oštećenim (zašumljenim) signalima. U slučaju seta signala „Govor @ 16kHz", poboljšanje u rekonstrukciji je još očiglednije. U ovom slučaju, prosječna ocjena prezentovanog CS algoritma je bila 3.37. Ostali razmatrani algoritmi pokazali su sljedeće rezultate: LSAR+SIN je imao ocjenu 2.87, zatim slijedi LSAR sa ocjenom 2.44, dok je rezultat LASSO-ISTA rekonstrukcje ocijenjen sa 2.27. Ocjene preostalih razmatranih metoda su niže. U razmatranom slučaju, poboljšanje PESQ ocjene u odnosu na zašumljene signale je veće, nego u slučaju seta signala „Govor @ 8kHz". N M3 M5 B1 B2 ℓ1 L LSIN MP ... ODG - PEMO-Q 0 -1 -2 -3 Muzika @ 16 kHz: šum na slučajnim pozicijama ODG - PEMO-Q 0 -1 -2 -3 1 2 3 Muzika @ 16 kHz: šum lokalizovan u blokovima 4 5 6 7 8 9 10 1 2 3 4 5 6 7 8 Redni broj signala 9 10 Slika 3.9: Perceptualna evaluacija signala iz seta „Muzika @ 16kHz" korišćenjem PEMO-Q ODG metrike. Gornja slika prikazuje PEMO-Q ODG ocjene za zašumljene i rekonstruisane signale u scenariju sa slučajno pozicioniranim impulsnim smetnjama, koji odgovaraju MSE rezultatima prezentovanim u tabeli 3.1. Donja slika prikazuje rezultate u slučaju impulsnih smetnji lokalizovanih u vremenskim blokovima, koji odgovaraju MSE vrijednostima iz tabele 3.2. Oznake za primijenjene tehnike: N-zašumljeni signali, M3 i M5 - median filtri dužine 3 i 5, B1 i B2 - razmatrani Batervortovi niskopropusni filtri, ℓ1 - LASSO-ISTA, L - LSAR, LSIN - LSAR+SIN, MP - predloženi MP pristup. Smetnje lokalizovane u blokovima u vremenskom domenu U ovom eksperimentu, razmatraju se impulsne smetnje locirane u blokovima uzastopnih odbiraka. Svi signali iz tri razmatrana seta oštećeni su šumom lociranim u slučajno ... N M3 M5 B1 B2 ℓ1 L LSIN MP Govor @ 8 kHz 3 PESQ 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 Govor @ 16 kHz 3 PESQ 2 1 0 1 2 3 4 ... Redni broj signala 5 6 7 8 9 10 Slika 3.10: Perceptualna evaluacija govornih signala korišćenjem PESQ metrike u scenariju sa slučajno pozicioniranim impulsnim smetnjama. Rezultati su u vezi sa MSE vrijednostima iz tabele 3.1. Oznake za primijenjene tehnike: N-zašumljeni signali, M3 i M5 - median filtri dužine 3 i 5, B1 i B2 - razmatrani Batervortovi niskopropusni filtri, ℓ1 - LASSO-ISTA, L - LSAR, LSIN - LSAR+SIN, MP - predloženi MP pristup. pozicioniranim blokovima, varijabilne dužine izmed¯u 1 i 5, tako da je, u prosjeku, p% odbiraka zahvaćeno šumom. Ovakva vrsta impulsnih smetnji se razmatra u cilju ispitivanja performansi procesa rekonstrukcije, kao i tačnosti teorijski izvedene greške (3.63) u slučaju postojanja vremenski lokalizovanih distorzija u signalu (klikovi u zvučnim zapisima, ogrebotine na kompakt diskovima, zatim odsijecanje (engl. clipping) itd.), [49], [51, 54]. Rekonstrukcija se i u ovom slučaju sprovodi korišćenjem polu-preklopljenih frejmova signala dužine N = 500, obuhvaćenih Haningovom prozorskom funkcijom. Oštećeni odbrici su detektovani limiterom i tretirani kao nedostupni. Teorijska greška. Numerički dobijene srednje kvadratne greške - MSE (3.69) se i u ovom slučaju u velikoj mjeri poklapaju sa teorijskim rezultatom (3.70), kao što je pokazano na slici 3.11. Rezultati su predstavljeni za sve signale iz sva tri razmatrana seta, za slučaj kada je, u prosjeku, procenat oštećenih odbiraka p = 10%. Pune linije reprezentuju krive teorijske greške, dok su crnim tačkama predstavljeni numerički rezultati. Tačnost predložene teorijskog izraza za MSE je očekivana dok god su ispunjeni uslovi za CS rekontrukciju, čak i u slučajevima kada se oštećenja pojavljuju u blokovima sukcesivnih odbiraka (koji se posmatraju kao nedostupni). Pored¯enje sa stanovišta srednje kvadratne greške (MSE). Rezultati rekonstrukcije ostvareni primjenom prezentovanog CS metoda upored¯eni su sa rezultatima dobijenim primjenom median filtara, niskopropusnih filtara Batervortovog tipa (sa istim parametrima Tabela 3.2: Srednja kvadratna greška (MSE) dobijena usrednjavanjem rezultata za sve signale iz odgovarajućih setova, za slučaj impulsnih smetnji lokalizovanih u blokovima u vremenskom domenu. Muzika @ 16 kHz Govor @ 8 kHz Govor @ 16 kHz Zašumljeni signali Med3 Med5 LPF1 LPF2 FTR BDR LSAR LSAR+SIN LASSO MP

-11.33dB -23.55dB -24.53dB -26 **.15dB -42.70dB -42.83dB** -25 **.96dB -42.25dB -42.68dB** 1
-25 **.72dB -41.62dB -42.21dB** -25 **.77dB -41.72dB -42.31dB** -26 **.24dB -42.92dB -42.91dB**
-26 **.66dB -42.93dB -42.95dB** -32 **.52dB -45.48dB -46.58dB**

-34.17dB -48.61dB -50.20dB -37 **.64dB -48.41dB -49.65dB** -37 **.80dB -50.58dB -53.17dB** 1

kao u prvom eksperimentalnom scenariju), zatim sa LSAR i LSAR+SIN rekonstrukcionim algoritmima, kao i sa rezultatima LASSO-ISTA pristupa. Pored¯enje je obavljeno sa stanovišta srednje kvadratne greške (MSE). Rezultati su prezentovani u tabeli 3.2, za slučaj kada je, u prosjeku, procenat oštećenih odbiraka p = 50%. Pored toga, u ovom eksperimentalnom scenariju pored¯enje je obavljeno i sa nedavno publikovanim algoritmom za uklanjanje impulsnih smetnji i klikova (u pitanju je rekonstrukcija zasnovana na AR modelovanju), [50, 51]. Detekcija i rekonstrukcija zasnovana na AR modelu su sprovedeni korišćenjem algoritama autora, sa podrazumijevanim podešavanjima i parametrima u programima (tzv. semi-causal with decision-feedback scheme), [51]. Vrsta FTR u tabeli 3.2 sadrži rezultate za forward-time pristup, dok vrsta BDR sadrži rezultate sa tzv. bidirekcionim pristupom, originalno predstavljenim u [50]. Ovi algoritmi su visoko adaptirani za primjenu u uklanjanju klikova u audio signalima. Detekcija oštećenih odbiraka je obavljena primjenom ugrad¯enih detekcionih procedura. Veliki broj oštećenih odbiraka u razmatranom eksperimentu je značajno redukovao performanse rekonstrukcije navedenim pristupima. Kao i u prethodnom eksperimentu, rekonstrukcione tehnike LSAR i LSAR+SIN su pokazale u prosjeku bolje rezultate od ostalih klasičnih pristupa. Prosječno poboljšanje sa stanovišta MSE, korišćenjem median filtra, iznosi 17.5 dB. Sličan rezultat je dobijen za obije razmatrane dužine filtra. Niskopropusno filtriranje dovodi do prosječnog poboljšanja od 16.7 dB, za oba razmatrana niskopropusna filtra. Poboljšanje u slučaju FTR i BDR algoritama je bilo značajno gore u razmatranom eksperimentalnom kontekstu sa 50% nedostajućih odbiraka, nego što je to slučaj kada je ovaj procenat niži (e.g. na primjer, za p = 10% or 15%). Poboljšanje je iznosilo samo 17.6 dB. CS rekonstrukciona tehnika zasnovana na minimizaciji $\ell 1$ norme (LASSO-ISTA) dovela je do MSE poboljšanja od 25.43 dB u prosjeku, je MSE poboljšanje primjenom LSAR i LSAR-SIN tehnika iznosilo 21.72 dB i 24.52 dB, respektivno. Zanimljivo je uočiti da je LASSO-ISTA algoritam u prosjeku pokazao bolji rezultat u slučaju seta signala „Muzika @ 16 kHz" u odnosu na LSAR-SIN pristup. U prosjeku, prezentovani CS algoritam je u prosjeku produkovao rezultat za 1.95 dB bolji od rezultata LASSO-ISTA rekonstrukcije. Najznačajnija razlika u rezultatima je uočljiva za set signala „Govor @ 16 kHz". Pored¯enje sa stanovišta objektivnih mjera perceptualnog kvaliteta. Za evaluaciju perceptualnog kvaliteta, i u ovom eksperimentalnom kontekstu su korišćenje PEMO-Q i PESQ metrike. Rezultati za set signala „Muzika @ 16" kHz su prikazani na slici 3.9 (druga podslika). Rezultati evaluacije perceptivnog kvaliteta za setove signala „Govor @ 8 kHz" i „Govor @ 16 kHz" su prezentovani na slici 3.12. Na osnovu PEMO-Q ocjena na slici 3.9 (druga podslika) može se zaključiti da je prezentovana CS rekonstrukciona tehnika, sa prosječnom ocjenom -2.12, bolja od LASSO-ISTA algoritma (-2.48), kao i od LSAR+SIN (-2.95) i LSAR (-3.13) algoritama. Med¯utim, u slučaju malog broja signala, LASSO-ISTA algoritam je pokazao bolji rezultat od prezentovane CS tehnike. Kao što je to već nagoviješteno MSE rezultatima u tabeli 3.2, LASSO-ISTA pristup je bio bolji od LSAR i LSAR+SIN pristupa u ovom eksperimentu. PESQ ocjene, prikazane na slici 3.12 odgovaraju rezultatima prezentovanim u tabeli 3.2. U slučaju seta signala „Govor @ 8 kHz", prosječna PESQ ocjena kvaliteta signala dobijenih prezentovanim CS pristupom je 2.44, i ona je bolja od odgovarajućih ocjena dobijenih u slučaju drugih algoritama:

LSAR+SIN (2.15), LASSO-ISTA (1.96) i LSAR (1.83).	1

Za set signala „Govor @ 16 kHz" dobijene prosječne ocjene su: prezentovani CS pristup

(2.93), LSAR+SIN (2.53), LASSO-ISTA (2.13), i LSAR(1.68).	1

Kao što je primijećeno u prethodnom scenariju, poboljšanje perceptualnog kvaliteta je veće za slučaj „Govor @ 16kHz". Muzika @ 16 kHz -5 Ukupna greška [dB] -10 -15 -20 -25 -30 10 20 30 40 50 Pretp. stepen rijetkosti K Govor @ 8 kHz -4 Ukupna greška [dB] -6 -8 -10 -12 -14 -16 10 20 30 40 50 Pretp. stepen rijetkosti K Govor @ 16 kHz -5 Ukupna greška [dB] -10 -15 -20 10 20 30 40 50 Pretp. stepen rijetkosti K Slika 3.11: Energija greške u rekonstrukciji audio signala iz setova „Muzika @ 16 kHz', „Govor @ 8 kHz" „Govor @ 16 kHz": računata numerički (crne tačke) i u skladu za prezentovanom teorijom (pune linije), u slučaju kada se impulsni šum pojavljuje u vremenskim blokovima varijabilne dužine. Greške su prikazane za različite pretpostavljene stepene rijetkosti. ... N M3 M5 B1 B2 ℓ1 L LSIN MP Govor @ 8 kHz 2 PESQ 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 Govor @ 16 kHz 3 PESQ 2 1 0 1 2 3 4 ... Redni broj signala 5 6 7 8 9 10 Slika 3.12: Perceptualna evaluacija govornih signala korišćenjem PESQ metrike u eksperimentalnom scenariju sa impulsnim smetnjama lokalizovanim u vremenskim blokovima. Rezultati su u vezi sa MSE vrijednostima iz tabele 3.2. Oznake za primijenjene tehnike: N-zašumljeni signali, M3 i M5 - median filtri dužine 3 i 5, B1 i B2 - razmatrani Batervortovi niskopropusni filtri, ℓ1 - LASSO-ISTA, L - LSAR, LSIN - LSAR+SIN, MP - predloženi MP pristup. 3.2 Dvodimenziona diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Veće je ustanovljena činjenica da je DCT važna u brojnim kontekstima primjene [21–23, 28, 29, 31, 41, 42]. Zahvaljujući svojstvu da digitalne slike visoko koncentriše u manjem broju transformacionih koeficijeanta, dvodimenziona DCT (2D-DCT) je jedna od najkorišćenijih transformacija u kompresionim algoritmima za digitalne slike [28]. Štaviše, pokazalo se da je ova transformacija pogodna i za rekonstrukciju digitalnih slika sa nedostajućim piskelima i/ili pikselima koji su oštećeni šumom. Pretpostavka o rijetkosti reprezentacije slike u domenu dvodimenzione DCT pokazala se opravdanom, [21–23]. Mjerenje koncentracije 2D-DCT koeficijenata pomoću ℓ1-norme i variranje vrijednosti nedostajućih odbiraka u cilju dobijanja rješenja sa najmanjim stepenom rijetkosti dovelo je do razvoja veoma naprednih tehnika za kompresivno odabiranje [23,45]. U slučaju OMP pristupa, jasno je da se rekonstrukcija se može postići ukoliko su poznate pozicije komponenti signala, odnosno slike [14, 33, 36, 37]. U tom slučaju, prave vrijednosti koeficijenata mogu se izračunati ukoliko se identifikovane pozicije komponenti kombinuju sa 2D-DCT mjernom matricom [27, 28]. Važno je, med¯utim, naglasiti da su u suštini realne digitalne slike najčešće samo aproksimativno rijetke u 2D-DCT domenu [21–23, 28]. To znači da, pored koeficijenata sa značajnim vrijednostima koji nose navjeći dio energije signala, mogu postojati i koeficijenti sa malim vrijednostima, umjesto koeficijenata koji bi bili jednaki nuli. Budući da algoritmi za rekonstrukciju rijetkih signala podrazumijevaju odred¯eni stepen rijetkosti, navedene komponente će ostati nerekonstruisane [28, 30]. To dovodi do neizbježnih grešaka u rekosntrukciji. Već je ustanovljeno da se redukcija broja dostupnih odbiraka manifestuje kao šum u transformacionom domenu [7, 27]. Tokom rekonstrukcije, taj šum se u potpunosti redukuje u slučaju kada je pretpostavka o rijestkosti striktno zadovoljena. Med¯utim, koeficijenti sa malim vrijednostima u signalima koji nijesu potpuno rijetki ostaju nerekonstruisani, pa u rekonstruisanom signalu/slici, njihov doprinos u vidu šuma i dalje ostaje. Ako se signal koji nije rijedak rekonstuiše iz redukovanog skupa mjerenja, tada će se šum usljed nedostajućih odbiraka u nerekonstruisanim koeficijentima razmatrati kao aditivni šum u rekonstruisanom signalu [30]. Široko prihvaćena literatura u oblasti kompresivnog odabiranja, kako je već naglašeno, daje samo opšte granice za grešku u rekonstrukciji signala koji nijesu rijetki, a koji su rekonstruisani uz pretpostavku o rijetkosti [1, 2, 4, 5, 33]. Granice za grešku u slučaju DCT i DFT razmatrane su u kontekstu jedinstvenosti rješenja u radu [6]. U ovoj sekciji, biće prezentovan egzaktan izraz za očekivanu kvadratnu grešku u rekonstrukciji aproksimativno rijetkih signala, odnosno signala koji nijesu rijetki u 2D-DCT domenu. Pretpostavlja se da su ti signali rekonstruisani iz redukovanog skupa mjerenja pod pretpostavkom rijetkosti u ovom domenu. Uticaj nedostajućih odbiraka će i u ovom slučaju biti modelovan aditivnim šumom [7, 29]. Šum koji potiče od nedostajućih odbiraka u svakoj komponenti signala se modeluje kao Gausov slučajni proces, pa će stoga biti izvedene srednje vrijednosti i varijanse odgovarajućih slučajnih promjenljivih. Upravo ti rezultati će biti uključeni u izvod¯enje egzaktnog izraza za grešku u rekonstrukciji signala koji nijesu rijetki, a koja se sprovodi uz pretpostavku o rijetkosti. Prezentovana teorija će biti verifikovana numeričkim eksperimentima sa realnim slikama. 3.2.1 Osnovne definicije Posmatrajmo 2D diskretni signal (digitalnu sliku) dimenzija M × N , označen sa x(m, n). 2D-DCT ovog signala je definisana izrazom [28] M −1

N −1 X C **(p, q) = x(** m, **n)** ϕM (m, **p)** ϕN **(n, q),** 114

m∑=0 ∑n=0 gdje su p = 0, ..., M − 1 i q = 0, ..., N − 1 indeksi transformacionih koeficijenata, dok ϕM (m, p) = 2 π(2m + 1)p cos ,p≠0 √M (2M) ϕN (n, q) = 2 π(2n + 1)q √ N cos ,q ≠0 (2N) (3.71) (3.72) predstavljaju normalizovane bazne funkcije ove transformacije. Za p = 0 ili q = 0 ove funkcije su definisane izrazima ϕM (m, 0) = 1/M i ϕN (n, 0) = 1/N , respektivno. Odgovarajuća inverzna transformacija ima sljedeću√formu: √ M −1 N −1 s(m, n) = X C (p, q)ϕM (m, p)ϕN (n, q) (3.73) ∑p=0 ∑q=0 gdje je m = 0, ..., M − 1, n = 0, ..., N − 1. 2D-DCT transformacija se može zapisati i u matričnom obliku [28, 29]: XC = Φx, (3.74) gdje je XC matrica 2D-DCT koeficijenata razmatranog signala, Φ je 2D-DCT transformaciona matrica, dok matrica x sadrži odbirke posmatranog signala (odnosno, piksele digitalne slike). Za inverznu 2D-DCT važi relacija: x = ΨXC, uz Ψ = Φ−1. Dvodimenzioni signal ili digitalna slika oblika: K x(m,n) = AlϕM(m,pl)ϕN(n,ql) (3.75) ∑l=1 je rijedak u 2D-DCT domenu ukoliko je broj nenultih 2D-DCT koeficijenata K mnogo manji od ukupnog broja piksela (odbiraka), odnosno, ako važi K ≪ MN. Komponente su locirane na DCT indeksima (pl,ql) i imaju amplitude Al, l = 1,2,...,K. 3.2.2 Uticaj nedostajućih odbiraka (piksela) U kontekstu kompresivnog odabiranja, pretpostavlja se da je samo NA ≤ MN slučajno pozicioniranih piksela sa indeksima (mi, ni) ∈ {(m1, n1), (m2, n2), . . . , (mNA, nNA)} = NA ⊆ N = {(0, 0), (0, 1), . . . , (M − 1, N − 1)} dostupno. Ukoliko se od dostupnih odbiraka formira vektor y sa elementima M −1 N −1 y(i) = x(mi,ni) = XC(p,q)ϕM(mi,p)ϕN(ni,q), ∑p=0 ∑q=0 gdje je i = 0, 1, ..., NA, tada dolazimo do matrične forme y = AXC (3.76) koja predstavlja matematički model procedure kompresivnog odabiranja, pri čemu je A mjerna matrica dimenzija NA × M N . Po definiciji, ona je parcijalna inverzna 2D-DCT matrica, koja sadrži vrste matrice Ψ koje korespondiraju pozicijama dostupnih odbiraka (piksela). Digitalna slika x(m, n) je rijetka u 2D-DCT domenu, sa stepenom rijetkosti K , ukoliko je samo K 2D-DCT koeficijenata tog signala različito od nule. Nenulti koeficijenati pozicionirani na indeksima (p, q) ∈ ΠK = {(p1, q1), (p2, q2), . . . , (pK, qK)} formiraju vektor XCK. Vektor 2D-DCT koeficijenata dobijen rekonstrukcijom slike, uz pretpostavku da je ona rijetka sa stepenom K, će biti označen sa XCR. Ovo je vektor od K rekonstruisanih nenultih koeficijenata sa pozicija (p, q) ∈ ΠK. Digitalna slika je aproksimativno rijetka, ukoliko su koeficijenti XC(p, q), (p, k) ∈/ ΠK malih vrijednosti, a ako su reda veličine koeficijenata XC(p, q), (p, k) ∈ ΠK, smatraćemo da slika nije rijetka u 2D-DCT domenu. Tada vektor XCK sadrži K najvećih vrijednosti iz matrice XC. Vektor XCK produžen nulama do veličine originalne matrice XC, i zapisan u obliku matrice XC odgovarajućom preraspodjelom indeksa, biće označen sa XKC0. U sklopu ove podsekcije, ispitaćemo uticaj nedostajućih odbiraka (piksela) na koeficijente 2D-DCT-a. Inicijalna estimacija koeficijenata Inicijalna estimacija 2D-DCT koeficijenata, zasnovana na ℓ2-normi, računa se samo na osnovu dostupnih odbiraka (piksela): X C 0(p, q) = x(m, n)ϕM (m, p)ϕN (n, q) (3.77) (m∑,n)∈NA gdje je

p = 0, 1, ..., M − 1, q = 0, 1, ..., N − 1. 110

Kao i u slučaju jednodimenzione DCT, jasno je da se isti rezultat dobija ukoliko su svi nedostupni pikseli jednaki nuli, [7]. U matričnoj formi možemo pisati X0C= ATy. (3.78) Koeficijenti u (3.77) predstavljaju slučajne promjenljive i, kao u ranije razmatranim transformacijama, pokazaćemo da su njihove statističke karakteristike različite na pozicijama komponenti signala (slike), (p, q) = (pl, ql), od osobina koje imaju na pozicijama koje ne odgovaraju komponentama slike, odnosno, (p, q) ≠ (pl, ql). Statističke karakteristike 2D-DCT koeficijenata u slučaju signala (digitalnih slika) sa nedostajućim odbircima (pikselima) Prvo će biti razmatran slučaj monokomponentnog signala, a zatim i opšti slučaj multikomponentnih signala. Dobijeni rezultati će biti osnov za izvod¯enje izraza za grešku u rekonstrukciji signala koji nijesu rijetki, ali koji su rekonstruisani pod pretpostavkom da su rijetki. Monokomponentni signali. Prvo će biti razmatran slučaj monokomponentnog signala za (p, q) ≠ (p1, q1), K = 1, a zatim će rezultati biti generalizovani i za multikomponentne signale. Bez gubljenja opštosti, pretpostavićemo jediničnu amplitudu komponente signala, A1 = 1. Iz (3.75) i (3.77) dobija se Varijabla XC(p, q) = ϕM (m, p1)ϕN (n, q1)ϕM (m, p)ϕN

(n, q). (m∑,n)∈ NA zp1q1 (m, n, p, q) = ϕM (m, p1)ϕN (n, q1)ϕM (m, 105

p)ϕN (n, q) (3.79) je slučajna za slučajne vrijednsti (m, n). Prvo će biti razmatrane njene statističke karakteristike za (p, q) ≠ (p1, q1). Inicijalna 2D-DCT estimacija se može zapisati na sljedeći način: XC(p,q) = zp1q1(m, n, p, q). (3.80) (m∑,n)∈NA Kada važi (p,q) ≠ (p1,q1), 2D-DCT koeficijenti ne odgovaraju komponentama signala (odgovaraju CS šumu), dok se XC0(p,q) ponaša kao slučajna Gausova promjenljiva [7,29]. Imajućiuvidudasubaznefunkcijeortogonalne, M −1 N −1 zp1q1(m, n, p, q) = δ(p − p1, q − q1) (3.81) m∑=0 ∑n=0 i da su sve vrijednosti zp1q1(m, n, p, q) jednako distribuirane, može se zaključiti da je srednja vrijednost slučajne promjenljive XC0(p, q) jednaka nuli, odnosno: μXC0(p,q) = E XC0(p, q) = 0, (p, q) ≠ (p1, q1). (3.82) U slučaju kada koeficijenti odgovaraju komponentama signala (slike), korišćenjem { } svojstva ortogonalnosti i pretpostavke o jednakoj distribuciji vrijednosti zp1q1(m, n, p, q), dobija se da važi μXC0(p,q) = E X0C(p, q) = MNNA , (p, q) = (p1, q1). Za slučajnu varijablu srednje vrijed{nosti nula,}varijansa je definisana sljedećim izrazom: (3.83) σX2 C0 (p,q) =E zp21q1(m, n, p, q) { (m,∑n)∈NA + zp1q1(m, n, p, q)zp1q1(i, j, p, q) . (3.84) (m∑,n)∈NA (i(,ji,)∑j≠)∈(mNA,n) } Pošto se razmatra slučaj kada je (p, q) ≠ (p1, q1), lako se zaključuje da važi: M−1 N−1 zp1q1(m, n, p, q) = 0. m∑=0 ∑n=0 (3.85) Množenjem lijeve i desne strane izraza (3.85) sa zp1q1(i,j,p,q), i primjenom operatora matematičkogočekivanjanaobijestranejednakosti,slijedi: M −1 N −1 E zp1q1(m, n, p, q)zp1q1(i, j, p, q) = 0. (3.86) { m∑=0 ∑n=0 } gdje je (i, j) ∈ N. Vrijednosti zp1q1(m, n, p, q) su jednako distribuirane. Stoga su članovi E{zp1q1(m, n, p, q)zp1q1(i, j, p, q)} za (m, n) ≠ (i, j) med¯usobno jednaki, i jednaki konstanti D. Ukupan broj ovih članova je MN − 1. Dalje, na osnovu (3.86) dobijamo (M N − 1) D + E zp21q1 (m, n, p, q) = 0. Polazni definicioni obrazac varijanse sada možemo zapisati u obliku { } σX2C0(p,q) = NAE{zp21q1(m, n, p, q)} + (NA2 − NA)D, (3.87) (3.88) budući da je tačno NA matematičkih očekivanja sa kvadratnim članovima u prvoj sumi, dok je NA(NA − 1) članova u drugoj sumsi jednako D. U cilju odred¯ivanja nepoznatog člana E zp21q1(m, n, p, q) , potrebno je razmotriti više slučajeva, u zavisnosti od uslova koje zadovolj{avaju indeksi kom}ponente signala: Generalni slučaj: Razmatrajmo prvo najčešće zadovoljeni uslov p ≠ p1, p ≠ M − p1, q ≠ q1, q ≠ N − q1. Tada važi: E{zp21q1(m,n,p,q)} = E{ϕ2M(m,p1)ϕ2N(n,q1)}E{ϕ2M(m,p)ϕ2N(n,q)} = M2N2 1 Inkorporirajući ovaj med¯urezultat u (3.87), dobija se D=− 1 1 M2N2 MN − 1 . Dalje, na osnovu izraza (3.88), varijansa može biti zapisana u obliku: σ2 C X0 (p,q) M2N2(MN − 1) = NA(MN − NA) . (3.89) (3.90) Ovaj rezultat važi i za (p1, q1) = (0, 0). Za A1 ≠ 1, rezultat je neophodno pomnožiti sa A21. Slučaj 1: Kada koeficijenti nijesu na pozicijama signala, a zadovoljavaju p = p1, q ≠ q1, q ≠ N − q1 dobija se E zp21q1(m,n,p1,q) = E ϕ4M(m,p1) E ϕ2N(n,q1) E ϕ2N(n,q) . (3.91) { } { }

{ }{ } Korišćenjem osobine da je E{ϕ2N(n,q1)}E ϕ2N(n,q) = 1/N2, dalje se može pisati { } E zp21q1(m,n,p1,q) = N2 1 1 + 1 . { } [M2 2ME ϕ2M(m,2p1) { }] Navedeno važi za p1 ≠ 0. U prethodnom izrazu je korišćena činjenica da funkcija ϕM (m, 2p1) ima srednju vrijednost jednaku nuli za slučajno m. Budući da je kosinus periodična funkcija, može se pisati: Konačno, dobija se: Inkorporiranjem ovog rezul{tata u (3.87) i (3.88}) dolazimo do: E {ϕ2M (m, 2p)} = M 1 . E zp21q1 (m, n, p1, q) = 2M 2N 2 3 . (3.92) σX2C(p,q) = 23MNA2N(M2(NM−N N−A1)) , (3.93) za p1 ≠ 0. Ukoliko, dodatno, važi p = p1 = 0, za nepoznato očekivanje se dobija E zp21q1(m,n,p,q) = M2N2 1 (3.94) što dalje daje rezultat (3.90). { } Slučaj 2: Korišćenjem istih izvod¯enja kao za Slučaj 1, lako se pokazuje da se, u slučaju kada pozicija razmatranog koeficijenta zadovoljava p ≠ p1, p ≠ M − p1, q = q1 ≠ 0, dobija rezultat (3.93). Dodatno, uslov q = q1 = 0 vodi rezultatu (3.90). Slučaj 3: Posmatrajmo slučaj kada je zadovoljeno p = M − p1, q ≠ q1, q ≠ N − q1. Dodatno, neka je zadovoljeno i p1 ≠ 0. Nepoznati kvadratni član tada postaje: E zp21q1(m,n,M −p1,q) =E ϕ2M(m,p1)ϕ2M(m,M −p1) E ϕ2N(m,q)ϕ2N(m,q1) { } = N 2 E ϕ2M (m, p1)ψM2 (m, p1) , 1{ } { (3.95) } { } gdje je ψM (m, p1) = 2 M sin π(2m2M+1)p1 za p1 ≠ 0 i ψM (m, 0) = M1 . Ovdje su koriš√ćeni ide(ntiteti ψM2) (m, M) = M2 i ϕM√(m, M) = 0 koji se pojavljuju u formuli ϕ2M(m,M−p1), kada je izražena u obliku ϕM(m,M)ϕM(m,p1))+ ψM(m,M)ψM(m,p1). Korišćenjem identiteta za sinus dvostrukog ugla i očekivanje E{ψ2M(m,2p1)}=M1,analognosaslučajemočekivanjakvadratakosinusa,dobijase E x2p1q1(m,n,M −p1,q) = 2M2N2 1 . (3.96) { } Uvrštavanjem ovog med¯urezultata u (3.88), dobija se sljedeći izraz za varijansu: σX2C(p,q) = 2NMA2(NM2(NM−NN−A)1) , (3.97) što važi uz p1 ≠ 0. Kada je p1 = 0, lako se pokazuje da važi izraz (3.90) holds. Slučaj 4: U ekvivalentnom slučaju kada je p ≠ p1, p ≠ M − p1, q = N − q1, rezultati su isti kao u Slučaju 3. Za q1 = 0, važi rezultat iz (3.90). Slučaj 5: Posmatra se uslov p = p1, q = N − q1. Kombinujući izvod¯enja predstavljena za Slučaj 1 i Slučaj 3, lako se pokazuje da varijansa postaje: σX2C(p,q) = 43MNA2N(M2(NM−N N−A1)) . (3.98) Za p1 ≠ 0 ili q1 ≠ 0 važi izraz (3.90). Navedeni izraz važi i za uslov (p1, q1) = (0, 0). Slučaj 6: U analognom slučaju, kada je zadovoljeno, važi rezultat result (3.98), a uz dodatan uslov p1 ≠ 0 ili q1 ≠ 0 ili (p1, q1) = (0, 0), varijansa postaje (3.90). Slučaj 7: Kada je p = M − p1 i q = N − q1, nepoznato očekivanje dobija oblik E zp21q1 (m, n, M − p1, N − q1) = 4M 2N 2 1 za (p1, q1) ≠ (0, 0), što vodi do { } σX2C(p,q) = 4NMA2(NM2(NM−NN−A)1) . (3.99) Za (p1,q1) = (0,0) važiće E{x200(m,n,M,N)} = M21N2. Stoga, u slučaju koeficijenta koji ne odgovara komponenti signala, na poziciji (M − p1,N − q1), varijansa dobija oblik (3.90). Lako se pokazuje da je za p1 = 0 ili q1 = 0 ova varijansa definisana izrazom (3.97). U svim razmatranim slučajevima, za A1 ≠ 1, dobijene izraze treba pomnožiti sa A21. Konačno, izvedeni izrazi mogu biti objedinjeni sljedećom relacijom: σX2C0(p,q) = A21 NA

(M N – NA) **M** 2N **2(** M **N − 1)** N **−1 × 1 + 1 − δ(** p1, q1) **1** 1

(1 − δ(p1, 0))δ(p − p1, q − i) [( )(∑i=0 2 1 M−1 + 2 (1 − δ(0, q1))δ(p − i, q − q1) N−1 ∑i=0 − 1 2 (1 − δ(M − p1, 0))δ(p − (M − p1), q − i) M−1 ∑i=0 − 1 2 (1 − δ(0, N − q1))δ(p − i, q − (N − q1)) 7 ∑i=0 − (1 − δ(p1, 0) − δ(0, q1))δ(p − (M − p1), q − (N − q1)) 4 − (1 − δ(p1, 0) − δ(0, q1))δ(p − p1, q − (N − q1)) 5 4 − (1 − δ(p1, 0) − δ(0, q1))δ(p − (M − p1), q1) 5 4 . (3.100))] gdje je δ(p, q) = 1 za p = 0 i q = 0, dok je, inače, δ(p, q) = 0. Uključivanjem svih razmatranih specijalnih slučajeva, dobija se da je prosječna vrijednost varijanse (3.100) konstantna i jednaka: σ¯2X0C = A21 MN2AN(M2(MN N− −NA1))2 (M N − 241). (3.101) Kako je M N ≫ 1, prosječna varijansa 2D-DCT koeficijenata koji ne odgovaraju pozicijama komponente signala se može precizno aproksimirati izrazom: σN2 = σ¯X20C ≈ A21 MNA2N(M2(NM −N N−A1)) . (3.102) Primjer 3.8. Posmatra se monokomponentni signal rijedak u 2D-DCT domenu, definisan izrazom x(m,n) = A1ϕp1(m,M)ϕq1(n,N), (3.103) gdje je M = 16, N = 20, A1 = 1, p1 = 9 and q1 = 16. Dostupno je samo NA = 128 slučajno pozicioniranih odbiraka

signala, i posmatra se 20000 statistički nezavisnih realizacija signala. Na osnovu inicijalnih 2D-DCT estimacija (3.77), varijansa 2D-DCT koeficijenata je izračunata numerički, usrednjavanjem inicijalnih estimacija iz svih realizacija. Rezultati su prikazani na slici 3.13, i skalirani su konstantnim članom (3.90). Razmatrani specijalni slučajevi su označeni na slici 3.13. 18 (p1, q1) 16 Slučaj 2, q = q1 14 Slučaj 6, (M p1, q1) − 12 q 10 Opšti slučaj 8 Slučaj 3, p = M − p1 Slučaj 1, p = p1 6 Slučaj 5, (p1, N − q1) 4 Slučaj 4, q = N q1 − 2 Slučaj 7, (M − p1, N − q1) 0 ... 1.5 1 0.5 0 5 10 15 p Slika 3.13: Varijansa inicijalne estimacije 2D-DCT koeficijenata. Dobijena je numerički, na bazi 20000 nezavisnih realizacija monokomponentnog signala dimenzija M × N = 16 × 20, rijetkog u 2D-DCT domenu, sa NA = 128 slučajno pozicioniranih dostupnih odbiraka. Multikomponentni signali. U slučaju multikomponentnih signala, posmatrana slučajna promjenljiva dobija sljedeći oblik: K X0C(p, q) = AlϕM (m, pl)ϕN (n, ql)ϕM (m, p)ϕN (n, q). (3.104) (m∑,n)∈NA ∑l=1 l za multikomponentne signale važi da su koeficijenti na pozicijama koje ne odgovaraju komponentama, odnosno (p, q) ≠ (pl, ql), slučajne promjenljive sa Gausovom distribucijom i srednjom vrijednošću nula, budući da su formirane sumiranjem nezavisnih Gausovih promjenljivih sa srednjim vrijednostima nula, po indeksu l. Naime, sada nedostajući odbirci (tj. pikseli slike) iz svake komponente doprinose nastanku CS šuma. Šum koji potiče iz svake komponente je proporcionalan kvadratu amplitude te komponente, prateći zakonitost (3.102), sa Al, l = 1, ..., K. Dakle, rezultujuća srednja vrijednost 2D-DCT koeficijenata multikomponentnog signala (slike) može biti zapisana u sljedećem obliku: K μXC(p,q) = MN Alδ(p − pl, q − ql). NA (3.105) ∑l=1 Prosječna varijansa koeficijenata na pozicijama koje ne odgovaraju komponentama signala definisana je sljedećim izrazom σ¯2X0C = A2l MNA2N(M2(NM −N N−A1)) K . (3.106) ∑l=1 l ovdje je važno napomenuti da komponente slike pomnožene sa baznim funkcijama transformacije mogu uzrokovai pojavu efekta uparivanja (coupling effect) kao i u jednodimenzionom slučaju, ukoliko su iste locirane na pozicijama koje zadovoljavaju odred¯ena svojstva. Kao posljedica toga, ovaj efekat može uzrokovati povećanje prethodno izvedene varijanse na tim pozicijama. Ipak, u slučaju pojave ovog efekta, na primjer, na poziciji (p1, q1), i povećanja varijanse na toj poziciji, istovremeno će varijansa na poziciji (M − p1, N − q1) biti smanjena za istu vrijednost. Dakle, u daljim razmatranjima se ovaj efekat može zanemariti, budući da izraz (3.106) važi u srednjem, što će biti od ključnog značaja za izvod¯enje greške u rekonstrukciji slika koje nijesu rijetke u 2D-DCT domenu. 3.2.3 Energija greške u rekonstrukciji signala koji nijesu rijetki Na ovom mjestu će biti ekspicitno formulisan izraz za očekivanu kvadratnu grešku u rekonstrukciji dvodimenzionih signala (digitalnih slika), koji nijesu rijetki, a rekonstruisani su pod pretpostavkom da su rijetki. Teorema o energiji greške Posmatra se slika koja nije rijetka u 2D-DCT domenu, i čije su najveće amplitude Al, l = 1,2,...,K. Prepostavimo da je dostupno samo NA od ukupno MN odbiraka, gdje je 1 ≪ NA < MN. Takod¯e, pretpostavimo da je slika rekonstruisana kao da je rijetka, sa stepenom rijetkosti K. Energija greške u K rekonstruisanih koeficijenata XCK−XCR 22 vezana je za energiju nerekonstruisanih komponenti XKC0 − XC 22 sljedećom rela‖cijom: ‖ ‖ ‖ ‖ XKC − XRC 2 KN(AM(MNN−−N1A)) ‖XKC0 − XC 2 = 2 2 , (3.107) gdje je ‖ ‖ ‖ ‖ ‖ ‖ XKC − XCR KN(AM(MNN−−N1A)) l=MKN+1 A2l, 2 2 = (3.108) ‖ ‖ ∑ i MN XKC0 − XC 2 2 = A2l . (3.109) ‖ ‖ ‖ l=∑K+1 Dokaz Smatra se da je slika (signal) rekonstruisana pod pretpostavkom da je rijetka, sa stepenom rijetkosti K , i da je zadovoljen uslov jedinstvenosti rekonstrukcije u CS teoriji. Broj rekonstruisanih komponenti je K . Prema (3.106), svaka nerekonstruisana komponenta se ponaša kao aditivni Gausov šum srednje vrijednosti nula i varijanse σN2 = A2l MNA2N(M2(NM −N N−A1)) . (3.110) Stoga, M N − K nerekonstruisanih komponenti se ponašaju kao šum sa varijansom MN σT2 = . (3.111) l=∑K+1 A2l MNA2N(M2(NM −N N−A1)) Nakon rekonstrukcije, ukupna energija šuma koji potiče od nerekonstruisanih komponenti će biti (ukupno je K rekonstruisanih komponenti) XKC − XCR 22 = K MN2NA2 2 σ2T ‖ ‖ = KN(AM(MNN−−N1A)) l MKN Al2. (3.112) =∑+1 Šum u nerekonstruisanim komponentama se može lako povezati sa energijom nerekonstruisanih komponenti: XKC − XC 2 MN 2 = A2l. ‖ l=∑K+1 Zaključujemo da je ukupna greška u rekonstruisanim komponentama data relacijom ‖ ‖ XKC − XCR 2 2 = KN(AM(MNN−−N1A)) XCK − XC 2 2 , što je i trebalo pokazati‖. ‖ ‖ ‖ ‖ ‖ ‖ ‖ 3.2.4 Numerički rezultati (3.113) (3.114) Teorijski izraz (3.114) će biti numerički evaluiran, korišćenjem odgovarajućeg seta testnih slika. Na osnovu njih, kvadratne greške se numerički računaju za različite stepene rijetkosti K, po blokovima. Pretpostavljena veličina bloka je B × B. Kvadratna greška po bloku se računa po formuli: Estat = 10 log ||XCK − XCR||22 (3.115) ( ) Originalna slika Dostupni pikseli Rekonstruisana slika Slika 3.14: Rekonstrukcija slike „Barbara" na osnovu 60% dostupnih piksela, i sa pretpostavljenim stepenom rijetkosti K = 16 po svakom bloku dimenzija 16 × 16: Originalna slika (lijevo); dostupni pikseli (u sredini); rekonstruisana slika (desno) za dobijanje numeričkih rezultata, dok se teorijska greška dobija primjenom desne strane izraza (3.114), odnosno, po formuli: Eteor = 10 log (K NA(B2 − 1) B2 − NA ||XCK − XC||22) . (3.116) Za svaki pojedinačni blok posmatrane slike, greške se numerički računaju primjenom ovih izraza, a zatim se rezultati usrednjavaju po blokovima. Još jedna mjera kvaliteta rekonstrukcije je i tzv. peak signal-to-noise ratio (PSNR). U posmatranom eksperimentu, ova veličina se numerički računa po formuli P S N Rstat = 10 log (||XKC − XRC ||22) 2552 dok je njena teorijska vrijednost definisana izrazom P S N Rteor = 10 log (K NBA2(−BN2−A1) ||XCK − XC ||22) 2552 . (3.117) (3.118) Proračun se takod¯e vrši po svakom bloku, gdje broj 255 predstavlja maksimalnu vrijednost piksela u slici. Ova veličina će biti korišćena za dodatnu validaciju rezultata. U svim razmatranim slučajevima, rekonstrukcija je obavljena standardnim OMP algoritmom. Primjer 3.9. Razmatra se sivoskalirana slika „Barbara", veličine 512 × 512, standardno dostupna u softverskom paketu MATLAB○R. Slika je prvo podijeljena na blokove dimenzija B × B = 16 × 16. Slika je kompresivno odabrana, tako da je dostupno samo 60% njenih piksela. Prilikom rekonstrukcije, pretpostavljeni stepen rijetkosti je K = 16 po svakom bloku. Originalna „Barbara" je prikazana na slici 3.14 (lijevo), dostupni pikseli su prikazani na slici 3.14 u sredini (nedostupni pikseli prikazani crnom bojom), dok je rezultat rekonstrukcije na Rezultati za sliku „Barbara" Rezultati za sliku „Lena" -12 Numerički rezultat -14 Numerički rezultat -14 Teorija -16 Teorija -16 -18 -18 -20 -20 (a) 2 Pretpostavljeni stepen rijetkosti K 4 6 8 10 12 14 16 -22 (b) 2 4 6 8 10 12 14 16 Pretpostavljeni stepen rijetkosti K Slika 3.15: Greške nastale usljed nerekonstruisanih komponenti, za različite stepene rijetkosti po bloku u slici. Zvjezdicama je označen numerički a punim linijama teorijski rezultat za (a) sliku „Barbara" i (b) „Lena". Originalna slika Dostupni pikseli Rekonstruisana slika Slika 3.16: Rekonstrukcija kolorne slike „Lena" na osnovu 60% dostupnih piksela, i sa pretpostavljenim stepenom rijetkosti K = 16 po svakom bloku dimenzija 16 × 16: Originalna slika (lijevo); dostupni pikseli (u sredini); rekonstruisana slika (desno) osnovu redukovanog broja piksela i uz pretpostavljeni stepen rijetkosti prikazana 3.14 (bottom). Numerički dobijena i teorijska energija greške prikazane su na slici 3.15 (a). Prilikom računanja greške, rekonstrukcija je obavljena uz različite pretpostavljene stepene rijetkosti K po bloku, u opsegu od 1 do 16. Crvenim zvjezdicama označene su numerički dobijene vrijednosti, dok su teorijski rezultati prikazani crnom linijom. Primjer 3.10. U ovom primjeru se razmatra standardna kolor (RGB) slika „Lena" dimenzija 512 × 512. I ova slika je podijeljena na blokove veličine B × B = 16 × 16. U eksperimentu se posmatra samo 60% dostupnih piksela slike. Pretpostavljeni stepen rijetkosti je K = 16 po svakom bloku. Razmatrana „Lena" je prikazana na slici 3.16 (lijevo), dostupni pikseli su prikazani na slici 3.16 u sredini (nedostupni pikseli su obojeni crnom bojom). Rezultat rekonstrukcije na osnovu redukovanog broja piskela i uz pretpostavljeni stepen rijetkosti prikazan je na slici 3.16. Može se uočiti da zadati stepen rijetkosti obezbjed¯uje visok kvalitet rekonstruisane slike. „Boat" „Pears" „pout" „Autumn" „Pirate" „Peppers" „Lifting Body" „Football" Slika 3.17: Set testnih slika koje se razmatraju u primjeru 3.11. Tabela 3.3: Energija greške i PSNR za 8 razmatranih slika u primjeru 3.11. Error Testna slika Statistika Teorija PSNR Statistika Teorija „Boat" -19.13 -19.20 81.97 82.13 „Pout" -27.32 -27.38 80.35 80.42 „Pirate" -10.10 -10.23 70.97 71.10 „Lifting Body" -24.78 -24.86 82.97 83.11 „Pears" -25.60 -25.67 78.77 78.86 „Autumn" -15.80 -15.88 90.81 90.92 „Peppers" -22.16 -22.22 79.16 79.23 „Football" -18.72 -18.87 68.69 68.83 Numerički dobijena energija greške, kao i teorijske krive greške prikazani su na slici 3.15 (b). Prikazane greške su dobijene usrednjavanjem rezultata iz svih blokova i svih kanala. Rekonstrukcije su obavljene za različite pretpostavljene stepene rijetkosti, u opsegu od 1 do 16. Crvene zvjezdice prikazuju numerički dobijene rezultate, dok je teorijska kriva greške prikazana punom linijom. I u slučaju kolorne slike, postoji visok stepen poklapanja ovih rezultata. Primjer 3.11. Validnost teorijskog izraza za energiju greške testirana je i većim setom od 8 standarnih sivoskaliranih slika iz softverskog paketa MATLAB○R, koje su prikazane na slici. 3.17. Svaka slika je u eksperimentu podijeljena na blokove veličine B × B = 16 × 16. Rekonstrukcija je sprovedena na bazi 60% slučajno raspored¯enih dostpunih piksela slika. Prepostavljeni stepen rijetkosti, korišćen u rekonstrukcionom algoritmu je K = 16. Statistička i teorijska greška su računate prema izrazima (3.115) i (3.116). U eksperimentu je, u cilju potpunije evaluacije, računat i PSNR, na osnovu izraza (3.117) i (3.118). Rezultati eksperimenta prikazani u tabeli 3.3, potvrd¯uju visoko poklapanje numeričkih rezultata i teorijskih izraza. Glava 4 Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Furijeova transformacija obezbjed¯uje jedinstveno mapiranje signala iz vremenskog u frekvencijski domen. Frekvencijski domen pruža informacije o spektralnom sadržaju signala. Med¯utim, budući da se informacije sadržane u faznoj karakteristici ne mogu jednostavno koristiti, Furijeova transformacija gotovo da nije upotrebljiva u analizi i obradi signala sa vremenskim varijacijama spektralnih komponenti. U cilju praćenja vremenskih distribucija spektralnih komponenti – uvodi se vremensko-frekvencijska analiza. 4.1 Kratak osvrt na osnovne reprezentacije i koncepte 4.1.1 Kratkotrajna Furijeova transformacija i spektrogram Jedna od osnovnih vremensko-frekvencijskih reprezentacija je kratkotrajna Furijeova transformacija (engl. short-time Fourier transform - STFT). Ona se za signal x(t) definiše sljedećim izrazom: ∞ ST

F T (t, Ω) = x(t + τ)w(τ)e− jΩτ dτ (4 .1) −∫∞ gdje je w (τ 80

) funkcija prozora, koja je najčešće parna funkcija sa maksimumom u τ = 0. Za svaki posmatrani trenutak t, za dio signala koji je lokalizovan prozorom centriranim oko tog trenutka računa se odgovarajuća Furijeova transformacija. Ponavljanjem postupka za svako t dobija se vremensko-frekvencijska reprezentacija signala. STFT je linearna, što znači da za linearnu kombinaciju P x(t) = apxp(t) (4.2) ∑p=1 važi da je rezultujuća STFT linearna kombinacija odgovarajućih STFT pojedinačnih komponenti signala: P STFTx(t,Ω) = STFTxp(t,Ω). ∑p=1 (4.3) Originani signal x(t) se može rekonstruisati na osnovu STFT kao inverzna Furijeova transformacija: ∞ x(t + τ) = 1 2πw(τ)−∫∞ ST F T (t, Ω)ejΩτ dΩ. (4.4) Prozori i problem rezolucije Za posmatrani trenutak t funkcija prozora odred¯uje veličinu dijela signala koji je relevantan pri proračunu STFT za taj trenutak. Bolja vremenska rezolucija se postiže odabirom prozora kraćeg trajanja. Ako se STFT redefiniše u obliku: ST F T (t, Ω) = e−2jπΩt X(Θ)W ∗(Θ − Ω)ejΘtdΘ, ∞ (4.5) −∫∞ tadaona,mimočlanae−jΩt,predstavljainverznuFurijeovutransformacijuodX(Θ)W∗(Θ−Ω), kojisemožetumačitikaospektarsignalax(t)kojijeograničenprolaskomkrozfiltarpropusnik opsega učestanosti W∗(Θ − Ω), sa centralnom učestanošću Ω, pri čemu W(Ω) označava FT funkcije prozora w(τ). Bolja frekvencijska rezolucija se postiže prozorom dužeg trajanja u vremenu, kojem je obrnuto proporcionalno trajanje u frekvenciji. Jedna od standardnih prozorskihfunkcijajepravougaoniprozor: w(τ) = 1, za |τ| < T { 0, ostalo τ. (4.6) Njegova FT je: WR(Ω) = 2 sin(ΩT) Ω . (4.7) Može se uočiti da ovaj prozor, koji je u vremenu ograničen na interval (−T , T) ima beskonačan frekvencijski opseg. Ako se posmatra samo glavna latica u (4.7), jasno je da manje T znači njenu veću širinu. U vremensko-frekvencijskoj analizi koriste se i druge prozorske funkcije. Takav je, na primjer, Hanning-ov prozor: w(τ) = 12 (1 + cos(τ π/T)), { 0, čija je FT data izrazom: |τ | < T ostalo τ (4.8) WH(Ω) = WR(Ω) + WR(Ω − π/T) + WR(Ω + π/T), 1 1 1 2

4 4 (4.9) koji jasno otkriva vezu sa FT pravougaonog prozora. Navedeno je bitno u kontekstu realizacija STFT, budući da se STFT sa Hanning-ovim prozorom može realizovati pomoću odgovarajućih STFT sa pravougaonim prozorom, u obliku: ST F T (t, Ω) = 0.5ST F TR(t, Ω) + 0.25ST F TR(t, Ω − π/T) + 0.25ST F TR(t, Ω + π/T), a slična veza se može uspostaviti i u slučaju drugih vrsta prozorskih funkcija. Efektivno trajanje i princip neodred¯enosti Sposobnost vremensko-frekvencijskih reprezentacija da razdvajaju komponente signala, odnosno, rezolucija u vremensko-frekvencijskoj ravni zavisi od trajanja prozorske funkcije. Proizvod vremenskog i frekvencijskog trajanja je konstantno, što povlači činjenicu da bolja vremenska rezolucija znači goru frekvencijsku, i obratno. U opštem slučaju, mogu se uvesti mjere efektivnog trajanja u vremenu i frekvenciji: ∞ τ 2|w(τ)|2dτ ∞ Ω2|W (Ω)|2dΩ σt2 = −∞ ∫ ∞ , σ2Ω = −∞ ∫ ∞ (4.10) |w(τ)|2dτ |W (Ω)|2dΩ −∞ −∞ ∫ ∫ Za bilo koji signal w(τ) koji zadovoljava da uslov da w(τ) |τ | → 0 za τ → ±∞ se može pokazati da važi da proizvod mjera efektivnog trajanja zad√ovoljava princip neodred¯enosti u obradi signala: σT σW ? 1/2. (4.11) Spektrogram Energetska verzija STFT, definisana u vidu kvadrata njenog modula, poznata je pod nazivom spektrogram: SPEC(t,Ω) = |STFT(t,Ω)|2. (4.12) U opštem slučaju, spektrogram nije linearan. Za multikomponentni signal oblika P x(t) = xp(t), (4.13) ∑p=1 spektrogram je jednak: P P P SPECx(t,Ω) = SPECxp(t,Ω)+ S T F Txp (t, Ω)S T F Tx∗q (t, Ω), (4.14) ∑p=1 ∑p=1∑pk≠=q1 gdje desni član predstavlja nepoželjne kros-komponente, nastale usljed interakcije pojedinačnih komponenti koja je izazvana nelinearnom formom reprezentacije (distribucije). Diskretna forma STFT Numeričko računanje STFT na računaru podrazumijeva njenu diskretnu formu. Označimo sa xa(t) analogni signal čija se diskretizacija po vremenu i kašnjenju obavlja sa korakom ∆t, tako da je t = n∆t i τ = m∆t. U tom slučaju se STFT može zapisati u sljedećem obliku: ∞ ∞ ST F T (t, Ω) = xa(t + τ)w(τ)e−jΩτ dτ ≈ xa(n∆t + m∆t)w(m∆t)e−jΩm∆t∆t −∫∞ m∑=−∞ (4.15) Uvod¯enjem oznake xa((n + m)∆t)∆t = x(n + m), i normalizacijom ugaone frekvencije ω = Ω∆t, dobija se STFT diskretnog signala, koja je periodična po frekvenciji sa osnovnom periodom 2π: ∞ ST F T (n, ω) = xa(n + m)w(m)e−ωm. (4.16) m∑=−∞ Da bi se spriječilo preklapanje STFT perioda, shodno teoremi o odabiranju, treba da bude zadovoljeno da je perioda odabiranja: ∆t = π/Ω0 ? π/Ωm, gdje je Ωm maksimalna frekvencija u spektru signala xa(n + m)w(m). I pored činjenice da funkcija prozora ima beskonačan spektar, može se pretpostaviti da se iznad neke granične frekvencije Ωm mogu zanemariti spektralne komponente signala xa(n + m)w(m). Zbog upotrebe prozora konačnog trajanja, diskretni signal je konačne dužine N = T /∆t. Odgovarajuća DFT u N tačaka za posmatrani indeks n uz ω = 2Nπ k vodi do diskretne forme STFT: N/2−1 S T F T (n, k) = x(n + m)w(m)e−j 2Nπ mk , (4.17) m=∑−N/2 gdje se, pri numeričkoj realizaciji mogu koristiti postojeće rutine za računanje DFT (FFT). Uticaj viših izvoda faze na koncentraciju STFT Posmatra se generalni slučaj analitičkog signala x(t) = Aejφ(t), gdje je φ(t) diferencijabilna funkcija. STFT ovog signala ∞ STFT(t,Ω) = Aejφ(t+τ)w(τ)e−jΩτdτ −∫∞ ∞ = Aej

(φ(t)+ φ **′(t)τ +φ′′(t)** τ22! +...)w **(τ**)e−jΩτ **dτ** = Aejφ **(t)** F **T** ejφ **′(t)τ**	78

∗ΩF T ej ∞k=2 φ(k)(t) τkk! ∗ΩF T {w(τ)} ∫−∞ ∑ = 2πAejφ(t)δ(Ω − φ′(t))∗ΩW (Ω) ∗Ω e−jΩ2/(2φ′′) 2πj { } { } √ φ′′(t) , gdje je faza φ(t + τ) razvijena u Tejlorov red, u okolini tačke t:

φ(t + τ) = φ(t) + φ′(t)τ + φ′′(t) τ22 + · · · + φ(k **)(t)**	21

τkk! + . . . , (4.18) (4.19) (4.20) zatim ∗Ω označava konvoluciju u frekvencijskom domenu, dok je F T {·} oznaka za operator Furijeove transformacije. Uticaj prozora se, dakle, manifestuje kroz rasipanje spektra oko idealne koncentracije δ(Ω − φ′(t)). Viši izvodi faze uzrokuju pojavu dodatnog rasipanja. To je rasipanje spektra usljed nestacionarnosti signala. U krajnjem obrascu, uzet je u obzir samo drugi izvod faze, koji najviše i utiče na koncentraciju. 4.1.2 Metod stacionarne faze i pojam trenutne frekvencije Neka se posmatra generalna forma analitičkog signala: x(t) = A(t)ejφ(t). (4.21) Kada FT nije moguće jednostavno odrediti analitički, tada se, pod odred¯enim uslovima, može koristiti metod stacionarne faze u cilju računanja njene aproksimacije. Neka je prozorska funkcija širine 2T . Ako možemo pretpostaviti da su u okviru prozora w(τ) varijacije amplitude male a varijacije faze gotovo linearne, odnosno, A(t) ≃ A(t),

φ(t + τ) ≃ φ(t) + φ **′(t),** tada je x **(t + τ**) ≃ A **(t)** ejφ **(t)** ejφ **′(t).** 21

(4.22) Stoga se signal u datom trenutku ponaša kao sinusoida u τ domenu, sa amplitudom A(t), fazom φ(t) i frekvencijom φ′(t). Dakle, prvi izvod faze, φ′(t), u datom trenutku t, unutar posmatranog intervala u njegovoj okolini, ima ulogu frekvencije. Metod stacionarne faze povezuje signal u vremenskom domenu sa spektralnim sadržajem na frekvenciji Ω u obliku φ′(t) = Ω. Signal u vremenskom domenu koji zadovoljava uslove metoda stacionarne faze, doprinosi u posmatranom trenutku t Furijeovoj transformaciji na odgovarajućoj frekvenciji: φ′(t) = Ω(t). Tada se uspostavlja Furijeov transformacioni par oblika: ∞ A(t)ejφ(t)e−jΩtdt ∼= A(t0)ejφ(t0)e−jΩt0 2πj −∫∞ √φ′′(t0) (4.23) (4.24) gdje t0 predstavlja rješenje jednačine: φ′(t0) = Ω. Ako se posmatra integral sa lijeve strane jednačine (4.24), može se uočiti da u slučaju stacionarnosti podintegralne funkcije φ(t) − Ωt navedena podintegralna funkcija ona ima najveći uticaj na vrijednost integrala. Funkcija je stacionarna ukoliko joj je prvi izvod jednak nuli. Navedno važi zato što se vrijednosti integrala na intervalima u kojima je faza nestacionarna usrednjavaju, pa integral nestacionarnog dijela, gledano u cjelini, teži nuli. Ukoliko važi da je faza φ(t) − Ωt stacionarna, to znači da se u datom trenutku t = t0 faza φ(t) ponaša na isti način kao i Ωt. Drugim riječima, brzina promjene faze φ(t) jednaka je frekvenciji Ω u tom trenutku: d(φ(t) − Ωt) dt |t=t0 = 0 (4.25) odnosno, φ′(t) = Ω. Formalno govoreći, izraz φ′(t) = Ω(t) (4.26) predstavlja definiciju trenutne frekvencije. 4.1.3 Wigner-ova distribucija Kvadratne vremensko-frekvencijske reprezentacije poznate su pod nazivom distribucije. Generalno, zadovoljavaju niz interesantnih svojstava, med¯u kojima ćemo spomenuti energetski uslov: 1 ∞ ∞ ∞ 2π P (t, Ω)dtdΩ = |x(t)|2dt = Ex, (4.27) −∫∞ −∫∞ −∫∞ vremenski marginalni uslov: 1 ∞ P (t, Ω)dΩ = |x(t)|2, (4.28) 2π −∫∞ i frekvencijski marginalni uslov: ∞ P(t,Ω)dt = |X(Ω)|2, (4.29) −∫∞ gdje P (t, Ω) označava distribuciju. Med¯u najznačajnijim distribucijama koje zadovoljavaju ova svojstva ubraja se Wigner-ova distribucija (WD). Konceptualno je preuzeta iz kvantne mehanike. Za signal x(t) ona se definiše izrazom: ∞ W D(t, Ω) =

x(t + τ)x∗(t − τ)e−jΩτ dτ. −∫∞ 2 2 21

(4.30) Zbog Hermitske simetrije R(t, τ) = R∗(t, τ) ona je realna vremensko-frekvencijska reprezentacija. Alternativno, može se definisati u obliku: 1 ∞ W D(t, Ω) = 2π −∫∞ X(Ω + Θ/2)X∗(Ω − Θ/2)ejΘtdΘ. (4.31) U slučaju linearno frekvencijski modulisanih (LFM) signala, WD produkuje idealnu koncentraciju. Na primjer, za signal x(t) = Aejat2/2 dobija se: ∞ ∞ W D(t, Ω) = A2ejatτ e−jΩτ dτ = A2e−j(Ω−at)τ dτ = 2πA2δ(Ω − at) (4.32) −∫∞ −∫∞ što predstavlja idealnu koncentraciju energije signala duž trenutne frekvencije Ω = φ′(t). Wigner-ova distribucija multikomponentnih signala U opštem slučaju multikomponentnog signala P x(t) = xi(t) (4.33) ∑p=1 Wigner-ova distribucija je data sljedećim izrazom: P ∞

xp(t + τ)x∗p(t − τ)e−jΩτ dτ + **P** P ∞ W D **(t,** Ω) = **τ ∑p=** 96

1−∫∞ 2 2 xp(t +)x∗q(t − τ)e−jΩτ dτ, ∑p=1 ∑qp=≠1q−∫∞ 2 2 gdje se jasno izdvajaju korisne komponente – autočlanovi, dati relacijom: P ∞ W DAT (t, Ω) = xp(t + τ)x∗p(t − τ)e−jΩτ dτ. 2 2 (4.34) ∑p=1−∫∞ i kros-članovi, koji su neželjene komponente nastale usljed nelinearne prirode ove distribucije: P P ∞ WDCT(t,Ω) = ∑p=1 ∑qp=≠1q−∫∞ xp(t + 2)x∗q(t − τ)e−jΩτ dτ. τ 2 (4.35) Pojava kros-komponenti je jedna od glavnih mana Wigner-ove distribucije. Uticaj viših izvoda faze na koncentraciju Neka se posmatra opšti slučaj analitičkog signala (nelinearnog FM signala): x(t) = Aejφ(t), (4.36) WD ovog signala se može zapisati u formi ∞ WD(t,Ω) = A2ejφ(t+τ2)e−jφ(t−τ2)e−jΩτdτ (4.37) −∫∞ Anuliranjem članova sa parnim izvodima φ(t), φ′′(t)4τ·22! . . . , dalje se dobija: W D(t, Ω) = A2 ej(φ′(t)τ +2k=1 φ((22kk++11))(!t) (τ2)(2k+1))e−jΩτ dτ ∞ ∞ −∫∞ ∑ ∞ = 2πA2δ(Ω − φ′(t))∗ΩF T exp 2j φ

(2k+1) τ 2k+1 { (∑k=1 (2k + 1)! (2 111

))} , (4.38) odakle se zaključuje da rasipanje energije signala oko trenutne frekvencije izazivaju samo neparni izvodi faze, što znači da se postiže bolja koncentracija signala u odnosu na STFT. Pseudo-Wigner-ova distribucija i diskretizacija U praktičnim realizacijama, WD se redefiniše uključivanjem funkcije prozora u obliku: ∞

P W D(t, Ω) = **w τ** w∗ − **τ** x **t** + x∗ **t − e−** jΩτdτ. τ τ **(4.** 39) −∫∞ ( ) **2 (2** 16

) (2) (2) Ova forma poznata je pod nazivom pseudo-Wigner-ova distribucija (PWD) i ona uzima u obzir konačno trajanje signala i definisana je kroz konačna kašnjenja. U praksi se najčešće koristi diskretna forma ovako definisane WD. Postoji više pristupa diskretizaciji. U daljem izlaganju biće podrazumijevana ova forma Wigner-ove distribucije. Jedan dio pristupa diskretizaciji zahtijeva duplo veću frekvenciju odabiranja od minimalne koja je definisana Teoremom o odabiranju, odnosno, preodabiranje signala sa faktorom 2. Za signal odabran sa korakom ∆t, uz odgovarajuću diskretizaciju frekvencije, uzimajući u obzir pri tome adekvatnu diskretizaciju vremenskog kašnjenja u autokorelacionoj funkciji, lako se dobija jedna od poznatih formi diskretne PWD: M/2−1 W Dx

(n, k) = x(n + m) x∗(n − **m)e−j** 4Mπ **km,** (4.40) **m=∑−** 117

M/2 gdje su eventualno izostavljene konstante koje nastaju tokom diskretizacije, i podrazumijevan je jedinični prozor w(m) = 1, −N/2 ≤ m ≤ N/2 − 1 i w(m) = 0 za ostalo m, dok je −M/2 ≤ k ≤ M/2 − 1. 4.1.4 Estimacija trenutne frekvencije na osnovu diskretne Wigner-ove distribucije Posmatra se diskretna WD oblika (4.40) zašumljenog FM signala x(n) = s(n) +

$\varepsilon(n) = Aej\varphi(n) + \varepsilon(n)$, (4.41) gdje je $\varepsilon(n)$ bijeli kompleksni Gausov šum sa varijansom $\sigma\varepsilon 2 = 2\sigma 2$, pri čemu su realni i imaginarni dio šuma sa statistički nezavisnim Gausovim distribucijama, jednakih varijansi $\sigma 2$ i srednje vrijednosti nula. Za posmatrani trenutak n trenutna frekvencija ($\omega(n)$ ili $\Omega(n\Delta t) = \omega(n)/\Delta t$), gdje je Δt perioda odabiranja, estimira se na osnovu pozicije maksimuma Wigner-ove distribucije: kˆ = arg{max W Dx(n, k)}. k (4.42) Ovaj estimator je u praksi često korišćen matematički alat. Greške u estimaciji mogu nastati zbog više razloga: bias, greške usljed varijacija unutar auto-članova signala, greške usljed diskretizacije frekvencije, i greške usljed prisustva šuma. U uslovima jakog šuma, dolazi do grešaka u estimaciji koje su impulsne prirode, i koje nadmašuju sve druge pobrojane oblike grešaka. Estimacija trenutne frekvencije u uslovima jakog šuma je problem koji je privukao dosta pažnje u vremensko-frekvencijskoj analizi. Estimacija trenutne frekvencije korišćenjem Wigner-ove distribucije u uslovima jakog šuma Ovdje će biti predstavljen jedan od pristupa za IF estimaciju u uslovima jakog aditivnog šuma. Optimizacija kolonije mrava (engl. Ant Colony Optimization) spada u klasu distribuiranih optimizacionih pristupa i to je paradigma inspirisana biološkim procesima u prirodi. Slijedi kratak opis algoritma koji je predložen u radovima [234, 235]. Vremensko-frekvencijska ravan Wigner-ove distribucije se posmatra kao pravougana mreža dimenzija N × M , sa koordinatama (n, k) ∈ [0, N) × [−M/2M K/2). Agenti (mravi) se inicijalno postavljaju na slučajnim pozicijama, tako da imaju slučajne orjentacije. Tranzicija agenta sa pozicije (n′, k′) ∈ [0, N) × [−M/2, M/2) na novu poziciju (n, k) dešava se u svakoj iteraciji I. Jedna iteracija algoritma je završena kada se svi agenti pomjere sa starih pozicija (n′, k′) na nove pozicije (n, k), ukoliko su im takve tranzicije dozvoljene u datoj iteraciji. U svaku ćeliju (tačku vremensko-frekvencijske ravni) koja je posjećena od strane agenta, dodaje se odred¯ena količina feromona. Nivo feromona koji se deponuje na poziciji (n, k) označen je sa Φ(n, k). U svrhu čuvanja informacija o nivoima feromona u svim tačkama, formira se feromonska matrica Φ. U razmatranom kontekstu, feromonska mapa će biti interpretirana kao nova vremensko-frekvencijska reprezentacija na bazi koje će se vršiti estimacija trenutne frekvencije. Na ovom mjestu važno je istaći da će ovaj pristup obezbijediti eliminaciju nepoželjnih tačaka vremensko-frekvencijske ravni, dok se proces estimacije može interpretirati kao svojesvrstan oblik rekonstrukcije trenutne frekvencije, na osnovu preostalih vremensko-frekvencijskih tačaka u feromonskoj mapi. Opšte pravilo tranzicije agenta sa posmatrane pozicije (n′, k′) na novu poziciju (n, k) definisano je odred¯enom funkcijom mjere, koja će dalje biti označena sa P((nl′),k′)(n, k). U nastavku će biti opisane osnovne veličine i mehanizam estimacije. Inicijalizacija. Na početku ACO algoritma, u γ procenata tačaka vremensko-frekvencijske ravni se slučajno pozicioniraju inteligentni agenti. Inicijalne pozicije dobijaju se generatorom slučajnih brojeva sa uniformnom distribucijom. Inicijalne pozicije su definisane vrijednostima P (n, k) koje se čuvaju u pomoćnoj matrici P, čiji su elementi P (n, k) = r, (n, k) = (n0, k0) {0, (n, k) ≠ (n0, k0) (4.43) gdje je r slučajni broj sa uniformnom raspodjelom iz opsega {1, 2, . . . , 8}. Svaka vrijednost r odgovara nekoj od mogućih orjentacija agenata (1 odgovara orjentaciju gore, 2 označava orjentaciju lijevo-gore itd.) U svakoj sljedećoj iteraciji, orjentacija agenta u tački (n, k) odred¯ena je pomjeranjem sa stare ćelije (n′, k′). Ako se agent, na primjer, pomjerio sa pozicije (n′, k′) = (n + 1, k) na poziciju (n, k), tada je orjentisan na gore, tj. P (n, k) = 1. Kada mrav napusti poziciju (n, k) odgovarajuća vrijednost u matrici P se postavlja na nulu. Agenti komuniciraju kroz koncept depozicije i evaporacije (isparavanja) feromona. Inicijalno, za sve pozicije na kojima se nalaze agenti, postavlja se mala konstantna vrijednost feromona, Φ(0)(n, k) = Φ0, (n, k) = (n0, k0) (4.44) { 0, (n, k) ≠ (n0, k0). gdje je 0 ≤ Φ0 < 1, inicijalni nivo fe romona na početnim pozicijama agenata. Koncept depozicije i evaporacije feromona je krucijalan u kontroli masovnog ponašanja agenata. Pravilo tranzicije agenata. Nakon inicijalizacije, u svakoj iteraciji algoritma agenti se pomjeraju prateći strogo odred¯ena pravila tranzicije. Dozvoljeno je pomjeranje sa pozicije (n′, k′) na jednu od tačaka iz susjednog 3 × 3 okruženja (n, k) ∈ Q(n′, k′). (u objašnjenju će biti zanemareni ivični efekti). Prilikom pomjeranja agenta, vrši se depozicija odred¯enog nivoa feromona. U jednoj ćeliji se može nalaziti samo jedan agent, i pomjeranje je zabranjeno ukoliko su sve okolne ćelije već zauzete agentima. Iteracija ACO algoritma se završava kada se svi agenti, kojima je to dozvoljeno, pomjere za jednu poziciju. Odluka o pomjeranju se vrši na osnovu nivoa feromona u susjednim ćelijama, i orjentacije agenta [234, 235]. Agent lociran u tački (n′, k′) može da se pomjeri na jednu od susjednih 8 lokacija iz skupa Q(n′, k′), koje su na slici 4.1 osjenčene. Odgovarajući uglovi su Θ1(n, k) ∈ {0◦, ±45◦, ±90◦, ±135◦, 180◦}, (za orjentaciju na gore), dok se za ostale orjentacije računaju kao

Θ(n′,k′)(n, k) = Θ1 (n, k) − [P (n′, k′) − 1] · 45◦ za (n, k) ∈ Q (n′, k′), 8

odnosno 3 × 3 okruženje posmatrane tačke (n′, k′). Ugao utiče na funkciju koja, pored nivoa feromona, utiče na mjeru koja definiše tranziciju agenta. U radovima [234, 235] se koristi sljedeća funkcija: 1, 1/2, d Θ(n′,k′)(n, k) = 1/4, ( ) 1/12, 1/20,

Θ(n′,k′)(n, k) = 0◦ Θ(n′,k′)(n, k) = ±45◦ Θ(n′,k′)(n, k) = ±90◦ (4.45) Θ(n′,k′)(n, k) = ±135◦ Θ(n′,k′)(n, k) = 180◦ za (n, k) ∈ Q(n′, k′). 8

Ova funkcija predstavlja svojevrsnu inerciju orjentacije agenta. Sljedeći parametar koji definiše vjerovatnoću tranzicije jeste nivo feromona Φ(n, k). Uticaj je definisan sljedećom funkcijom: Φ(n, k) β g (Φ(n, k)) = 1 + 1 + δΦ(n, k) . (4.46) ( ) Velika vrijednost parametra β definiše visok nivo privlačućeg uticaja feromona na agente. Parametar δ definiše osjetljivost agenta na koncentraciju feromona. Konačno, mjera koja definiše vjerovatnoću tranzicije agenata definisana je na sljedeći Slika 4.1: Ilustracija orjentacije agenta. Agent je orjentisan sjeverno uz P (n′, k′) = 1 uz naznaku vrijednosti d Θ(n′,k′)(n, k) za moguće diskretne pravce. Osjenčena površina označava dozvoljeni domet pomjeranja agenta, Q

(n′, k′). ( ) način: g(Φ(l)(n,k))d(Θ(n′,k′)(n,k)) P((nl ′),k′)(n, k) = (n,k)∈ Q (n′,k′) g(Φ(l)(n,k)) d(Θ (n′,k′)(n,k)) 8

, (n, k) ∈ Q (n′, k′) (4.47) ∑ 0, za ostale tačke. Ažuriranje feromona . Nakon tranzicije agenta na poziciju (n, k) ∈ Q(n′, k′), feromonski nivo se ažurira po pravilu:

Φ(l+1)(n, k) = Φ(l)(n, k) + μ∇(n, k) + ξ. 8

(4.48) gdje je ξ mali konstantni nivo feromona, ∇(n, k) je feromonski gradijent, dok je μ mali pozitivni korak. Za problematiku estimacije trenutne frekvencije, upravo je podešavanje varijabilnog dijela ∇(n, k) ključno za rješavanje problema. Na kraju svake iteracije, konstantni nivo ξ feromona isparava iz cijele feromonske mape, odnosno, za svaku tačku se obavlja ažuriranje u skladu sa pravilom: Φ(l+1)(n, k) = 0, Φ(l)(n, k) − ξ, Φ(l)(n, k) ≥ ξ Φ(l)(n, k) < ξ. , (4.49) U slučaju kada je novi nivo feromona u feromonskoj mapi na poziciji (n, k) nakon ažuriranja negativan, postavlja se na nulu. Gradijent depozicije u estimaciji trenutne frekvencije. U definiciji gradijenta depozicije feromona, u obzir treba uzeti kontekst razmatranog problema, odnosno, estimaciju trenutne frekvencije. U tu svrhu, biće uzeto u obzir nekoliko nepobitnih činjenica [44]. maksimumi WD zašumljenog signala su sa velikom vjerovatnoćom dislocirani sa pozicije trenutne frekvencije, za posmatrani trenutak n, med¯utim, jedna od najvećih vrijednosti WD će ipak biti na trenutnoj frekvenciji. Dislokacija je posljedica jakih šumnih pikova koji svojim intenzitetom mogu prevazići vrijednosti auto-članova WD. Sa druge strane, varijacije trenutne frekvencije u dva susjedna trenutka nijesu biti previše velike, što je karakteristika zastupljena u većini praktičnih primjena, [44, 235]. Uzimajući u obzir ove činjenice, gradijent feromonskog ažuriranja se može definisati na sljedeći način:

∇(n, k) = Ψ(n, k)Ξ(n, k)Λ(n, k),	8

(4.50) gdje su: 1 1 1 Ψ(n, k) = W D(n + j, k + i), 27 i∏=−1 j∑=−1 zatim 1 1 Ξ(n, k) = 1 9 W D(n + j, k + i), i∑=−1 j∑=−1 dok je posljednji član proizvoda definisan u obliku: (4.51) (4.52) Λ(n, k) = max W D(n + i, k + i)

W D(n + i, k − i) 1 1 1 ([i=−1 ∏ 1 i=−1 ∏ 1 W D(n + i, k − 1) W D(n + i, k) W D(n + i, k + 1) . (4.53) i=−1	8

i=−1 i=−1 ∏ ∏ ∏]) Detaljna diskusija ovih funkcija, odnosno, objašnjenje njihove uloge u procesu estimacije trenutne frekvencije, biće izostavljeno na ovom mjestu, pa se čitalac upućuje na detaljnu diskusiju prezentovanu u [235]. Koncept varijabilne populacije agenata. Varijacija populacije omogućena je kroz koncepte reprodukcije, starenja i umiranja agenata [235]. U razmatranom kontekstu, cilj je eliminisati one agente koji se kreću kroz nepoželjne lokacije, odnosno, lokacije kojima odgovaraju niske vrijednosti feromona tokom većeg broja iteracija. Kontrola populacije agenata se može uspostaviti na osnovu feromonske matrice Φ. Na početku razmatranog ACO algoritma, svakom agentu se pridružuje odred¯eni fiksni nivo energije 1 + α. Oni se čuvaju u odgovarajućoj pomoćnoj matrici E, sa elementima: E(0)(n, k) = 1 + α, (n, k) = (n0, k0) (4.54) ⎧⎨ 0, (n, k) ≠ (n0, k0), gdje je 0 ≤ α < 1. ⎩ Tokom tranzicije agenta iz ćelije (n′, k′) u susjednu ćeliju (n, k) ∈ Q(n′, k′), vrši se ažuriranje energije po pravilu: E(l+1)(n, k) = E(l)(n′, k′) + αμ∇(n, k), (4.55) gdje se koristi gradijent ∇(n, k) koji je već izračunat za potrebe ažuriranja feromonske mape. Algoritam 11 Formiranje ACO feromonske mape za estimaciju trenutne frekvencije Input: • Matrica diskretne WD, dimenzija N × M 1: Postaviti agente na slučajnim pozicijama, (n0, k0), formiranjem pomoćne matrice P po pravilu (4.43), i inicijalizovati feromonsku mapu Φ i matricu energije E, prema pravilima (4.44) i (4.54), respektivno. Formirati pomoćnu matricu d prema (4.45). 2: while l ≤ lmax i n k |P (n, k)| > χN do ◅ 0.8 ≤ χ ≤ 1, lmax je maks. br. iteracija 3: Za svaki nen∑ulti ∑element u matrici P izračunati mjeru vjerovatnoće tranzicije P((nl′),k′)(n, k) po (4.47), pomoću (4.45) i (4.46), i izvršiti tranziciju agenta na susjednu ćeliju sa najvećom vrijednošću mjere P((nl′),k′)(n, k), a koja pritom nije zauzeta drugim agentima. 4: Za svaku tačku vremensko-frekvencijske mreže koju je posjetio agent u koraku 3, izračunati gradijent ∇(n, k) prema (4.50) i ažurirati feromonsku mapu Φ prema (4.48) i matricu energije, pomoću (4.55) i (4.56). 5: Ažurirati feromonsku mapu Φ prema (4.49). Ažurirati matricu energije prema (4.57). Ažurirati matricu pozicija P prema (4.58). 6: end while Output: • Feromonska mapa Φ Nakon toga, matrica energije se ažurira tako da se napuštenoj ćeliji (n′, k′) pridružuje vrijednost nula: E(l+1)(n′, k′) = 0.

(4.56) Na kraju svake iteracije, svim pozicijama (n, k) ∈ [0, N) × [−M/2, M/2) se energija globalno umanjuje za konstantnu vrijednost α:

E(l+1)(n, k) = E(l)(n, k) − α. 8

(4.57) Ovom prilikom se svi agenti za koje važi E(n,k) ≤ 0 uklanjaju , brisanjem odgovarajućih elemenatamatriceP,zasvako

(n,k)∈[0,N)×[− M /2, M /2): P (l+1)(n, k) = 0, ako je E(l+1)(n, k) < 0. 8

(4.58) Uslov prekidanja može da bude minimalno dozvoljeni broj mrava, npr. 80%–100% od broja vremenskih tačaka N . Opisana procedura je rezimirana u Algoritmu 11. Detaljna diskusija svih parametara, i rezultati numeričke evaluacije njihovih vrijednosti, mogu se naći u radu [235].

|W D(n, k)| Φ (n, k), Iteracija 1 Φ (n, k), Iteracija 2 k n (a) n 103

(b) n (c) Φ(n, k), Iteracija 3 Φ(n, k), Iteracija 4 Φ(n, k), Iteracija 5 k n (d) n (e) Φ(n, k), Iteracija 6 Φ(n, k), Iteracija 100 k k n (g) n (h) n (f) Estimacija IF 30 Trenutna frekvencija 20 10 0 -10 -20 -30 0 50 100 150 200 250 n (i) Slika 4.2: Primjer estimacije trenutne frekvencije pomoću Wigner-ove distribucije i ACO algoritma, u uslovima šuma velikog intenziteta: (a) Wigner-ova distribucija zašumljenog signala; (b)-(h) izgled feromonske mape u specifičnim iteracijama; (i) pored¯enje rezultata dobijenih ACO pristupom (crveno), Viterbi algoritmom (plavo), maksimumi WD (isprekidana linija) i originalna trenutna frekvencija (kružići). Estimacija trenutne frekvencije iz feromonske mape. Feromonska mapa Φ se interpretira kao nova vremensko-frekvencijska reprezentacija, robustna na uticaj šuma. Problem estimacije trenutne frekvencije sada postaje: kˆ = arg max Φ(n, k). k (4.59) Na dobijeni estimat kˆ se može primijeniti median filter, i odgovarajuća kubična interpolacija [235]. Primjer 4.1. Razmatra se složenoharmonijski FM signal x(n) = exp j2 sin 13π(n + 32) + j3 sin 5π(n + 32) + ε(n) ((256) (256 (4.60))) dužine Ns = 320 odbiraka, definisan u trenucima n ∈ [−N/2,3N/2), pri čemu se WD računa za srednjih N = 256 tačaka. Signal je zašumljen jakim aditivnim bijelim kompleksnim Gausovim šumom ε(n). Dužina primijenjenog prozora je M = 64, a odnos signal-šum je SNR = −2 dB. Ilustracija WD zašumljenog signala, izgled feromonske mape u karakterističnim iteracijama i rezultati estimacije trenutne frekvencije prikazani su na slici 4.2. ACO pristup obezbjed¯uje estimaciju uprkos relativno velikim varijacijama trenutne frekvencije i izraženom uticaju šuma. 4.1.5 S-metod Osim u slučaju stacionarnih signala, STFT, odnosno spektrogram, u opštem slučaju karakterišu se slabom koncentracijom signala. Sa druge strane, STFT je linearna transformacija, pa je ne karakteriše pojava neželjenih kros-članova u slučaju multikomponentnih signala. WD posjeduje sposobnost znatno boljeg koncentrisanja komponenti signala, a u slučaju LFM signala daje idealnu koncentraciju. Med¯utim, i pored velikog broja poželjnih osobina, karakteriše je pojava neželjenih kros-članova u slučaju multikomponentnih signala. U cilju očuvanja dobrih i eliminacije loših strana ovih reprezentacija, uveden je S-metod. PWD se može izraziti u funkciji od STFT na sljedeći način: 1 ∞ P W D(t, Ω) = π

STFT$(t, \Omega+\Theta)$STFT$^*(t, \Omega-\Theta)d\Theta$. 16

(4.61) −∫∞ Prethodna relacija direktno vodi do definicije nove vremensko-frekvencijske reprezentacije, poznate pod nazivom S-metod (SM): 1 ∞ SM(t,Ω) = π P (Θ

)STFT$(t, \Omega+\Theta)$STFT$^*(t, \Omega-\Theta)d\Theta$, 16

(4.62) −∫∞ gdje je P (Θ) frekvencijski prozor ograničene širine. U slučaju pravougaonog prozora sa P (Θ) = 0, |Θ| > Lp,S-metod postaje: Lp SM(t,Ω) = 1 π P (Θ

)STFT$(t, \Omega+\Theta)$STFT$^*(t, \Omega-\Theta)d\Theta$. 16

(4.63) −∫Lp Ukoliko je P (Θ) = πδ(Θ) S-metod se svodi na spektrogram, dok se za P (Θ) = 1 dobija WD. U slučaju ove vremensko-frekvencijske reprezentacije, marginalni uslovi ne moraju biti zadovoljeni. U slučaju multikomponentnih signala, S-metod omogućava dobijanje reprezentacije signala kod koje je za svaki auto-član postignuta koncentracija pseudo-Wigner-ove distribucije, dok su kros članovi ili potpuno eliminisani, ili su značajno redukovani. Parametar Lp se bira tako da prozor P (Θ) omogućava potpunu integraciju (4.63) duž autočlanova, ali da je pritom uži od rastojanja izmed¯u auto-članova, kako bi se izbjegla pojava kros-komponenti. Dakle, integracijom u izrazu (4.63) poboljšava se koncentracija auto-članova sve dok Θ ne postane dovoljno veliko tako da ST F T (t, Ω + Θ) pripada jednoj komponenti, a ST F T ∗(t, Ω − Θ) drugoj. Tada bi integracijom njihovog proizvoda došlo do pojave kros-člana. U slučaju preklopljenih komponenti, do kros-članova dolazi samo izmed¯u njih, u posmatranom trenutku, kao što je to bio slučaj sa spektrogramom. Za multikomponentni signal oblika P x(t) = xp(t), (4.64) ∑p=1 uz pretpostavku da svakoj pojedinačnoj komponenti xp(t) u vremensko-frekvencijskoj ravni pripada odgovarajući region Dp(t, Ω), p = 1, . . . , P , i uz dodatnu pretpostavku o nepreklapanju ovih regiona, važi sljedeće svojstvo S-metoda: P SMx(t,Ω) = PWDxp(t,Ω), (4.65) ∑p=1 odnosno, S-metod je jednak sumi PWD pojedinačnih komponenti signala, ako je širina pravougaonog prozora P (Θ) za tačku

(t, Ω) Lp (t, Ω) = Bp (t) − |Ω − Ω0p (t)| , (t, Ω) ∈ Dm (t) { 0, ostalo (t, 84

Ω), (4.66) gdje je dužina p-tog regiona po frekvenciji Ω za dato t označena sa 2B(t), a centralna frekvencija sa Ω0p(t). Diskretna realizacija S-metoda U diskretnoj formi, S-metod je definisan sljedećim relacijama: Ld S

M (n, k) = P (i) S T F T (n, k + i)S T F T ∗ (n, k − i) 54

(4.67) i=∑−Ld Ld S M (n, k) = |S T F T (n, k)|2 + 2 Re [i=1 S

T F T (n, k + i)S T F T ∗ (n, k − i) 68

] , (4.68) ∑ gdje je pretpostavljen pravougaoni prozor P (i) = 1, −Ld ≤ i ≤ Ld. Suma u prethodnoj relaciji omogućava poboljšanje koncentracije spektrograma, do postizanja koncentracije pseudo-Wigner-ove distribucije. Dok je za spektrogram period odabiranja signala u skladu sa teoremom o odabiranju, iz (4.40) je jasno da je za PWD neophodan duplo manji period odabiranja. S-metod zahtijeva isti period odabiranja kao i spektrogram, što je još jedna značajna prednost u odnosu na Wigner-ovu distribuciju. 4.2 Rekonstrukcija LFM komponenti ISAR signala nakon uklanjanja micro-Doppler-a Osobina vremensko-frekvencijskih reprezentacija da koncentrišu energiju signala u okolini trenutne frekvencije, direktno sugeriše da ih je moguće razmatrati u kontekstu kompresivnog odabiranja i rekonstrukcije rijetkih signala. U ovoj sekciji biće ilustrovana mogućnost rekonstrukcije nedostajućih tačaka u vremensko-frekvencijskoj ravni. Formiranje radarskih slika je klasičan primjer primjene vremensko-frekvencijske analize, [193–200, 202]. Prisustvo rotirajućih ili vibrirajućih djelova radarske mete uzrokuje pojavu micro-Doppler (m-D) efekta, [193–200,202]. U cilju fokusiranja radarskih slika i poboljšavanja njihove čitljivosti, već dugo je aktuelna problematika razdvajanja rigid body (RB) i m-D dijela signala koji odgovara radarskoj meti. Rigid body predstavlja dio radarskog signala koji sadrži informacije o čvrstim djelovima posmatrane mete, koji su reflektovali poslati radarski signal. U slučaju kada je radarski signal obrad¯en tako da je kompenzovano ubrzanje mete - rigid body čine stacionarne komponente. U suprotnom, on je sastavljen od LFM komponenti, u posmatranom range-u, [193]. Više informacija o fizici ISAR radarskih sistema (engl. Inverse synthetic-aperture radar) mogu se naći u literaturi [193]. Micro-Doppler djelovi signala nastaju kao posljedica kretanja djelova radarskih meta i karakteriše ih pretežno visok nivo nestacionarnosti. U slučaju rotirajućih i vibrirajućih reflektora, uobičajeno se modeluje sinusoidalno frekvencijski modulisanim komponentama. Razdvajanje RB od m-D, zasnovano na STFT i L-statistici, proučavano je u radu [193], gdje je predložena veoma efikasna tehnika koja produkuje visoko koncentrisani RB nakon izdvajanja m-D-a. Rekonstrukcija RB u slučaju nekompenzovanog ubrzanja mete razmatrano je u [193], gdje je lokal-polinomijalna Furijeova transformacija (engl. Local Polynomial Fourier Transform, LPFT) razmatrana kao polazna reprezentacija. Takav pristup zahtijeva poznavanje parametra linearne modulacije, ili tzv. chirp rate, kojim je neophodno obaviti kompenzaciju kretanja meta. Ovaj parametar u opštem slučaju nije unaprijed poznat, [193] i ne može biti estimiran na osnovu polaznog signala. U ovoj sekciji razmotrićemo mogućnosti njegove estimacije primjenom mjera koncentracije, i upotrebe postupka u: (a) aproksimaciji RB komponenti primjenom L-statistike i (b) njegove primjene u kontekstu egzaktne rekonstrukcije RB komponenti primjenom koncepata kompresivnog odabiranja. 4.2.1 Model signala Razmatra se radar sa kontinualnim talasima (engl. continuous wave - CW radar) koji šalje signale u formi N koherentnih čirpova (LFM komponenti). Ukoliko je udaljenost mete označena sa d(t), a c predstavlja brzinu svjetlosti, tada signal koji se reflektuje od mete kasni za td = 2d(t)/c u odnosu na poslati signal. U posmatranom modelu podrazumijevaju se standardne operacije pretprocesiranja signala (kao na primjer – demodulacija signala na osnovni opseg), [193]. Kao što je to standardno podrazumijevano u radarskoj literaturi [193], u cilju analize nestacionarnosti kros-range-a radarske slike, razmatra se samo Doplerov dio primljenog signala tačkaste mete, u kontinualnom vremenu u kojem je meta u dometu radara (engl. dwell time): s(t) = σe j2d(t)ω0 , c (4.69) gdje σ označava koeficijent refleksije mete a ω0 označava frekvenciju na kojoj radar funkcioniše. Pretpostavlja se da je vrijeme ponavljanja impulsa Tr , sa Nc odbiraka u svakom čirpu, i da je vrijeme koherentne integracije (engl. coherence integration time – CIT) dato izrazom Tc = N Tr . Doppler-ov dio primljenog signala, koji odgovara RB-u, može se modelovati kompleksnim sinusoidama [193]. Med¯utim, nekompenzovano ubrzanje uzrokovaće pojavu LFM signala u reprezentaciji RB komponenti. Pokretni djelovi mete, pretežno rotirajući i vibrirajući, uzrokuju pojavu m-D, koji se manifestuje u vidu dodatnih nestacionarnih komponenti primljenog signala. Rotirajući i vibrirajući djelovi modeluju se sinusoidalnim FM signalima, dok je model kompleksniji u slučaju drugih oblika kretanja. U slučaju RB od K tačaka, i m-D kojeg uzrokuje D reflektora, opšti model signala je [193]: K D s(n) = σBiejyBin + σRiejARi sin(ωRin+Θi), (4.70) ∑i=1 ∑i=1 gdje je n = 0, . . . , N − 1, σBi , σRi su koeficijenti refleksije RB-a i rotirajućih reflektora, respektivno, yBi odgovara poziciji RB reflektora, ARi je proporcionalno rastojanju od rotirajućeg reflektora do centra rotacije. Ugaone frekvencije ωRi proporcionalne su učestanosti rotacije i-tog m-D reflektora. Više informacija o ovom modelu može se naći u literaturi [193]. 4.2.2 Razdvajanje stacionarnih komponenti od micro-Doppler-a Pretpostavimo da je primljeni signal s(t) adekvatno odabran, i da se dalja obrada vrši nad diskretnim odbircima signala s(n). Iako su RB komponente u slučaju kompenzovanog ubrzanja mete stacionarne, usljed varijabilnog frekvencijskog sadržaja micro-Doppler-a, FT je teško primjenjivati u analizi i obradi ovakvih signala. Stoga se koriste pristupi zasnovani na vremensko-frekvencijskoj analizi. Kao što je to bio slučaj kod DFT, DCT i Hermitske transformacije, sposobnost vremensko-frekvencijske reprezentacije da koncentriše signal kvantifikuje se mjerama koncentracije: p Mpp = TFR(n,k)p 1) (4.71) (∑n∑p| Kod linearnih reprezentacija može se koristiti ℓ1-norma, koja se dobija za p = 1, kao u slučaju | | | kompresivnog odabiranja. Posmatrajmo drugu formu kratkotrajne Furijeove transformacije (STFT) analiziranog signala: N−1 ST F T (n, k) = s(m)w(m − n)e−j2πmk/N , (4.72) m∑=0 gdje se prozorska funkcija w(m) koristi za lokalizaciju frekvencijskog sadržaja. U ovoj formi STFT-a za prozor važi: w(n) ≠ 0 za −M/2 ≤ m ≤ M/2 − 1 i on je dopunjen nulama do dužine signala N. Orignalna koncentracija FT može se dobiti iz (4.72) pomoću: N−M/2 S(k) = ST F T

(n, k) n=∑M/2 N −1 N **−M/2** = s **(m)** w(m − **n) e−j2πmk/N . (4.** 6

73) m∑=0 [n=∑M/2] Budući da važi Nn=−MM//22 w(m − n) ≈ const, rezultujući prozor je veoma sličan pravougaonom, s∑obzirom da je, mimo prelaznih djelova od po M/2 tačaka na krajevima, konstantan u posmatranom intervalu. Stoga, posmatrani izraz (4.73) može se smatrati Furijeovom transformacijom analiziranog signala, sa koncentracijom koja je bliska koncentraciji FT računate za pravougaoni prozor. Tada se m-D komponente iz ST F T (n, k) mogu izdvojiti sortiranjem STFT vrijednosti po vremenskom indeksu, i uklanjanjem odred¯enog procenta najvećih vrijednosti. Sumiranjem preostalih tačaka po frekvencijskom indeksu, dobija se aproksimacija Furijeove transformacije RB-a. Algoritam za razdvajanje micro-Doppler-a od stacionarnih komponenti U slučaju stacionarnog RB-a, razdvajanje od m-D može biti obavljeno na sljedeći način. Za svaki frekvencijski indeks k, označimo odgovarajući set STFT tačaka sa: Sk = {S T

F T (n, k), n = M /2, ..., N − M /2}. 6

(4.74) Sortiranjem elemenata ovog skupa po vremenskom indeksu, dobija se skup Ψk čiji su elementi Ψk(ni) ∈ Sk, ni ∈ {M/2, . . . , N − M/2}. Ovi elementi, za svako k zadovoljavaju |Ψk(n1)| ≤ |Ψk(n2)| ≤ ··· ≤ |Ψk(nN−M)|. (4.75) Razdvajanje RB i m-D pomoću L-statistike podrazumijeva da se iz Ψk, za svako k, odbacuje NU najvećih i ND najmanjih elemenata. Ovo je vektor-kolona dimenzija M × 1. Ako je U procenat eliminisanih elemenata sa najvećim vrijednostima, a D procenat elminisanih elemenata sa najmanjim vrijednostima, tada se odbacuje ukupno NU = int[(N − M)(1 − U)/100] najvećih i ND = int[(N − M)(1 − D)/100] najmanjih elemenata, odnosno, ukupno Q = D + U procenata STFT tačaka. Za dato k, skup dostupnih pozicija je Lk i on predstavlja podskup od {n1, n2, . . . , nN−M }. Skupovi Lk za svako k = 0, . . . , M − 1 formiraju skup NA koji sadrži indekse (ni, ki) dostupnih, odnosno zadržanih, vremensko-frekvencijskih tačaka. Budući da važi N−M/2 N−M SΨ(k) = STFT(n,k) = Ψk(ni), (4.76) n=∑M/2 ∑i=1 tada se na bazi dobijenih podskupova Lk skupa {n1,n2,...,nN−M}, računa L-estimacija SL(k) = ST F T (n, k). (4.77) n∑∈Lk Ovo je jednostavan način da se izvrši aproksimacija RB komponenti. Stacionarne komponente su, za zadatu frekvenciju, prisutne za sve vremenske indekse. Kako su m-D komponente vremenski promjenljive, sabiranjem STFT tačaka po vremenskom indeksu, na pozicijama RB komponenti dobijaju se koncentrisani pikovi, usljed sabiranja koje je u fazi, čak i nakon uklanjanja m-D djelova. Loše koncentrisane m-D komponente koje ostaju nakon uklanjanja Q% STFT tačaka se za svako k sabiraju sa različitim - slučajnim fazama, pa se stoga usrednjavaju. 4.2.3 Izdvajanje micro-Doppler-a u slučaju nekompenzovanog ubrzanja radarske mete Kretanje radarske mete sa ubrzanjem uzrokuje pojavu LFM signala kao RB komponenti. U tom slučaju, u razmatranom modelu (4.70), stacionarne RB komponete se zamjenjuju LFM siganlima koji imaju nepoznati chirp rate parametar a. Rezultujući RB je nestacionaran, pa prethodno opisani postupak uklanja i njegove značajne djelove. U cilju eliminisanja ovog oblika nestacionarnosti, može se koristiti LPFT oblika:

M/2−1 LP F Tα **(n, k) = s(n + m)w(m)e−j2π[** Mm **k+α(** Mm)2], **m=∑−M/2** 6

kako bi se odredio demodulišući optimalni parametar αopt = a. Ovaj parametar ne može biti estimiran na osnovu polaznog signala, već L-statistika mora biti involvirana u postupku pretrage. Jedan pristup je direktna pretraga u zadatom prostoru mogućih vrijednosti parametra, i pronalaženje one vrijednosti koja odgovara najmanjoj mjeri koncentracije RB komponenti. Numerički efikasniji pristup je korišćenje iterativnog algoritma koji je zasnovan na mjerama koncentracije, a koji je inspirisan gradijentim algoritmima koji su prezentovani u prethodnim glavama ove disertacije [195]: Korak 0: Inicijalizovati ∇ = N/2 i α(0) = 0. Zatim, ponavljati korake 1-4, dok ne bude ispunjen odgovarajući kriterijum za zaustavljanje. Korak 1: Izračunati: M/2−1 LPFTα

+(n,k) = s(n + m)w(m)e−j2π[Mm **k+(α+∇)(** Mm)2], **m=∑−M/2 M/** 6

2−1 LPFTα

−(n,k) = s(n + m)w(m)e−j2π[Mm **k+(α−∇)(** Mm)2], **m=∑−M/2** Korak **2:** 6

Primijeniti L-statistiku na obije reprezentacije LPFTα+(n,k) i LPFTα−(n,k). Polazeći od zadatih LPFT tačaka

L±k (n) = {LP F Tα± **(n, k), n = M /2, ..., N − M /2}** 6 sortirati vrijednosti ovih skupova po indeksu n u cilju dobijanja novih, sortiranih skupova,

Ψ+k(ni) ∈ L+k(n), and Ψ−k(nj) ∈ L−k(n), ni,nj ∈ {M/2,..., N − M/ 79

2} koji za dato k zadovoljavaju: |Ψ+k(n1)| ≤ |Ψ+k(n2)| ≤ ··· ≤ |Ψ+k(nN−M)| i |Ψ−k(n1)| ≤ |Ψ−k(n2)| ≤ ··· ≤ |Ψ−k(nN−M)|. Odbaciti najvećih NQ vrijednosti iz Ψ+k(ni) i NQ vrijednosti iz Ψ−k(nj), gdje je NQ = int[(N − M)(1 − Q)/100], dok je Q procenat odbačenih vrijednosti. Na osnovu dobijenih podskupova L+k i L−k of {n1,n1,...,nN−M}, izračunati SL+(k) = LP F Tα+ (n, k), n∑∈Lk SL−(k) = LP F Tα− (n, k). n∑∈Lk (4.78) (4.79) Korak 3: Aproksimirati gradijent mjere koncentracije na osnovu razlike M −1 M −1 ∇ = |SL+(k)| − |SL−(k)|. ∑k=0 ∑k=0 Korak 4: Ažurirati parametar korišćenjem pristupa iz metoda najbržeg spuštanja: α(l+1) = α(l) − μ∇. (4.80) (4.81) Rezultujući parametar α se dalje koristi za demodulaciju signala i uklanjanje m-D djelova, kao i za rekonstrukciju RB primjenom algoritama za kompresivno odabiranje. U numeričkom primjeru iz ove sekcije, korišćen je korak μ = NMQ . Indeks iteracija je označen sa l. 4.2.4 Rekonstrukcija rigid body dijela signala Neka je sa sα(n) = s(n)e−j2πα(n/N)2 označen signal koji se demoduliše optimalnim parametrom α. Odgovarajući vektor signala je sα = [sα(0),sα(1),...,sα(N − 1)]. Ako je WM transformaciona matrica dimenzija M × M diskretne Furijeove transformacije, sa elementima exp(−j2πmk/M), tada se STFT demodulisanog signala N−1 ST F Tα(n, k) = s(n + m)w(m)e−j2πmk/N m∑=0 u matričnom obliku može zapisati kao: WM 0 · · · 0 STFTα = ⎡ 0 WM · · · 0 . . ⎤ . . . . sα ⎢ 0 0 · · · STFTα= Wsα = WW−N1Sα, ⎣ WM ⎥⎦ (4.82) (4.83) gdje je Sα vektor DFT koeficijenata računatih za signal originalne dužine, i jedinični pravougaoni prozor. Pretpostavljeno je da se STFTα(n,k) računa u tačkama 0, M, 2M,...,N−M.SveSTFTvrijednostisekombinujuujedanvektor: STFTα = [STFTM (0)T , . . . , STFTM (N − M)T]T . (4.84) Diskretno vrijeme 0 20 40 60 80 Frekvencija 100 120 (a) Diskretno vrijeme 0 20 40 60 80 Frekvencija 100 120 (b) Indeks 200 400 600 Frekvencija 800 1000 (c) Indeks 200 400 600 Frekvencija 800 1000 (d) Amplituda (e) 100 200 300 400 500 Frekvencija 600 700 800 900 1000 Amplituda (f) 100 200 300 400 500 Frekvencija 600 700 800 900 1000 Amplituda (g) 100 200 300 400 500 Frekvencija 600 700 800 900 1000 Amplituda (h) 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000 Frekvencija Slika 4.3: Razdvajanje Rigid body i m-D djelova u slučaju kada nije kompenzovano ubrzanje radarske mete: (a) STFT originalnog signala, koja je izračunata korišćenjem izraza (4.72); (b) STFT signala demodulisanog sa pogodno odabranim α, korišćenjem prezentovanog algoritma; (c) sortirane vrijednosti originalnog signala; (d) sortirane vrijednosti STFT prikazane na slici (b), (e) Furijeova transformacija originalnog signala; (f) Furijeova transformacija demodulisanog signala; (g) Furijeova transformacija dobijena sabiranjem 40% najmanjih apsolutnih vrijednosti STFT-a demodulisanog signala po vremenu; (h) Furijeova transformacija dobijena sabiranjem najmanjih 40% apsolutnih vrijednosti STFT-a demodulisanog signala po vremenskom indeksu, dobijene korišćenjem izraza (4.77). Za svaki posmatrani trenutak, STFT vektori su STFTM

(n) = [S T F T (n, 0), . . . , S T F T (n, 106

M − 1)], (4.85) 170 Diskretno vrijeme Indeks Frekvencija (a) Frekvencija (b) Diskretno vrijeme Diskretno vrijeme 0 50 Frekvencija 100 (c) 0 50 Frekvencija 100 (d) Amplituda (e) 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000 Frekvencija Slika 4.4: STFT sa nepreklopljenim prozorom kao baza za CS-rekonstrukciju rigid body dijela signala: (a) STFT adekvatno demodulisanog signala (pomoću parametra α koji je dobijen prezentovanim algoritmom za pretragu), računata po izrazu (4.82); (b) STFT vrijednosti nakon sortiranja po vremenskom indeksu; (c) STFT originalnog rigid body dijela definisanog izrazom (4.91); (d) STFT rekonstruisanog rigid body dijela, koja je računata po izrazu (4.72) za DFT koeficijente prikazane na slici (e) – ovaj signal je modulisan parametrom α tako da formira originalni rigid body; (e) DFT koeficijenti koji odgovaraju stacionarnim komponentama demodulisanog signala, koji je rekonstruisan korišćenjem prezentovanog CS pristupa. i oni se računaju kao STFTM (n) = WM sα(n), (4.86) gdje je sα(n) = [sα(n), . . . , sα(n + M − 1)]T . Razmatrana notacija se lako može generalizovati na slučaj STFT sa preklopljenim prozorima. Uočimo da važi: STFTα= Wsα = WW−N1Sα. (4.87) Ukoliko je α adekvatno odred¯en, DFT vektor Sα je rijedak. Ovaj vektor se može izraziti u 171 formi: Sα = WN W−1STFTα. (4.88) Uvedimo notaciju A = WW−N1. Primjenjujući tehniku za uklanjanje m-D djelova, ostaje samo podskup vremensko-frekvencijskih tačaka koje formiraju vektor dostupnih STFT vrijednosti, u oznaci STFTCS. Elementi ovog vektora su ST F T α(i) = ST F T (ni, ki), gdje je (ni, ki) ∈ NA, skup vremensko-frekvencijskih tačaka koje su zadržane nakon primjene L-statistike (dostupne vrijednosti). One zadovoljavaju: STFTCS = ACSSα, (4.89) gdje je matrica mjerenja ACS formirana na osnovu matrice A odbacivanjem vrsta koje odgovaraju eliminisanim vremensko-frekvencijskim tačkama. Vektor STFTCS može biti interpretiran kao vektor dostupnih odbiraka (mjerenja) u kontekstu kompresivnog odabiranja. Tada RB komponente mogu biti rekonstruisane rješavanjem minimizacionog problema [202]: min ‖Sα‖1 subject to STFTCS = ACS Sα. (4.90) Problem može biti riješen korišćenjem neke od standardnih tehnika za rekonstrukciju, na primjer, OMP algoritmom. 4.2.5 Numerički rezultati Primjer 4.2. Razmatra se signal K D s(n) = σBiej2π[a(Nn)2+biNn]+jϕi + σRiejARisin(ωRin+Θi)+j2πciNn+j2πdi(Nn)2. (4.91) ∑i=1 ∑i=1 Ovaj signal odgovara jednom range binu radarske slike. Prva suma odgovara modelu RB reflektora sa nekompenzovanim ubrzanjem, gdje figuriše nepoznati chirp rate a. Druga suma modeluje m-D. Dužina signala je N = 1024. Razmatra se RB sa K = 4 komponente. Parametri komponenti su: σBi = [1, 0.5, 1.5, 1], bi = [125, −125, 245, −255] i ϕi = [0, 0, π/4, −π/3] for i = 1, 2, 3, 4, respektivno. Nepoznati chirp rate je a = 360, dok se m-D sastoji od dvije komponente, D = 2, a njegovi parametri su σRi = [7, 5], Θi = [0, π/2], ARi = [90, 160], ωRi = [2.5, 1.95], ci = [0, 0] i di = [0, 0], za i = 1, 2, respektivno. Prvo primjenjujemo L-statistiku za razdvajanje rigid body i m-D djelova, korišćenjem procedure iz odjeljka 4.2.2. Parametar α = 280 za demodulisanje (dečirpovanje) se dobija korišćenjem algoritma prezentovanog u sekciji 4.2.3. Rezultati su predstavljeni na slici 4.3. Inicijalna STFT, računata pomoću prozora širine M = 128 je predstavljena na slici 4.3 (a), dok je odgovarajuća reprezentacija sa sortianim vrijednostima data na slici 4.3 (c). STFT signala dečiropovanog pomoću optimalnog α predstavljena je na slici 4.3 (b), dok je odgovarajuća reprezentacija sa sortiranim STFT vrijednostima data na slici 4.3 (d). Furijeova transformacija (DFT) originalnog signala prezentovana je na slici 4.3 (e). Odvajanje m-D i rigid body djelova na bazi STFT ne daje zadovoljavajuće rezultate, pošto su uklonjeni i veći djelovi RB dijela. Furijeova transformacija dobijena sabiranjem Q = 40% najmanjih apsolutnih vrijednosti sortirane STFT sa slike Fig. 4.3 (d) data je na slici 4.3 (g). Furijeova transformacija dobijena sabiranjem STFT vrijednosti prema (4.77) prikazana je na slici 4.3 (h). Ovaj primjer ilustruje činjenicu da rigid body rekonstrukcija korišćenjem izraza (4.77) daje visoko koncentrisane pikove. Med¯utim, ovi rezultati se mogu poboljšati ukoliko se problem razmatra u kontekstu kompresivnog odabiranja. STFT signala sα(n) dečirpovanog optimalnim α, računata sa nepreklopljenim prozorima, predstavljena je na slici 4.4 (a). Ovdje je korišćen prozor širine M = 32. Procedura za L-statistiku, prezentovana u odjeljku 4.2.2, primijenjena je na ovu STFT, pri čemu je uklonjeno U = 40% vremensko-frekvencijskih tačaka sa najvećim vrijednostima, i D = 20% tačaka sa najmanjim vrijednostima. Nakon uklanjanja m-D dijela signala, problem (4.90) je riješem OMP algoritmom (Algoritam 1). Rezultati rekonstrukcije prikazani su na slici 4.4 (e). Kako bi naglasili tačnost rekonstrukcije, na slici 4.4 (c) prikazan je originalni rigid body definisan izrazom (4.91) in Fig. 2c. On se poredi sa nekompenzovanim rigid body dijelom koji je dobijen računanjem STFT nad inverznom DFT od koeficijenata koji su prikazani na slici 4.4 (e), modulisanih optimalnim parametrom α. 4.3 Dekompozicija multivarijantnih signala – izdvajanje i rekonstrukcija komponenti Kao što je rečeno, signali sa vremenskim varijacijama spektralnog sadržaja ne mogu se jednostavno okarakterisati standardnom Furijeovom analizom. Oni se uobičajeno proučavaju u kontekstu vremensko-frekvencijske analize [44, 204–210]. Istraživanjem u ovoj oblasti razvijene su brojne reprezentacije i algoritmi koji su namijenjeni za procesiranje univarijantnih signala. Njihova uobičajena karakterizacija obavlja se kroz tzv. amplitudske i frekvencijski modulisane oscilacije, [44], [211]. Nedavno, progres u razvoju senzorske tehnologije za multidimenzione signale propraćen je povećanim naučnim interesovanjem za vremensko-frekvencijsku analizu multikanalnih (multivarijantnih ili multidimenzionih) podataka. Razvoj senzorske tehnologije uzrokovao je pojavu multivarijantnih podataka. Novouvedeni koncepti bivarijantnih i trivarijantnih oscilacija (npr. 3D inercijalni senzori, 3D anemometri [211]), ali i generalizacija ovog koncepta na prozivoljan broj kanala, otvorili su mogućnost korišćenja med¯ukanalnih zavisnosti signala u objedinjenoj vremensko-frekvencijskoj analizi [212–214]. Koncept multivarijantnih modulisanih oscilacija predložen je u [212], uz pretpostavku da jedna zajednička oscilacija najbolje odgovara individualnim oscilacijama iz svih kanala. Drugim riječima, objedinjena trenutna frekvencija karakteriše multikanalne podatke u smislu objedinjene frekvencije za sve pojedinačne kanale. Ona se definiše kao prosječna trenutna frekvencija u svim pojedinačnim kanalima, sa pridruženim odgovarajućim težinskim parametrima. U cilju estimacije objedinjene trenutne frekvencije multikanalnih signala, syncrosqeezed transformacija, koja spada u kategoriju visoko koncentrisanih vremensko-frekvencijskih reprezentacija, nedavno je proširena na multivarijantni model [211]. U cilju ekstrakcije lokalne dinamike oscilacija multivarijatnih signala tzv. wavelet ridge algoritam je takod¯e poziciniran u ovom kontekstu [212]. Drugi, veoma popularni koncept, tzv. empirical mode decomposition – EMD, je takod¯e proučavan za multivarijantne podatke, [220]- [224]. Med¯utim, uspješna dekompozicija multikomponentnih signala zasnovana na EMD pristupu moguća je samo za signale koji se ne preklapaju u vremensko-frekvencijskoj ravni. Zbog mogućnosti visoko-koncentrovane reprezentacije signala, i drugih poželjnih osobina, Wigner-ova distribucija se uobičajeno koristi u brojnim estimatorima trenutne frekvencije koji su razvijeni u okviru vremensko-frekvencijske analize [44, 209, 210]. Med¯utim, u slučaju multikomponentnih signala, kao što je već rečeno, pojavljuju se nepoželjni kros-članovi, nekada u potpunosti maskirajući prisustvo auto-članova. Usljed toga, razvijene su brojne druge reprezentacije, sa namjerom očuvanja koncentracije Wigner-ove distribucije i istovremnenog suzbijanja kros-članova, u koje spada i S-metod [44]. Ova reprezentacija je korišćena kao baza za dekompoziciju multikomponentnih signala, [204]. Takav oblik dekompozicije omogućava nezavisnu analizu i karakterizaciju komponenti signala omogućavajući estimaciju trenutne frekvencije svake nezavisne komponente [204]-[207]. U ovoj sekciji, izučavaćemo Wigner-ovu distribuciju primijenjenu na dekompoziciju multivarijantnih multikomponentnih signala. Biće pokazano da jaka med¯uzavisnost modulacija pojedinačnih komponenti iz različitih kanala u objedinjenoj vremensko-frekvencijskoj analizi dovodi do redukcije neželjenih kros-članova. Matrica inverzne multivarijantne Wigner-ove distribucije će biti dekomponeovana na sopstvene vektore, koji sadrže komponente signala u vidu njihove linearne kombinacije. Koeficijenti ove linearne kombinacije će biti proglašeni za varijable minimizacije mjere koncentracije primjenom algoritma zasnovanog na metodu najbržeg spuštanja. Ovaj algoritam traži one koeficijente linearne kombinacije koji daju najbolju moguću koncentraciju pojedinačnih komponenti. Upravo zahvaljujući činjenici da koristi med¯uzavisnosti signala iz pojedinačnih kanala, ova dekompozicija će biti primjenjiva i u slučaju signala koji se preklapaju u vremensko-frekvencijskoj ravni, i to na takav način da integrited izdvojenih komponenti bude očuvan. Konvencionalna vremensko-frekvencijska analiza ne može biti iskorišćena za razdvajanje komponenti koje se sijeku u vremensko-frevkencijskoj ravni, a pri tome imau proizvoljne forme. Preklopljene komponente se mogu pojaviti u mnogim primjenama obrade signala. Na primjer, u obradi radarskih signala, ukoliko se potpis radarske mete preklapa sa klaterom (engl. clutter). Algoritam koji će biti predstavljen podrazumijeva da su dostupni signali sa med¯usobno nezavisnim fazama. Oni se mogu dobiti polarizacijom, ili sistemima sa više antena [225]. Algoritmom se mogu tretirati i signali sa malim varijacama frekvencije, kada su promjene amplitude istog reda kao promjene faze. Takvi su, na primjer, EKG signali. Multivarijantne fome ovih signala se dobijaju pomoću više senzora koji su pozicionirani na različitim lokacijama. 4.3.1 Multivarijantni signali i Wigner-ova distribucija Neka se razmatra multivarijantni signal a1(t)ejφ1(t) x(t) = ⌈ a2(t)ejφ2(t) ⌉. (4.92) ∣aN (t)ejφNS (t) ⌊⌋∣ koji je dobijen snimanjem signala x(t) čije su vrijednosti kompleksne, pomoću NS senzora, pri čemu svaki senzor mijenja amplitudu i fazu originalnog signala, tako da važi ai(t) exp(jφi(t)) = αix(t) exp(jϕi). U slučaju kada je mjereni signal realan, uobičajeno je da se razmatra njegova analitički produžena forma x(t) = xR(t) + jH{xR(t)}, gdje je sa xR(t) označen realni mjereni signal, dok H{xR(t)} označava njegovu Hilbertovu transformaciju. Analitički signal sadrži samo komponente na nenegativnim frekvencijama, a odgovarajuća realna forma signala može biti jednostavno rekonstruisana. Ovakva forma signala je od velike važnosti za interpretaciju trenutne frekvencije u kontekstu vremensko-frekvencijskih momenata. Budući da se sve vremensko-frekvencijske reprezentacije mogu posmatrati kao poravnate odnosno "glatke"(engl. smoothed) verzije Wigner-ove distribucije, polazna tačka koncepta analize multivarijantnih signala može biti upravo ova distribucija. Wigner-ova distribucija multivarijantnog signala x(t) definisana je na sljedeći način: ∞ W D(Ω, t) = xH (t − τ)x(t + τ)e−jΩτ dτ, ∫−∞ 2 2 (4.93) gdje xH (t) označava Hermitsko transponovanje vektora x(t). Inverzna Wigner-ova distribucija je data izrazom: xH (t −)x(t +) = τ τ 1 ∞ 2 2 W D(Ω, t)ejΩτ dΩ. (4.94) 2π ∫−∞ Centar mase na frekvencijskoj osi Wigner-ove distribucije multivarijantnog signala x(t), definisanog sa (4.92), je dat izrazom ∞ ⟨Ω(t)⟩ = ∫−−∞∞∞ W D(Ω, t)dΩ ΩW D(Ω, t)dΩ , odnosno, ∫ jdτ xH

(t − τ2)x(t + τ2) |τ=0 1 [xH(t)x′(t) − x′ H (t)x(t)] d ⟨Ω (t)⟩ = x[H(t − τ2)x(t 50

+ τ2)|τ=]0 = 2j xH(t)x(t) , (4.95) (4.96) gdje x′(t) = dx(t)/dt označava izvod vektora signala po vremenu. Iz izraza (4.96) direktno slijedi izraz za trenutnu frekvenciju multivarijantnog signala, dat u sljedećoj formi: ⟨Ω(t)⟩ = ∑Nn=S1Nn=φS1′n(at2n)(at2n)(t) . (4.97) Ukoliko je multivarijantni signal dobijen ∑tako što je senzorom sniman monokomponentni signal x(t) zadat u formi ai(t) exp(jφi(t)) = αix(t) exp(jϕi) gdje je

x(t) = A(t) exp(jψ(t)) i |dA (t)/dt| ≪ |dψ(t)/dt|, tada važi ⟨Ω (t)⟩ = dψ (t)/ 5

dt, budući da je dφi(t)/dt = dψ(t)/dt. Uslov za varijacije amplituda i faza realnih monokomponentnih signala ai(t) cos(φi(t)) može se definisati tzv. Bedrosian-ovom produktnom teoremom, [215]. Po navedenoj teoremi, kompleksni analitički signal ai(t) exp(jφi(t)) = ai(t) cos(φi(t)) + jH{ai(t) cos(φi(t))} predstavlja validnu reprezentaciju realnog signala sa amplitudnim i faznim varijacijama ai(t) cos(φi(t)) ukoliko je spektar dijela ai(t) nenulti samo unutar frekvencijskog opsega |Ω| < B a spektar od cos(φi(t)) zauzima nepreklapajući opseg na višim frekvencijama. Signal se može smatrati monokomponentnim ukoliko je spektar od ai(t) niskopropusnog tipa. Predstavljena analiza se može lako generalizovati na druge vremensko-frekvencijske i time-scale reprezentacije. Devijacija spektralnog sadržaja signala od trenutne frekvencije opisuje se lokalnim momentima drugog reda (trenutne širine frekvencijskog opsega). Izraz za trenutnu širinu frekvencijskog opsega se dobija na osnovu: ∞ σ2Ω(t)= 2πxH(t)x(t) Ω2WD(t,Ω)dΩ−⟨Ω(t)⟩2 1 −∫∞ = − ddτ22 xH t − τ2 x t +

τ2 τ =0 − ⟨Ω(t)⟩2 . (4.98) [(xH (t))x(t())]| | Za signal (4.92) ova veličina dobija sljedeću formu: σΩ2(t) = Nn=S1 (a’n(t))2 N−S Nn=S1 an(t)an′′(t) . (4.99) ∑ 2 n=1∑a2n(t) Uopšteno govoreći, u slučaju multikomp∑onentnih signala, komponente su lokalizovane oko više od jedne trenutne frekvencije. 4.3.2 Multikomponentni signali Razmatra se multikomponentni signal P x(t) = xp(t) (4.100) ∑p=1 čije komponente imaju formu xp(t) = Ap(t)ejψp(t) (4.101) gdje Ap(t) označava amplitude komponenti, koje imaju sporovarirajuću dinamiku u pored¯enju sa varijacijama faza ψp(t), odnosno, |dAp(t)/dt| ≪ |dψp(t)/dt|. U posmatranom slučaju, odgovarajući multivarijantni signal je dat sljedećim izrazom: αp1xp(t)ejϕp1 P x(t) = ⌈ αp2xp(t)ejϕp2 ⌉ . . (4.102) ∑p=1 ⌊αpNS xp(t)ejϕpNS⌋ ⌋ ⌊ Pojedinačne komponente x1(t), . . . , xP (t), mjerene različitim senzorima, razlikuju se u amplitudama i fazama, ali dijele zajedničku trenutnu frekvenciju Ωp(t) = dψp(t)/dt koja odgovara ⟨Ωp(t)⟩ u izrazu (4.97), gdje je p indeks komponente. Wigner-ova distribucija posmatranog multivarijantnog signala je ∞ W D(Ω, t) = αpiαqixp(t + τ2)x∗q(t − τ2)ej(ϕpi−ϕqi)e−jΩτ dτ, P P NS ∑p=1 ∑q=1 ∑i=1−∫∞ gdje je i indeks senzora. Ona može biti zapisana u vidu sume kros-komponenti i auto-komponenti, odnosno P NS ∞ W D(Ω, t) = α2pi xp(t + τ2)x∗p(t − τ2)e−jΩτ dτ (4.103) ∑p=1 ∑i=1 −∫∞ P P NS ∞ + αpiαqi xp(t + τ2)x∗q(t − τ2)ej(ϕpi−ϕqi)e−jΩτ dτ ∑p=1 ∑qq≠=p1 ∑i=1 −∫∞ = W DAT (Ω, t) + W DCT (Ω, t). Fazni pomjeraji komponenti multivarijantnog signala u izrazu (4.103) se poništavaju u auto-članovima W DAT (Ω, t). Ovo važno svojstvo zapravo implicira da se auto-članovi, dobijeni iz svakog kanala multivarijantnog signala, sabiraju u fazi, nezavisno od različitih inicijalnih faza u pojedinačnim komponentama signala. U kros-članovima, fazni pomjeraji se ne poništavaju u rezultujućem izrazu W DC T (Ω, t), što vodi sabiranju koje nije u fazi. Kros-članovi u multivarijantnom slučaju predstavljaju sumu od NS signala sa proizvoljnim (slučajnim) fazama. Posljedično, kros-članovi će biti redukovani u pored¯enju sa slučajem Wigner-ove distribucije univarijantnog signala. Dakle, za veliko NS može se očekivati da auto-članovi budu izraženi, a da kros-članovi teže malim vrijednostima u pored¯enju sa auto-članovima. Očekuje se, drugim riječima, da se kros-članovi, za veliki broj senzora NS , ponašaju kao Gausove slučajne varijable srednje vrijednosti nula, čija varijansa zavisi od vrijednosti kros-članova, var{W D(Ω, t)} = σ 2 (W DC T (Ω, t)). Za dati signal, auto-članovi su deterministički, budući da oni ne zavise od slučajnih faza, kao što se može vidjeti u odgovarajućem dijelu izraza posmatrane Wigner-ove distribucije W DAT (Ω, t). Navedeno znači da za veliko NS važi: W D(Ω, t) ∼ N (W DAT (Ω, t), σ2(W DCT (Ω, t))). (4.104) 4.3.3 Inverzija i dekompozicija signala Inverzna Wigner-ova distribucija multivarijantnog signala u analognom domenu data je sljedećim izrazom: 1 ∞ xH(t2)x(t1) = WD t1 + t2 , Ω ejΩ(t1−t2)dΩ. (4.105) 2π −∫∞ (2) Diskretizacijom ugaone frekvencije, Ω = k∆Ω, i vremena, t1 = n1∆t, t2 = n2∆t, uz adekvatnu definiciju diskretnih vrijednosti, lako se dobija: xH(n2)x(n1) = K1+1 WD (2) (4.106) K/2 n1 + n2 , k ej Kπ+1 k(n1−n2). k=∑−K/2 Nakon uvod¯enja sljedeće notacije: K/2 R(n1,n2) = K1+1 k=∑−K/2 WD n1 + n2 , k ej Kπ+1 k(n1−n2), (2) dobija se da važi: R(n1,n2) = xH(n2)x(n1). (4.107) (4.108) Dakle, u slučaju multikomponentnih multivarijantnih signala, inverzija produkuje matricu sa elementima zadatim izrazom: NS P P R(n1, n2) = αpiαqixp(n1)x∗q(n2)ej(ϕpi−ϕqi). (4.109) ∑i=1 ∑p=1 ∑q=1 ukoliko se sada iskoristi pretpostavka da se kros-članovi u Wigner-ovoj distribuciju multivarijantnog signala mogu zanemariti u pored¯enju sa auto-članovima koji su sumirani u fazi, dobija se: NS P P R(n1, n2) = a2pixp(n1)x∗p(n2) = Bpxp(n1)x∗p(n2) (4.110) ∑i=1 ∑p=1 ∑p=1 gdje je Bp = Ni=S1 α2pi. Kao u slu∑čaju bilo koje kvadratne matrice, dekompozicija na sopstvene vrijednosti matrice R dimenzija K × K daje K R = QΛQT = λpqp(n)q∗p(n), (4.111) ∑p=1 gdje λp predstavlja sopstvene vrijednosti, dok qp(n) označava odgovarajuće sopstvene vektore matrice R. Treba primijetiti da su sopstveni vektori qp(n) po definiciji ortonormalni. Za P -to komponentni signal, u odsustvu šuma, elementi posmatrane matrice su P R(n1, n2) = λpqp(n1)qp∗(n2). (4.112) ∑p=1 Može se razmatrati nekoliko specijalnih slučajeva: 1. U slučaju Wigner-ove distribucije univarijantnog signala, sam signal je jednak sopstvenom vektoru q1(n) matrice R, sa faktorom proporcionalnosti koji je kompleksna konstanta [204], gdje su odgovarajuće sopstvene vrijednosti λ1 = Ex, λ2 =

0, . . . , $\lambda K = 0$. Činjenica da inverzija Wigner-ove distribucije produkuje samo jednu nenultu sopstvenu vrijednost, koristi se u provjeri da li je data posmatrana dvodimenziona funkcija validna Wigner-ova distribucija. 2. Ukoliko se komponente multikomponentnog univarijantnog signala ne preklapaju u vremensko-frekvencijskoj ravni, tada je moguće iskoristiti svojstvo (4.65) koje S-metod definiše kao sumu (pseudo-)Wigner-ovih distribucija pojedinačnih komponenti signala [204]: P SM(n,k) = WDp(n,k). (4.113) ∑p=1 Pošto su nepreklapajuće komponente ortogonalne, dekompozicija na sopstvene vrijednosti i sopstvene vektore u slučaju univarijantnih (i multivarijantnih) multikomponentnih signala će dati: Bpxp(n) = λpqp(n), p = 1, 2, . . . , P. (4.114) gdje je Bp konstanta. Treba primijetiti da je, po definiciji, energija odgovarajućeg sopstvenog vektora jednaka 1, odnosno ‖qp(n)‖2 = 1. Može se, dakle, zaključiti da je Bpxp(n)x∗p(n) = λpqp(n) odnosno (√) (√ λpqp(n) ∗) (4.115) (4.116) K/2 λp = λpqp(n) = ‖Bpxp(n)‖2 = 2 Bpx2p(n) = BpExp. (4.117) √ n=∑−K/2 gdje je Exp energija p-te komponente signala. Sopstveni vektor qp(n) je jednak vektoru ‖ ‖ sa vrijednostima komponente signala xp(n), uz konstantu proporicionalnosti koja definiše neodred¯enost u amplitudi i fazi. 3. Ukoliko se komponente signala xp(n) preklapaju u vremensko-frekvencijskoj ravni, tada dekompozicija signala na pojedinačne komponente nije moguća korišćenjem poznatih tehnika, osim u nekim vrlo specifičnim formama signala, kao što su, na primjer, linearni frekvencijski modulisani signali, korišćenjem chirplet transformacije, Radonove transformacije ili sli;nih tehnika [216], [217], ili sinusoidalno-modulisani signali, korišćenjem inverzne Radonove transformacije [218], [219]). U opštem slučaju, ove vrste signala ne mogu biti razdvojene (dekomponovane) na pojedinačne komponente u univarijantnom slučaju. Med¯utim, multivarijantna forma signala mijenja (redukuje) kros-članove u Wigner-ovoj distribuciji, otvarajući na taj način, indirektno, mogućnost dekompozicije signala na komponente čak i u veoma izazovnom kontekstu komponenti preklopljenih u vremensko-frekvencijskoj ravni. 4.3.4 Algoritam za dekompoziciju (razdvajanje i rekonstrukciju) Razmatra se multikomponentni signal zadat izrazom (4.102), čije su komponente xp, za p = 1, 2, . . . , P . Podkupovi vremensko-frekvencijskih domena komponenti, za koje su komponente različite od nule, u oznaci Dp, mogu se djelimično preklapati u vremensko-frekvencijskoj ravni. Uvedimo i realističnu pretpostavku da ne postoje komponente signala čiji se djelovi vremensko-frekvencijskih domena Dp potpuno preklapaju sa odgovarajućim djelovima domena drugih komponenti, kao i da važi D1 ≤ D2 ≤ · · · ≤ DP , gdje je Dp površina dijela (podskupa) vremensko-frekvencijskog domena Dp u kojem je p-ta komponenta nenulta. Prva komponenta signala može se izraziti kao linearna kompobinacija sopstvenih vektora qp sa koeficijentima η1p, tako da se dobija: x1 = η11q1 + η21q2 + · · · + ηP 1qP. (4.118) Pošto je realno prepostaviti da su komponente dobro koncentrisane u vremensko-frekvencijskoj ravni, nepoznati koeficijenti ηp1 se mogu odrediti na osnovu mjera koncentracije. U tu svrhu, formira se linearna kombinacija baznih vektora qp, sa težinskim koeficijentima βp, p = 1, 2, . . . , P , koja ima sljedeću formu: y = β1q1 + β2q2 + · · · + βP qP, (4.119) i računa se mjera koncentracije M {TFR(n, k)} vremensko-frekvencijske reprezentacije TFR(n, k) normalizovanog signala y/‖y‖2. Izbor vremensko-frekvencijske reprezentacije T F R(n, k) ovdje nije krucijalan. Može se koristiti spektrogram kao najjednostavnija vremensko-frekvencijska reprezentacija. Rješavanjem problema minimizacije mjere koncentracije, dobija se globalni minimum koji odgovara najbolje koncentrisanoj komponenti signala. Najjednostavniji način za rješavanje ovog problema bilo bi korišćenje „ℓ0-norme” kao mjere koncentracije TFR(n, k) i direktno pretraživanje po mogućim vrijednostima koeficijenata βp, p = 1, 2, . . . , P . U tom slučaju, koeficijenti ηp1 predstavljaju rješenje minimizacionog problema: [η11,η21,...,ηP1] = arg min ‖TFR(n,k)‖0. (4.120) β1 ,...,βP Za ove vrijednosti koeficijenata ‖ TFR(n, k)‖0 je jednaka površini D1 dijela domena u najbolje koncentrisane komponente. Ako su bilo koje dvije najmanje površine jednake, i dalje ćemo naći jednu od njih. Treba uočiti da razmatrani minimizacioni problem ima više lokalnih minimuma, budući da će koeficijenti βp u y = β1 q1 + β2 q2 + · · · + βP qP koji odgovaraju bilo kojoj komponenti signala xp takod¯e izazvati pojavu lokalnog minimuma mjere koncentracije, koji je jednak površini dijela vremensko-frekvencijskog domena u kojem je data komponenta različita od nule. Dodatno, i bilo koja linearna kombinacija od K < P komponenti signala xp takod¯e će produkovati lokalni minimum koji je jednak uniji odgovarajućih dijelova vremensko-frekvencijskih domena u kojima su te komponente različite od nule. Nakon što je najbolje koncentrisana komponenta detektovana, odgovarajući sopstveni vektor q1 zamjenjuje se sa izdvojenom komponentom. Izdvojena komponenta se tada uklanja iz preostalih sopstvenih vektora qk, oduzimanjem projekcije izdvojene komponente na vektore qp, p = 2, 3, . . . , P (procedura deflacije signala [233]). Zatim se procedura ponavlja sa novim setom vektora qp formiranjem signala y = β2q2 + · · · + βP qP . Variranjem koeficijenata βp nalazi se novi globalni minimum mjere koncentracije, koji odgovara drugoj komponenti signala. Procedura se iterativno ponavlja P puta. Med¯utim, u praktičnim aplikacijama ne može da se koristi ni direktno pretraživanje, ni „ℓ0-norma", što je diskutovano u prethodnim poglavljima ove disertacije. U literaturi je razvijeno više pristupa za rješavanje optimizacionih problema sa više lokalnih minimuma. Uopšteno govoreći, mogu se razlikovati tri velike klase ovakvih pristupa: deterministički [229], stohastički [227,228] i heuristički (npr. optimizacija mravlje kolonije [230], genetički algoritmi, pretraga planinarenjem [232], simulirano kaljenje [231], particle swarm optimization...). U ovoj disertaciji predstavićemo adaptiranu formu gradijentnog pristupa rješavanju posmatranog minimizacionog problema. Kao u slučaju kompresivnog odabiranja i rekonstrukcije rijetkih signala, „ℓ0-norma" će biti zamijenjena njenim najbližim ekvivalentom – ℓ1-normom. U nastavku slijedi detaljan opis pristupa dekompoziciji multikomponentnih multivarijantnih signala. Procedura za dekompoziciju je predstavljena Algoritmom 12, a odgovarajuća minimizacija sprovodi se Algoritmom 13. - U prvom koraku, računa se autokorelaciona matrica R multivarijantnog signala x(n) prema (4.107) odnosno (4.108). Broj komponenti signala P jednak je broju nenultih sopstvenih vrijednosti matrice R. U slučaju zašumljenih signala, postoje dva pristupa za odred¯ivanje broja komponenti: • Broj komponenti je pretpostavljen. Dok god je taj broj veći ili jednak od pravog broja komponenti P , algoritam će ispravno funkcionisati, gdje će šum biti izdvojen u vidu dodatnih komponenti. • Može se uvesti prag koji će odvojiti sopstvene vrijednosti koje odgovaraju komponentama signala od onih koje odgovaraju šumu. Ovaj prag odred¯uje broj komponenti u dekompoziciji. - Kao vremensko-frekvencijska reprezentacija signala može se koristiti spektrogram, S-metod sa užim frekvencijskim prozorom (na primjer, Ld = 1), ili bilo koja druga adekvatna reprezentacija. Budući da su ove vremensko-frekvencijske reprezentacije kvadratne prirode, kao mjera koncentracije koristi se ekvivalent ℓ1-norme, definisan sa [226]: M {TFR(n, k)} = | TFR(n, k)|1/2, (4.121) ∑n∑k Algoritam 12 Dekompozicija multivarijantnih signala (rekonstrukcija komponenti signala) Input: • Multivarijantni signal x(n) 1: Izračunati S-metod SM(n,k) multivarijantnog signala x(n) i matrice R sa elementima R(n1, n2) = 1 K/2 K + 1 k=∑−K/2 SM n1 + n2 , k ej K2+π1 k(n1−n2), (2) kao u [204]. Ukoliko se koristi Wigner-ova distribucija, tada SM(n,k) treba zamijeniti sa WD(n,k), ili se elementi matrice R računaju kao R(n1,n2) = xH(n2)x(n1). 2: Naći sopstvene vektore qi i sopstvene vrijednosti λi matrice R. 3: P ← broj nenultih (odnosno, u slučaju zašumljenog signala - značajnih) sopstvenih vrijednosti 4: repeat 5: NU ← 0 ◃ Broj ažuriranja

6: for i = 1, 2, . . . , **P do 7:** Riješiti minimizacioni **problem min M** TFR **1 P** β1,...,βP { { 69
C

βpqp subject to βi = 1 ∑p=1 }} gdje je M{·} mjera koncentracije, TFR{·} je vremensko-frekvencijska reprezentacija signala koji je proslijed¯en kao argument, dok se C = Pp=1 βpqp √‖‖∑ ‖ 2 koristi za normalizaciju energije k‖ombinovanog‖ signala na 1. ‖ Koeficijenti β1, β2, . . . , βP se dobijaju kao rezultat minimizacije. 8: if bilo koje βp ≠ 0, p ≠ i then P 9: qi ←

1 βpqp for k = i∑p+=11, i + 2, . . . , P do C 10: 11: s ← qiH qk 12: qk ← √ 1 1−|s|2 (qk − sqi) 13: end for 14: NU ← NU + 1 15: end if 16: end for 17: until NU = 0 Output: • Broj komponenti signala P • Rekonstruisane komponente signala q1, q2, . . . , qP Algoritam 13 Procedura za minimizaciju mjere koncentracije pri dekompoziciji signala Input: • Vektori q1, q2, . . . , qP • Indeks i gdje odgovarajući vektor qi treba da ima fiksiran jedinični koeficijent βi = 1 • Zahtijevana tačnost ε 1: βp = 1 for p = i {0 for p ≠ i , for p = 1, 2, . . . , P 2: Mold ← ∞ 3: Δ = 0.1 4: repeat P 5: y ← βpqp ∑p=1 6: Mnew ← M TFR y { { ‖y‖2 }} 7: if Mnew > Mold then 8: Δ ← Δ/2 9: βp ← βp + γp, for p = 1, 2, . . . , P ◃ Poništiti posljednje ažuriranje koeficijenata P 10: y ← βpqp 11: else ∑p=1 12: Mold ← Mnew 13: end if 14: for p = 1, 2, . . . , P do 15: if p ≠ i then 16: Mr+ ← M TFR { ‖yy++ΔΔqqpp‖2 }} { 17: Mr− ← M TFR y − Δqp { { ‖y − Δqp‖2 }} 18: Mi+ ← M TFR { ‖yy++jjΔΔqqpp‖2 }} { 19: Mi− ← M TFR ‖yy−−jjΔΔqqpp‖2 }} { { 20: γp ← 8Δ Mr+ − Mr− + j8ΔMi+ − Mi− Mnew Mnew 21: else 22: γp ← 0 23: end if 24: end for 25: βp ← βp − γp, za p = 1, 2, . . . , P ◃ Ažuriranje koeficijenata 26: until p=1 |γp|2 je ispod zadate tačnosti ε P Output: ∑ • Koeficijenti β1, β2, . . . , βP gdje se sumiranje vrši po svim dostupnim vremenskim i frekvencijskim indeksima n i k. - Minimizacija mjere koncentracije je implementirana korišćenjem metoda najbržeg spuštanja, koji je prezentovan u Algoritmu 13. Ovdje se fiksiraju koeficijenti βp = 1 i variraju realni i imaginarni djelovi preostalih koeficijenata za ±Δ. Zatim se računa gradijent normalizovane mjere, γp, i dalje koristi pri ažuriranju koeficijenata. Inicijalna vrijednost parametra Δ je 0.1 i ona se redukuje kad god ažuriranje koeficijenata ne vodi smanjenju mjere koncentracije. - Kada se ekstraktuje p-ta komponenta signala, odgovarajući sopstveni vektor qp se zamjenjuje tom ekstraktovanom komponentom. Izdvojena komponenta se zatim uklanja iz preostalih sopstvenih vektora qk oduzimanjem projekcije ekstraktovane komponente na vektore qk, k = p + 1, p + 2, . . . , P . Na ovaj način, osiguravamo se da p-ta komponenta signala neće biti ponovo detektovana. - Opisana procedura se ponavlja sve dok više nema ažuriranja vektorâ qk. U slučaju dvokomponentnog multivarijantnog signala, razmatrani minimizacini problem je konveksan, sa jednim, globalnim, minimumom. Za trokomponentni signal postoje lokalni minimumi za sve signale koji se mogu dobiti kao suma bilo koje dvije komponente. Ovo je razlog zbog kojeg se procedura za dekompoziciju ponavlja nakon što je pronad¯en minimum mjere koncentracije. Naime, u sljedećoj iteraciji, par komponenti koji odgovara lokalnom minimumu se razdvajaju kao u dvokomponentnom slučaju. Za veći broj komponenti signala, broj lokalnih minimuma se povećava. Tada je neophodan veći broj ponavljanja procedure, kako bi se komponente razdvojile iterativnim putem. Treba uočiti da gradijenti algoritam može pronaći bilo koji lokalni minimum, gdje svaki od njih odgovara kombinaciji K < P komponenti signala. Ovo znači da svaki lokalni minimum redukuje složenost dekompozicije vektorâ qp, vodeći do potpune dekompozicije signala iterativnim putem. Detalji su dati u Algoritmu 13. 4.3.5 Numerički rezultati Primjer 4.3. Razmatra se realni bivarijantni signal x(t) = [x1(t), x2(t)]T , gdje je signal u i-tom kanalu definisan na sljedeći način xi

(t) = e−(t/128)2 cos (t/16)4/128	− 8π	**(t/16)2/64**		10

+ ϕi (4.122) = 0.5e

−(t/128)2	(ej	**((t/16)4/128−**	8π	**(t/16)2/64+**	ϕi) +	**e−j((t)/16)4/128−**	8π	**(t/16)2/64+**	10

ϕi) = x1i(t) + x2i([t), i = 1, 2,] za −128 ≤ t ≤ 128, što je, za slučaj prvog kanala, prikazano na slici 4.5 (a). Faze ϕ1 ≠ ϕ2 predstavljaju slučajne brojeve iz intervala [0, 2π], sa uniformnom raspodjelom. Budući da je posmatrani signal realan, u njegovoj Furijeovoj transformaciji, kao i u vremensko-frekvencijskim domenima, postoje dvije simetrične komponente x1i(t) i x2i(t). Med¯utim, ove komponente se djelimično preklapaju, pa su stoga nerazdvojive poznatim 1 x(t) 0.5 0 −0.5 −1 (a) −100 −50 0 50 100 vrijeme Originalna i estimirana trenutna frekvencija 0.6 0.4 0.2 0 −100 −50 0 50 100 (b) TFR analitickog signala TFR signala e m e e j i m r e j v i r v (c) frekvencija (d) frekvencija TFR sopstvenog vektora 1 TFR sopstvenog vektora 2 e m e e j i m r e j v i r v (e) frekvencija (f) frekvencija TFR komponente 1 TFR komponente 2 e m e e j m i r e j v i r v (g) frekvencija (h) frekvencija Slika 4.5: Realni bivarijantni signal analiziran u primjeru 4.3: (a) signal prikazan u vremenskom domenu; (b) estimacija trenutne frekvencije: crno - tačna IF, crveno - estimacija IF korišćenjem analitičkog signala, zeleno i plavo - estimacija IF zasnoavana na komponentama koje su izdvojene opisanim pristupom; (c) PWD analitičkog signala; (d) PWD originalnog signala; (e) i (f) PWD sopstvenih vektora; (g) i (h) PWD komponenti koje su izdvojene pristupom opisanim u ovoj sekciji. 2 Spektrogram signala 1 Re{x1(t)} (a) 0 −1 100 −100 −50 0 50 100 50 0.3 0.2 0.1 |X1(jω)| time (b) e imt 0 −50 −100 1 −3 −2 −1 frekvencija 0 1 2 3 −3 −2 −1 frekvencija 0 (c) 2 3 Slika 4.6: Dvokomponentni signal predstavljen u: (a) vremenskom domenu; (b) frekvencijskom domenu; (c) vremensko-frekvencijskom domenu (spektrogram). tehnikama zasnovanim na ovim reprezentacijama. Razmotrimo uobičajeni problem estimacije trenutne frekvencije signala (IF). U tom cilju, za realne signale se uobičajeno koristi njihova analitička forma dobijena na bazi Hilbertove transformacije. Tačna trenutna frekvencija je prikazana na slici 4.5 (b), crnom linijom. Vremensko-frekvencijska reprezentacija (TFR) ovog analitičkog signala prikazana je na slici (c). Med¯utim, rezultat estimacije trenutne frekvencije zasnovan na analitičkom signalu, prikazan na slici. 4.5 (b) crvenom linijom, značajno se razlikuje od tačne trenutne frekvencije. Naime, estimacija trenutne frekvencije zasnovana na maksimumima vremensko-frekvencijske reprezentacije, ne prati varijacije trenutne frekvencije na odgovarajući način, budući da su one izgubljene u vremensko-frekvencijskoj ravni usljed značajnog preklapanja komponenti i činjenice da su varijacije amplitude i faze signala istog reda. Zapravo, uslovi Bedrosianove produktne teoreme za amplitudu i fazu signala nijesu zadovoljeni u ovom slučaju. Ukoliko se, sa druge strane, izračuna vremensko-frekvencijska reprezentacija originalnog signala (4.122), dvije komponente x1i(t) i x2i(t) se preklapaju u vremensko-frekvencijskoj ravni, što je prikazano na slici 4.5 (d). Ove komponente su i nelinearne, te stoga, nijedna poznata tehnika ne može biti primijenjena za njihovo razdvajanje u cilju estimacije trenutne frekvencije. Pošto se komponente značajno preklapaju, one nijesu ortogonalne, pa zato dekompozicija zasnovana na S-metodu [204] ne može biti direktno primijenjena. Med¯utim, ključno je uočiti da su značajno izmijenjeni kros-članovi u Wigner-ovoj distribuciji, i da se pojavljuju samo dvije sopstvene vrijednosti različite od nule. Dva odgovarajuća sopstvena vektora, čije su pseudo-Wigner-ove distribucije prikazane na slikama 4.5 (e) i (f), sadrže obije komponente, koje se pojavljuju u vidu linearne kombinacije. Korišćenjem algoritma 12, odnosno procedure 13, izračunati su koeficijenti β1 i β2, formirajući linearnu kombinaciju (4.119) sopstvenih vektora. Minimum mjere koncentracije, odnosno rijetkosti, odgovara dvijema razdvojenim komponentama, kao što je prikazano na slikama 4.5 (g) i (h). Može se uočiti da je estimacija trenutne frekvencije na bazi maksimuma vremensko-frekvencijskih reprezentacija ovih komponenti (korišćenjem pozitivnih djelova trenutne frekvencije), tačna do očekivanog biasa usljed nelinearnosti trenutne frekvencije, koji može biti dalje redukovan korišćenjem poznatih tehnika za estimaciju trenutne frekvencije [44]. Rezultat je prikazan na slici 4.5 (b), zelenim i plavim tačkama. Primjer 4.4. Razmatra se bivarijantni dvokomponentni signal x(t), pod pretpostavkom da svaki senzor mjeri: xi(t) = x1i(t) + x2i(t), i = 1, 2 (4.123) gdje su komponente date izrazima: x1i(t) = 1.2e−(t/96)2e−j12π(t/16)2/25+jt3/2562+ϕ1i, x2i = 0.9e−(t/128)2e−jπt/8+j(t/16)4/100+ϕ2i, (4.124) (4.125) sa fazama ϕ1i, ϕ2i, i = 1, 2 koje se simuliraju kao slučajni brojevi sa uniformnom distribucijom iz intervala [0, 2π]. Realni dio signala iz prvog kanala, kao i odgovarajuća FT, prikazani su na slikama Fig. 4.6 (a) i (b), dok je multivarijantni spektrogram prikazan na slici 4.6 (c). Može se uočiti da komponente signala ne mogu biti razdvojene primjenom spektrograma, a da pri tom postupku ne dod¯e do značajne degradacije autočlanova. Treba uočiti da dvije komponente signala imaju nelinearnu frekvencijsku modulaciju, te su stoga nerazdvojive pomoću uobičajenim algoritmima za dekompoziciju komponenti. Prilikom primjene prezentovanog algoritma za dekompoziciju multikomponentnih signala, u skladu sa prezentovanom teorijom, WD signala se koristi kao inicijalna vremensko-frekvencijska reprezentacija za dekompoziciju na sopstvene vrijednosti i sopstvene vektore. Wiger-ova distribucija analiziranog signala predstavljena je na slici 4.7 (a), dok su sopstvene vrijednosti autokorelacione matrice R prikazani na slici 4.7 (b). Uočava se da postoje dvije nenulte sopstvene vrijednosti. Njima odgovaraju dva sopstvena vektora koji sadrže linearnu kombinaciju komponenti signala. Za posmatrani signal se računa vremensko-frekvencijska reprezentacija, a zatim primijenjuje prezentovana procedura za minimizaciju, u cilju nalaženja koeficijenata koji prave linearnu kombinaciju sopstvenih vektora (4.119) sa najboljom koncentracijom komponenti. Numerički eksperimenti su pokazali da se veoma slične performanse minimizacionog postupka primjenom Algoritma 13 ukoliko se Wigner-ova distribucija, spektrogram i S-metod koriste kao vremensko-frekvencijske reprezentacije posmatranih sopstvenih vektora. Na slici 4.7, prikazani su rezultati dobijeni primjenom WD. U cilju bolje vizuelne prezentacije rezultata, na slikama 4.7 (c) i (e) je prikazana PWD računata sa Hanning-ovim prozorom dužine 256, za svaki od razmatranih sopstvenih vektora, iako se u minimizacionoj proceduri koristila WD. Slični rezultati dobili bi se primjenom bilo koje druge vremensko-frekvencijske reprezentacije u minimizacionom koraku. Pseudo-WD svake razdvojene komponente je prikazana na slikama 4.7 (d) i (f), za signale x1i(t) i x2i(t), respektivno. Primjer 4.5. Razmatra se multivarijantni trokomponentni signal x(t) za brojem kanala NS = 4, Wigner−ova distribucija signala 200 100 mi 0 t −50 Sopstvena vrijednost 150 50 100 e 50 −100 0 (a) −3 −2 −1 frekvencija 0 1 2 3 (b) 5 10 15 20 25 30 Indeks sopstvene vrijednosti PWD prvog sopstvenog vektora PWD prve komponente e m e i t m i t frekvencija (c) (d) frequency PWD drugog sopstvenog vektora PWD drige komponente e e m imt e j i r v frekvencija (e) (f) frekvencija Slika 4.7: Dekompozicija bivarijantnog dvokomponentnog signala iz primjera 4.4: (a) WD analiziranog signala; (b) Sopstvene vrijednosti autokorelacione matrice R; (c) i (e) PWD prvog i drugog sopstvenog vektora; (d) i (f) PWD izdvojenih komponenti signala. pri čemu je signal iz i-tog kanala definisan izrazom xi(t) = x1i(t) + x2i(t) + x3i(t), i = 1, . . . , 4, (4.126) pri čemu su komponente x1i(t) i x2i(t) date relacijama (4.124) i (4.125), za i = 1, . . . , 4, dok je treća komponenta data sljedećim izrazom: x3i = 0.9e−(t/128)2e−jπt/8+j(t/16)4/100+ϕ3i, (4.127) pri čemu i ona ima fazu ϕ3i, i = 1, . . . , 4 koja je simulirana kao slučajni broj sa uniformnom 189 2 0 Re{x1(t)} (a) Spektrogram signala (c) 0.3 0.2 0.1 −100 −50 |X1(jω)| 0 vrijeme 50 100 (b) e imt 0 −50 −100 −2 100 50 −3 −2 −1 0 1 2 3 −3 −2 0 1 −1 frekvencija 2 3 frekvencija Slika 4.8: Multivarijantni signal sa tri komponente, razmatran u primjeru 4.5, sa NS = 4, prikazan u: (a) vremenskom domenu; (b) frekvencijskom domenu; (c) vremensko-frekvencijskom domenu (spektrogram). raspodjelom, iz intervala [0, 2π]. Signal iz prvog kanala, njegova FT i multivarijantni spektrogram prikazani su na slikama 4.8 (a)-(c), respektivno. Wigner-ova distribucija analiziranog signala, čija je matrica R predmet dekompozicije na sopstvene vrijednosti i sopstvene vektore, prikazana je na slici 4.9 (a). Dobijene sopstvene vrijednosti prikazane su na slici 4.9 (b), dok slike 4.9 (c), (e) i (g) prikazuju pseudo-Wigner-ove distribucije sopstvenih vektora koji imaju najveće sopstvene vrijednosti na slici 4.9 (b), i ilustrujući činjenicu da komponente nijesu razdvojene. Naime, kao i u prethodnom primjeru, komponente koje se sijeku nijesu ortogonalne, pa kao posljedica toga, svaki razmatrani sopostveni vektor sadrži linearnu kombinaciju komponenti signala. Na dobijene sopstvene vektore, primjenjuje se predložena minimizaciona procedura, u cilju nalaženja seta koeficijenata linearne kombinacije sopstvenih vektora koji daje najbolju koncentraciju komponenti signala. Sve tri komponente signala su uspješno ekstraktovane, i one su prikazane na slici 4.9 (d), (f) i (h). Primjer 4.6. Razmatra se multivarijantni signal x(t), sastavljen od tri komponente koje se sijeku i dvije komponente koje se ne sijeku u vremensko-frekvencijskoj ravni, dat izrazom:

xi(t) = x1i(t) + x2i(t) + x3i(t) + x4i(t) + x5i(t). 81

(4.128) Signali u svakom od NS = 3 kanala definisani su na sljedeći način: x1i(t) = e−(t/96)2ej(−π(t/16)2/5+ϕ1i) (4.129) x2i(t) = 1.2e−(t/96)2ej(π(t/16)3/32+3π(t/16)2/10+ϕ2i) (4.130) x3i(t) = 0.9e−(t/128)2ej(π(t/16)4/200+πt/8+ϕ3i) (4.131) x4i(t) = e−(t/16)2ej(3πt/4+ϕ4i) (4.132) x5i(t) = e−(t/96)2ej(−6π(t/16)2/25+πt/4+ϕ5i) (4.133) gdje i = 1, 2, 3 označava indeks kanala. U ovom primjeru, S-metod se koristi kao inicijalna 190 Wigner−ova distribucija signala 300 100 m sopstvena vrijednost 250 200 e 50 150 e i j r v 0 100 −50 50 −100 (a) −3 −2 −1 frekvencija 0 1 2 3 0 (b) 5 10 15 20 25 30 indeks sopstvene vrijednosti PWD sopstvenog vektora 1 PWD komponente 1 e m e e j m i r e j v i r v (c) frekvencija (d) frekvencija PWD sopstvenog vektora 2 PWD komponente 2 e m e e j m i r e j v i r v (e) frekvencija (f) frekvencija PWD sopstvenog vektora 3 PWD komponente 3 e m e e j m i r e j v i r v (g) frekvencija (h) frekvencija Slika 4.9: Dekompozicija multivarijantnog signala iz primjera 4.5, koji ima tri komponente (autočlana) i NS = 4 kanala: (a) Wigner-ova distribucija signala; (b) sopstvene vrijednosti autokorelacione matrice R; (c), (e) i (g): PWD prvog, drugog i trećeg sopstvenog vektora; (d), (f) i (h) PWD svih izdvojenih komponenti. vremensko-frekvencijska reprezentacija, i prikazan je na slici 4.10 (a). Budući da je posmatrani signal sa tri kanala, a ima pet komponenti, primjena S-metoda u ovom kontekstu je od ključnog značaja. S-metod može izdvojiti sve nepreklapajuće komponente u jednoj realizaciji. Zatim, se dostupne realizacije koriste samo za preklapajuće komponente. Dekompozicija na S−metod signala 4 x 10 5 1e00 3 m e ijrv 0 −100 sopstvena vrijednost 2 1 (a) −3 −2 −1 fre0kvencija1 2 3 0 (b) 5 10 15 20 indeks sopstvene vrijednosti PWD sopstvenog vektora 1 PWD komponente 1 e m e e j m i r e j v i r v (c) frekvencija (d) frekvencija PWD sopstvenog vektora 2 PWD komponente 2 e m e e j i m r e j v i r v (e) frekvencija (f) frekvencija PWD sopstvenog vektora 3 PWD komponente 3 e m e e j i m r e j v i r v (g) frekvencija (h) frekvencija PWD sopstvenog vektora 4 PWD komponente 4 e m e e j i m r e j v i r v (i) frekvencija (j) frekvencija PWD sopstvenog vektora 5 PWD komponente 5 e m e e j m i r e j v i r v (k) frekvencija (l) frekvencija Slika 4.10: Dekompozicija multivarijantnog signala iz primjera 4.6 sa N = 3, zasnovana na S-metodu kao polaznoj transformaciji: (a) S-metod analiziranog signala; (b) sopstvene vrijednosti autokorelacione matrice R; (c), (e), (g), (i), (k) PWD sopstvenih vektora koji odgovaraju najvećim sopstvenim vrijednostima; (d), (f), (h), (j) i (l) PWD izdvojenih komponenti. S−metod signala 4 x 10 5 1e00 m e irv 0 j eigenvalue 3 2 1 −100 (a) 0 −3 −2 −1 fre0kvencija1 2 3 (b) 5 10 15 20 eigenvalue index PWD sopstvenog vektora 1 PWD komponente 1 e m e e j i m r e j v i r v (c) frekvencija (d) frekvencija PWD sopstvenog vektora 2 PWD komponente 2 e m e e j m i r e j v i r v (e) frekvencija (f) frekvencija PWD sopstvenog vektora 3 PWD komponente 3 e m e e j i m r e j v i r v (g) frekvencija (h) frekvencija PWD sopstvenog vektora 4 PWD komponente 4 e m e e j i m r e j v i r v (i) frekvencija (j) frekvencija PWD sopstvenog vektora 5 PWD komponente 5 e m e e j i m r e j v i r v (k) frekvencija (l) frekvencija Slika 4.11: Dekompozicija zašumljenog multivarijantnog petokomponentnog signala iz primjera 4.6 sa NS = 3, zasnovana na S-metodu kao inicijalnoj reprezentaciji: (a) S-metod analiziranog signala; (b)sopstvene vrijednosti autokorelacione matrice R; (c), (e), (g), (i), (k) PWD sopstvenih vektora koji se odnose na pet najvećih sopstvenih vrijednosti; (d), (f), (h), (j) i (l) PWD izdvojenih komponenti signala. sopstvene vrijednosti i sopstvene vektore inverzne autokorelacione matrice S-metoda, R, daje pet sopstvenih vektora, koji odgovaraju najvećim sopstvenim vrijednostima prikazanim na slici 4.10 (b). Budući da su dvije nepreklopljene komponente med¯usobno ortogonalne, i ortogonalne sa ostatkom presječenih komponenti, na osnovu teorije iz [204], postoje tačno dva sopstvena vektora koji odgovaraju ovim komponentama (po jedan sopstveni vektor za svaku od dvije komponente). Pseudo-Wigner-ove distribucije ovih sopstvenih vektora prikazane su na slici 4.10 (c) i (i). Dakle, ove dvije komponente su jednostavno izdvojene, što je i prikazano na slici 4.10 (d) i (j). Tri preostale komponente se dobijaju na osnovu adekvatne linearne kobinacije preostala tri sopstvena vektora, korišćenjem koeficijenata βi koji se dobijaju minimizacijonom procedurom koja je predstavljena u ovoj sekciji. PWD tri preostala sopstvena vektora prikazane su na slici 4.10 (e), (g) i (k), dok su odgovarajuće razdvojene komponente, dobijene na osnovu adekvatne linearne kombinacije sopstvenih vektora, prikazane na slici 4.10 (f), (h) i (l). Isti eksperiment je ponovljen za zašumljeni signal xˆ(t) = x(t) + ε(t). Signal iz svakog kanala oštećen je aditivnim, bijelim, kompleksnim Gausovim šumom srednje vrijednosti nula, sa identičnom raspodjelom realnog i imaginarnog dijela, pri čemu oba dijela imaju istu varijansu σ2 = 0.152. SNR za jednu (linearnu) komponentu je 7.13 dB, što je relativno niska vrijednost. Rezultati dobijeni primjenom predloženog algoritma za dekompoziciju prikazani su na slici 4.11, koja ilustruje robustnost algoritma na uticaj aditivnog Gausovog šuma. Zaključak Disertacija sadrži veći broj originalnih doprinosa u oblasti rekonstrukcije signala koji su rijetki ili visoko koncentrisani u različitim transformacionim domenima: Furijeovom, Hermitskom, zatim u domenima jednodimenzione i dvodimenzione diskretne kosinusne transformacije kao i u vremensko-frekvencijskim domenima, uključujući Wigner-ovu distribuciju, S-metod i kratkotrajnu Furijeovu transformaciju. Rezultati teze nijesu ograničeni isključivo na rekonstrukciju u kontekstu kompresivnog odabiranja. Pokazalo se da mjere koncentracije, kao fundamentalan koncept vezan za transformacione domene signala, mogu biti iskorišćene i u optimizaciji parametara tranformacija, uklanjanju šuma ili dekompoziciji nestacionarnih signala korišćenjem vremensko-frekvencijske analize. Navedeno znači da se koncept mjera koncentracije može koristiti u kontekstu različitih problema. Rezultati primjene predloženih algoritama na realne signale - biomedicinske, audio signale, digitalne slike, telekomunikacione signale itd., koji su predstavljeni u tezi, dodatno potkrepljuju ovu činjenicu. Drugi aspekti praktičnih primjena predmet su budućih istraživanja autora teze. U kontekstu kompresivnog odabiranja, pored sličnosti nekih opštih koncepata, odred¯ene specifičnosti transformacija zahtijevaju razvijanje posebne teorije koja će osvijetliti proces rekonstrukcije, uticaj nedostajućih odbiraka u signalima, kao i performanse algoritama za rekonstrukciju. Jedan od fundamentalnih izazova koji je ova teza postavila i kojim će se njen autor baviti u budućim istraživanjima - jeste mogućnost generalizacije predstavljenih rezultata. I pored velikog broja doprinosa, koji su publikovani kroz veći broj radova u renomiranim časopisima, i koji su izloženi na većem broju uglednih med¯unarodnih konferencija, istraživanja u sklopu ove teze otvorila su brojna nova pitanja i istraživačke izazove. U daljem radu planira se nastavak istraživanja u svim razmatranim oblastima. Autor disertacije je već započeo proširivanje prezentovane teorije na Hermitsku transformaciju drugog tipa, u smislu razvoja algoritama za optimizaciju njenih parametara i analize uticaja nedostajućih odbiraka. Jedan dio najnovijih rezultata u rekonstrukciji signala koji se odabiraju mimo uniformnog vremenskog grida nije uključen u ovu disertaciju. Mogućnost dekompozicije multivarijantnih signala otvorila je prostor za istraživanje praktičnih primjena, i ispitivanje mogućnosti dekompozicije korišćenjem naprednih algoritama, kao što su genetički algoritmi. Naročito je interesantno ispitivanje mogućnosti primjene dekompozicione tehnike na EKG i neke vrste telekomunikacionih signala. Uklanjanje Zaključak impulsnih smetnji u audio signalima, odnosno, mogućnost njihove rekonstrukcije, otvorio je dodatne istraživačke teme i u ovoj oblasti. To se prevashodno odnosi na mogućnost razvijanja algoritama za detekciju impulsnih smetnji, koji bi bili zasnovani, na primjer, na diferenciranju signala i detekciji impulsa pomoću mjera koncetracije u DCT domenu. Uticaj kvantizacije na kvalitet rekonstrukcije signala primjenom komporesivnog odabiranja nije razmatran u tezi, a nesumnjivo postoji mogućnost uspostavljanja veze izmed¯u ovog fenomena i greške u rekonstrukciji zašumljenih signala i signala koji su aproksimativno rijetki, a koji su rekonstruisani pod pretpostavkom rijetkosti. Još jedna vrlo insteresantna istraživačka tema jeste i rekonstrukcija signala koji nijesu na frekvencijskom gridu diskretne Furijeove transformacije.

Bibliografija [1] D.

Donoho: "Compressed sensing," IEEE Trans. on Information Theory, 2006, vol. 52, no. 4, pp. 1289–1306 [2] E. J. Candès, "The restricted isometry property and its implications for compressed sensing," Comptes Rendus Mathematique, vol. 346, no. 9, pp. 589-592, 2008. [3] R. 40

Baraniuk, "Compressive sensing," IEEE Signal Processing Magazine, vol. 24, no. 4, pp. 118–121, 2007. [4] E. Candès, J. Romberg, T. Tao, "Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information," IEEE Trans. on Information Theory, 44

2006, 52,

(2), pp. 489–509. [5] E. J. Candès, M. B. Wakin, "An Introduction To Compressive Sampling," IEEE Signal Processing Magazine ,Vol. 25, Issue 2, pp. 21–30, 2008. 49

[6] B.

Wohlberg, "Noise Sensitivity of Sparse Signal Representations: Reconstruction Error Bounds for the Inverse Problem," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 51, no. 12, pp. 3053–3060, December 2003. 65

[7]

L. Stanković, S. Stanković, and M. Amin, "Missing Samples Analysis in Signals for Applications to L-estimation and Compressive Sensing ,"Signal Processing, vol. 94, pp. 401-408, Jan 2014. 1

[8]

D. Wu, W. P. Zhu and M. N. S. Swamy, "The Theory of Compressive Sensing Matching Pursuit Considering Time-domain Noise with Application to Speech Enhancement," IEEE/ACM Trans. on Audio, Speech, and Language Process., vol. 22, no. 3, pp. 682-696, March 2014. [9] J. C. Wang, Y. S. Lee, C. H. Lin, S. F. Wang, C. H. Shih and C. H. Wu, "Compressive Sensing-Based Speech Enhancement," IEEE/ACM Trans. on Audio, Speech, and Language Process., vol. 24, no. 11, pp. 2122-2131, Nov. 2016. 1

[10]

M. Elad, Sparse and Redudant Representations: From Theory to Applications in Signal and Image Processing, Springer, 2010. [11] H. Rauhut, "Stability Results for Random Sampling of Sparse Trigonometric Polynomials," IEEE Trans. on Information theory, 54(12), pp. 5661–5670, 2008 1

[12]

C. Studer, P. Kuppinger, G. Pope, H. Bolcskei, "Recovery of sparsely corrupted signals," IEEE Trans. on Information Theory, vol.58, no.5, pp. 3115–3130. 47

, 2012. [13]

M. Davenport, M. Duarte, Y. Eldar, G. Kutyniok, "Introduction to compressed sensing," Chapter in Compressed Sensing: Theory and Applications, Cambridge University Press, 2012. 48

[14] D. Needell and J. A. Tropp, "CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples," Applied and Computational Harmonic Analysis, vol. 20, no. 3, pp. 301–321, 2009. 52

[15]

R. E. Carrillo, K. E. Barner, and T. C. Aysal, "Robust sampling and reconstruction methods for sparse signals in the presence of impulsive noise," IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing , 2010, vol. 4, no. 2, pp. 392–408. 1

[16]

E. Sejdić, M. A. Rothfuss, M. L. Gimbel, M. H. Mickle, "Comparative Analysis of Compressive Sensing Approaches for Recovery of Missing Samples in an Implantable Wireless Doppler Device," IET Signal Processing, vol. 8, no. 3, pp. 230-238, May 2014. 1

[17] E. Sejdić, A. Cam, L.F. Chaparro, C.M. Steele and T. Chau, "Compressive sampling of swallowing accelerometry signals using TF dictionaries based on modulated discrete prolate spheroidal sequences," EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2012:101 doi:10.1186/1687–6180–2012–101. [18] 59

E. Sejdic, "Time-Frequency Compressive Sensing", in Time-Frequency Signal Analysis and Processing, ed. B. Boashash, Academic Press, pp.424–429, Nov. 2015. 20

[19]

B. Jokanovic, M.G. Amin, Y.D. Zhang, F. Ahmad "Multi-window time?frequency signature reconstruction from undersampled continuous-wave radar measurements for fall detection," IET Radar, Sonar and Navigation, Volume 9, Issue 2, p. 173 – 183,Feb. 2015. 45

[20]

Z. Zhang, Y. Xu, J. Yang, X. Li, and D. Zhang, "A survey of sparse representation: algorithms and applications," IEEEAccess, vol. 3, pp. 490–530, 2015. 1

[21]

X. Li, G. Bi, "Image reconstruction based on the improved compressive sensing algorithm," IEEE Int. Conference on Digital Signal Processing (DSP), pp. 357–360, Singapore 2015 57

[22]

J. Music, T. Marasović, V. Papić, I. Orović, and S. Stanković, "Performance of compressive sensing image reconstruction for search and rescue," IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, Volume: 13, Issue: 11, pp.1739 - 1743, Nov. 2016. [23] I. Stanković, I. Orović, M. Daković, and S. Stanković, 35

"Denoising of Sparse Images in Impulsive Disturbance Environment, "Multimedia Tools and Applications, 73

https://doi.org/10.1007/s11042-017-4502-7, 2017. [24]

I. Volaric and V. Sucic, "On the noise impact in the L1 based reconstruction of the sparse 58

frequency distributions," 2016 International Conference on Broadband Communications for Next Generation Networks and Multimedia Applications (CoBCom), Graz, 2016, pp. 1–6. [25] L.

Stanković, I. Orović, S. Stanković, and M. Amin, "Robust Time Frequency Analysis based on the L-estimation and Compressive Sensing," IEEE Signal Processing Letters, vol. 20, no. 5, pp. 499–502, 2013. 46

[26] S.

Ji, Y. Xue, L. Carin, "Bayesian Compressive Sensing", IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 56, no. 6, pp. 2346–2356, June 2008. [27] S. Stanković, I. Orović, and L. Stanković, "An Automated Signal Reconstruction Method based on Analysis of Compressive Sensed Signals in Noisy Environment," Signal Processing, vol. 104, Nov 2014, pp. 43 – 50, 2014. [28] L. Stanković, Digital Signal Processing with Selected Topics, CreateSpace Independent Publishing Platform, An Amazon.com Company, November 4, 2015 [29] L. Stanković. M. Brajović, "Influence of Missing Samples on Signals Sparse in the 1

DCT Domain with Application to Audio Signals," IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing, vol. 26, no.7, July 2018, pp.1216-1231, DOI: 10.1109/TASLP.2018.2819819 [30]

L. Stanković, I. Stanković, and M. Daković, "Nonsparsity Influence on the ISAR Recovery from Reduced Data," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 52, Issue: 6, Dec. 2016, pp. 3065 - 3070 [31] G. Bi, S. K. Mitra, S. Li, "Sampling rate conversion based on DFT and DCT," Signal Processing, Volume 93, Issue 2, pp. 476–486, Feb. 2013. [32] L. Zhao, G. Bi, L. Wang, H. Zhang, "An Improved Auto-Calibration Algorithm Based on Sparse Bayesian Learning Framework," IEEE Signal Processing Letters, vol. 20, no.9, pp. 889–892, 2013. 1

[33] J. More and

G. Toraldo, "On the solution of large quadratic programming problems with bound constraints," SIAM Journal on Optimization , vol. 1, pp. 93–113, 1991. 74

[34] L.

Stanković, M. Daković, and S. Vujović, "Adaptive Variable Step Algorithm for Missing Samples Recovery in Sparse Signals" IET Signal Processing, vol. 8, no. 3, pp. 246 -256, 2014. (arXiv:1309.5749v1). 17

[35]

L. Stanković, and M. Daković, "On a Gradient-Based Algorithm for Sparse Signal Reconstruction in the Signal/Measurements Domain," Mathematical Problems in Engineering, vol. 2016, Article ID 6212674, 11 pages, 2016. doi:10.1155/2016/6212674. 1

[36]

G. Davis, S. Mallat and M. Avellaneda, "Greedy adaptive approximation ,"Journal of Constructive Approximation , vol. 12, pp. 57–98, 1997. [37] R.J. Tibshirani, "Regression shrinkage and selection via the lasso: A retrospective," Journal of the Royal Statistical Society , Series B, 73:273–282, 2011. [38] M. 1

Tipping, "Sparse Bayesian Learning and the Relevance Vector Machine", Journal of Machine Learning Research, JMLR.org, 2001, 1, pp.211- 244 [39]

P. Molchanov, J. Astola, K. Egiazarian and A. Totsky, "Ground moving target 89

classification by using DCT coefficients extracted from micro-Doppler radar signatures and artificial neuron network,"Microwaves, Radar and Remote Sensing Symposium, Kiev, 2011, pp. 173–176 [40]

V. A. Allen and J. Belina, "ECG data compression using the discrete cosine transform (DCT)," Proceedings Computers in Cardiology, Durham, NC, 1992, pp. 687–690. 70

[41]

V. Britanak and K. R. Rao, "An efficient implementation of the forward and inverse MDCT in MPEG audio coding," IEEE Signal Processing Letters, vol. 8, no. 2, pp. 48–51, Feb. 2001. [42] P. Maechler et al., "VLSI Design of Approximate Message Passing for Signal Restoration and Compressive Sensing," IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems, vol. 2, no. 3, pp. 579–590, Sept. 2012. [43] D. Bellasi, P. Maechler, A. Burg, N. Felber, H. Kaeslin and C. Studer, "Live 1

demonstration: Real-time audio restoration using sparse signal recovery," 2013 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS2013), Beijing, 2013, pp. 659-659. [44]

L. Stanković, M. Daković, T. Thayaparan, Time-Frequency Signal Analysis with Applications, 82

Artech House, Boston, 2013. [45] L. Stanković, M. Daković, and S. Vujović, "Reconstruction of Sparse Signals in Impulsive Disturbance Environments," Circuits, Systems and Signal Processing, vol. 2016. pp. 1-28, DOI: 10.1007/s00034-016-0334-3, ISSN: 0278-081X print, 1531-5878 online 1

[46]

M. Hazewinkel (Ed.) Edgeworth series, Encyclopedia of Mathematics, Springer, 2001. [47] P. Billingsley, Probability and Measure, Third ed., John Wiley & sons, 1995. 1

[48]

H. S. Malvar, Signal Processing with Lapped Transforms, Artech House, Boston, 1992. 72

[49]

A. Adler, V. Emiya, M. G. Jafari, M. Elad, R. Gribonval and M. D. Plumbley, "Audio Inpainting," IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing, vol. 20, no. 3, pp. 922-932, March 2012. doi: 10.1109/TASL.2011.2168211 1

[50]

M. Niedźwiecki and M. Ciołek, “Elimination of Impulsive Disturbances From 99

Archive Audio Signals Using Bidirectional Processing,” IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing, vol. 21, no. 5, pp. 1046-1059, May 2013. doi: 10.1109/TASL.2013.2244090 [51]

M. Ciołek and M. Niedźwiecki, “Detection of impulsive disturbances in archive audio signals,” 2017 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), New Orleans, LA, 2017, pp. 671-675. 1

doi: 10.1109/ICASSP.2017.7952240 [52]

M. Ruhland, J. Bitzer, M. Brandt and S. Goetze, “Reduction of Gaussian, Supergaussian, 1

and Impulsive Noise by Interpolation of the Binary Mask Residual,” in IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing, vol. 23, no. 10, pp. 1680–1691, Oct. 2015. doi: 10.1109/TASLP.2015.2444664 [53]

M. Siu and A. Chan, “A Robust Viterbi Algorithm Against Impulsive Noise With Application to Speech Recognition,” in IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing, vol. 14, no. 6, pp. 2122-2133, Nov. 2006. doi: 10.1109/TASL.2006.872592 [54] F. R. Avila and L. W. P. Biscainho, “Bayesian Restoration of Audio Signals Degraded by Impulsive Noise Modeled as Individual Pulses,” in IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing, vol. 20, no. 9, pp. 2470-2481, Nov. 2012. doi: 10.1109/TASL.2012.2203811 [55] J. 1

Gemmeke, H. Van Hamme, B. Cranen, and L. Boves, “Compressive sensing for missing data imputation in noise robust speech recognition,” IEEE J. Sel. Topics Signal Process., vol. 4, no. 2, pp. 272–287, Aug. 2010. 38

[56]

Subramanya et al., “Automatic Removal of Typed Keystrokes,” IEEE Signal Proc. Letters, Vol. 14, No. 5, May 2007 1

[57]

O. Cappé, "Elimination of the musical noise phenomenon with the Ephraim and Malah noise suppressor," IEEE Transactions on Speech and Audio Processing, 2(2):345-349, 1994. [58] O. Cappé and J. Laroche, "Evaluation of short-time spectral attenuation techniques for the restoration of musical recordings," IEEE Transactions on Speech and Audio Processing, 3(1):84-93, 1995. [59] S. Canazza, G. De Poli and G. A. Mian, "Restoration of Audio Documents by Means of Extended Kalman Filter, " IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing, vol. 18, no. 6, pp. 1107-1115, Aug. 2010. doi: 10.1109/TASL.2009.2030005 [60] J. Huang and 1

Y. Zhao, "A dct-based fast signal subspace technique for robust speech recognition," IEEE Trans. Speech Audio Process., vol. 8, no. 6, pp. 747–751, Nov. 2000. [61] 1

D. Donoho and M. Elad., "Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via ℓ1 minimization," Proc. Natl. Acad. Sci., 100(5):2197–2202, 2003. 64

[62]

A. W. Rix, J. G. Beerends, M. P. Hollier, and A. P. Hekstra, "Perceptual evaluation of 55

speech quality (pesq)-a new method for speech quality assessment of telephone networks and codecs," in Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP), vol. 2, 2001, pp. 749–752. [63]

L. Welch, "Lower bounds on the maximum cross correlation of signals," IEEE Trans. Inform. Theory, 20(3), pp. 397–399, 1974 1

[64]

V. Britanak, P. C. Yip and K. R. Rao, Discrete Cosine and Sine Transforms: General Properties, Fast Algorithms and Integer Approximations, Academic Press& Elsevier Science, Amsterdam, 2007. 33

[65]

E. Vincent, S. Araki, and P. Bofill, The 2008 Signal Separation Evaluation Campaign: A Community-Based Approach to Large-Scale Evaluation. Paraty, Brazil: Springer, Mar. 2009. [66] Audio signals database [available online]: http://small-project.eu/software-data, last accessed Sept. 2017 1

[67] S.

J. Godsill and P. J. W. Rayner, Digital Audio Restoration–A Statistical Model-Based Approach, Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1998. [68] W. Etter, "Restoration of a discrete-time signal segment by interpolation based on the left-sided and right-sided autoregressive parameters," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 44, no. 5, pp. 1124-1135, May 1996. [69] Han Lin and S. Godsill, "The multi-channel AR model for real-time audio restoration," IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics, 2005., New Paltz, NY, 2005, pp. 335-338. [70] P. J. W. Rayner and S. J. Godsill, "The Detection and Correction of Artefacts in Degraded Gramophone Recordings," Final Program and Paper Summaries 1991 IEEE ASSP Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics, New Paltz, NY, USA, 1991, pp. 151-152. [71] S. J. Godsill and P. J. W. Rayner, "A Bayesian approach to the restoration of degraded audio signals ,"IEEE Transactions on Speech and Audio Processing, vol. 3, no. 4, pp. 267-278, Jul 1995. [72] S. J. Godsill and C. H. Tan, "Removal of low frequency transient noise from old recordings using model-based signal separation techniques," Proceedings of 1997 Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics, New Paltz, NY, 1997, pp. 4 [73] S. J. Godsill and P. J. W. Rayner, "Robust noise modelling with application to audio restoration," Proceedings of 1995 Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Accoustics, New Paltz, NY, 1995, pp. 143–146. [74] C. M. Hicks and S. J. Godsill, "A two-channel approach to the removal of impulsive noise from archived recordings ,"Acoustics, Speech, and Signal Processing", 1994. ICASSP-94., 1994 IEEE International Conference on, Adelaide, SA, 1994, pp. II/213-II/216 vol.2. [75] S. J. Godsill, P. J.Wolfe, and W. N. W. Fong, "Statistical model-based approaches to audio restoration and analysis," J. New Music Res., vol. 30, no. 4, pp. 323–328, 2001. [76] A. Janssen, R. Veldhuis and L. Vries, "Adaptive interpolation of discrete-time signals that can be modeled as autoregressive processes" in IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. 34, no. 2, pp. 317-330, Apr 1986. 1

[77]

J. K. Nielsen, M. G. Christensen, A. T. Cemgil, S. J. Godsill and S. H. Jensen, "Bayesian interpolation in a dynamic sinusoidal model with application to packet-loss concealment," 2010 18th European Signal Processing Conference, Aalborg, 2010, pp. 239-243 [78] H. Ofir, D. Malah and I. Cohen, "Audio Packet Loss Concealment in a Combined MDCT-MDST Domain," IEEE Signal Processing Letters, vol. 14, no. 12, pp. 1032–1035, Dec. 2007. [79] H. Ofir and D. Malah, "Packet Loss Concealment for Audio Streaming based on the GAPES and MAPES Algorithms," 2006 IEEE 24th Convention of Electrical & 1

Electronics Engineers in Israel, Eilat, Israel, 2006, pp. 280–284. [80] C. Perkins, O. Hodson and V. Hardman, “A survey of packet loss recovery techniques for streaming audio,” in IEEE Network, vol. 12, no. 5, pp. 40-48, Sept.-Oct. 1998. [81] D. Goodman, G. Lockhart, O. Wasem and Wai-Choong Wong, “Waveform substitution techniques for recovering missing speech segments in packet voice communications,” IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. 34, no. 6, pp. 1440-1448, Dec 1986. [82] B. K. Lee and J. H. Chang, “Packet Loss Concealment Based on Deep Neural Networks for Digital Speech Transmission,” IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing, vol. 24, no. 2, pp. 378-387, Feb. 2016. [83] A. Stenger, K. Ben Younes, R. Reng and B. Girod, “A new error concealment technique for audio transmission with packet loss,” 1996 8th European Signal Processing Conference (EUSIPCO 1996), Trieste, Italy, 1996, pp. 1-4. [84] B. W. Wah, Xiao Su and Dong Lin, “A survey of error-concealment schemes for real-time audio and video transmissions over the Internet,” Proceedings International Symposium on Multimedia Software Engineering, Taipei, 2000, pp. 17-24. [85] C. A. Rodbro, M. G. Christensen, S. V. Andersen and S. H. Jensen, “Compressed domain

packet loss concealment of sinusoidally coded speech” Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2003. Proceedings. (ICASSP ’03). 2003 IEEE International Conference on, 2003, pp. I-104–7 vol.1. [86]

H. Buchner, J. Skoglund and S. Godsill, “An acoustic keystroke transient canceler 1

for speech communication terminals using a semi-blind adaptive filter model,” 2016 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), Shanghai, 2016, pp. 614-618. [87]

J. Nuzman, “Audio restoration: An investigation of digital methods for click removal and hiss 1 reduction,” University of Maryland, Institute for Advanced Computer Studies, 2004 [Online]. Available: www.github.com/jnuzman/audio-restoration-2004, last updated/accessed in Dec. 2017. [88] R. Huber and B. Kollmeier, “PEMO-Q–A New Method for Objective Audio Quality Assessment Using a Model of Auditory Perception,” in IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing, vol. 14, no. 6, pp. 1902–1911, Nov. 2006. [89] V. Emiya, E. Vincent, N. Harlander and V. Hohmann, “Subjective and objective quality assessment of audio source separation,” IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing, 19(7):2046-2057, 2011. [90] E. Vincent, “Improved perceptual metrics for the evaluation of audio source separation, ” 10th Int. Conf. on Latent Variable Analysis and Signal Separation (LVA/ICA 2012), 2012.

[91] A.

Sandryhaila, S. Saba, M. Puschel, J. Kovacevic, “Efficient compression of QRS complexes using 13 Hermite expansion,” IEEE Transactions on Signal Proccessing, vol.60, no.2, pp.947-955, 2012.

[92] A. Sandryhaila, J. Kovacevic, and M. Püschel, “Compression of QRS complexes using Hermite expansion,” in

Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech Signal Processing,

pp. 581–584, 2011. [93] M. Brajović, I. Orović, M. Daković, and S. Stanković, “Gradient-based signal reconstruction algorithm in the Hermite transform domain,” Electronics Letters, vol. 52, no. 1, 2

2016. [94]

J.-B. Martens, “The Hermite transform—Applications, ” IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. 38, no. 9, pp. 1607–1618, 1990. [95] D. 31

Kortchagine, A. Krylov, “Image Database Retrieval by Fast Hermite Projection Method” Int. Conf. Graphicon, pp. 308-311, Russia, 2005 31

[96] A. Krylov, D.

Korchagin, “Fast Hermite Projection Method,” Int. Conference on Image Analysis and Recognition (ICIAR), LNCS vol. 4141/2006, pp. 329-338, Portugal, 2006 53

[97] P.

Lazaridis, G. Debarge, and P. Gallion,“Discrete orthogonal Gauss–Hermite transform for optical pulse propagation analysis” J. Opt. Soc. Am. B 20, pp. 1508-1513, 2003. [98] S. Thangavelu: Lectures on Hermite and Laguerre Expansions, Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1993. [99] S. Stanković, I. Orović, A. Krylov, “The two-dimensional Hermite S-method for high resolution inverse synthetic aperture radar imaging applications,” IET Signal Processing, vol. 4, no. 4, pp. 352-362, 2010. [100] M. Brajović, I. Orović, M. Daković, and S. Stanković, “On the Parameterization of Hermite Transform with Application to the Compression of QRS Complexes,” Signal Processing, vol. 131, pp. 113-119, February 2017 [101] M. Brajović, I. Orović, M. Daković, and S. Stanković, “The Analysis of Missing Samples in Signals Sparse in the Hermite Transform Domain,” 23rd Telecommunications Forum TELFOR, Belgrade, 2

2015 [102] S.

Stanković, I. Orović, A. Krylov, “Video Frames Reconstruction based on 24

Time-Frequency Analysis and Hermite projection method,” EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, Special Issue on Time-Frequency Analysis and its Application to Multimedia signals, Vol. 2010, Article ID 970105, 11 pages, 2010. [103] S. Winitzki, “Uniform approximations for transcendental functions,”

Proc. Computational Science and Its Applications ICCSA-2003, LNCS 2667/2003, Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 962., 2003. [104] S .Winitzki, “A handy approximation for the error function and its inverse,” Lecture Note, 2008. 9

[105]

G. Leibon, D. N. Rockmore, W. Park, R. Taintor, G. S. Chirikjian, A fast Hermite transform, Theoretical Computer Science 409 (2) (2008) 211–228, 7

doi:

10.1016/j.tcs.2008.09.010. [106] J.-B. Martens, The Hermite transform—Theory, IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Process. 38 (9) (1990) 1595–1605, 3

doi: 10

.1109/29.60086. [107] A. I. Rasiah, R. Togneri, Y. Attikiouzel, Modelling 1-D signals using Hermite basis functions, IEE Proc. Vision, Image and Signal Process. 144 (6) (1997) 345–354, 3

doi:

10.1049/ip-vis:19971613. [108] E. Moya-Albora, B. Escalante-Ramíreza, E. Vallejob, Optical flow estimation in cardiac CT images using the steered Hermite transform, Signal Process.: Image Communication 28 (3) (2013) 267–291, 3 doi: 10.1016/j.image.2012.11.005. [109]

R. Ma, L. Shi, Z. Huang, Y. Zhou, EMP Signal Reconstruction Using Associated-Hermite Orthogonal Functions, IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility 56 (5) (2014) 1242–1245, 3

doi:

10.1109/TEMC.2014.2312003. [110] Mengtao Yuan, A. De, T. K. Sarkar, Jinhwan Koh, Baek Ho Jung, Conditions for generation of stable and accurate hybrid TD-FD MoM solutions, IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques 54 (6) (2006) 2552–2563, 3

doi: 10.1109/TMTT.2006.875823. [111]

M. Abramowitz, I.A. Stegun (eds), Handbook of mathematical functions, 107

Dover Publ., New York, 1992. [112] W. Gautschi, Orthogonal Polynomials: Computation and Approximation. Oxford Univ. Press, Oxford, U.K., 3

2004. [113]

A. Krylov, D. Kortchagine, “Fast Hermite projection method,” Int. Conf. on Image Analysis and Recognition, Portugal: 329-338, 2006 61

[114]

I. Orović, S. Stanković, T. Chau, C. M. Steele, and E. Sejdić, “Time-frequency analysis and Hermite projection method applied to swallowing accelerometry signals,” EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, Vol. 2010, Article ID 323125, 7 pages, 2010. [115] S. Stanković, I. Orović, and LJ. Stanković, 26

“Compressive Sensing approach in Hermite transform domain,”

Mathematical Problems in Engineering, Volume 2015 (2015), Article ID 286590, 9 pages 30

[116]

A. Mahadevan, S. Acharya, D. B. Sheffer and D. H. Mugler, "Ballistocardiogram Artifact 71

Removal in EEG-fMRI Signals Using Discrete Hermite Transforms,"in IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, vol. 2, no. 6, pp. 839-853, Dec. 2008. doi: 10.1109/JSTSP.2008.2008367 [117]

D. H. Mugler, S. Clary and Yan Wu, Điscrete Hermite expansion of digital signals: applications to ECG signals,"Proceedings of 2002 IEEE 10th Digital Signal Processing Workshop, 2002 and the 2nd Signal Processing Education Workshop., 2002, 7

pp.

262-267. [118] X. Ning, I. W. Selesnick, "ECG Enhancement and QRS Detection Based on Sparse Derivatives ,"Biom. Sig. Proc. 7

and

Control, vol. 8, no. 6, pp. 713-723, 2013, doi: 10.1016/j.bspc.2013. 06 .005 [119] J. 63

R. de Oliveira Neto, J. B. Lima, "Discrete fractional Fourier transforms based 7

on closed-form Hermite-Gaussian-like DFT eigenvectors," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 65, no. 23, pp. 6171-6184, December 2017. doi:10.1109/TSP.2017.2750105 [120]

C. Candan, M. A. Kutay and H. M. Ozaktas, "The discrete fractional Fourier transform,"in IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 48, no. 5, pp. 1329-1337, May 2000. [121] S. C. Pei, W. L. Hsue and J. J. Ding, Điscrete Fractional Fourier Transform Based on New Nearly Tridiagonal Commuting Matrices," in IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 54, no. 10, pp. 3815-3828, 11

Oct. 2006. [122] B. Santhanam and T. S. Santhanam, Điscrete Gauss-Hermite Functions and Eigenvectors

of the Centered Discrete Fourier Transform,"2007 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing - ICASSP ’07, Honolulu, HI, 2007, pp. 1385-1388. [123]

M. T. Hanna, N. P. A. Seif, and W. A. E. M. Ahmed, “Discrete fractional Fourier transform based on the eigenvectors of tridiagonal and nearly tridiagonal matrices,” Digital Signal Processing, vol. 18, no. 5, pp. 709–727, Sep 2008. [124] S. C. Pei, J. J. Ding, W. L. Hsue and K. W. Chang, "Generalized Commuting Matrices and Their Eigenvectors for DFTs, Offset DFTs, and Other Periodic Operations,"in IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 56, no. 8, pp. 3891-3904, Aug. 2008. [125] A, Serbes, L. Durak-Ata, "Efficient computation of DFT commuting matrices by a closed-form infinite order approximation to the second differentiation matrix,Šignal Processing, vol. 91, Issue 3, 2011, pp. 582-589 [126] D. Y. Wei, Q. W. Ran, Y. M. Li, J. Ma and L. Y. Tan, "Fractionalisation of an odd time odd frequency DFT matrix based on the eigenvectors of a novel nearly tridiagonal commuting matrix,"in IET Signal Processing, vol. 5, no. 2, pp. 150-156, April 2011. [127] D. Wei and Y. Li, "Novel Tridiagonal Commuting Matrices for Types I, IV, V, VIII DCT and DST Matrices,"in IEEE Signal Processing Letters, vol. 21, no. 4, pp. 483-487, April 2014. [128] I. Bhatta and B. Santhanam, "A comparative study of commuting matrix approaches for the discrete fractional fourier transform,"2015 IEEE Signal Processing and Signal Processing Education Workshop (SP/SPE), Salt Lake City, UT, 4

2015, pp. 1-6. [129] Ç. Candan, "On Higher Order Approximations for Hermite–Gaussian Functions and Discrete Fractional Fourier Transforms,"in IEEE Signal Processing Letters, vol. 14, no. 10, pp. 699-702, Oct. 2007. [130] M. T. Hanna, N. P. A. Seif and W. A. E. M. Ahmed, "Hermite-Gaussian-like eigenvectors of the discrete Fourier transform matrix based on the singular-value decomposition of its orthogonal projection matrices,"in IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, vol. 51, no. 11, pp. 2245-2254, Nov. 2004. [131] M. T. Hanna, N. P. A. Seif and W. A. E. M. Ahmed, "Hermite-Gaussian-like eigenvectors of the discrete Fourier transform matrix based on the direct utilization of the orthogonal projection matrices on its eigenspaces,"in IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 54, no. 7, pp. 2815-2819, July 2006. [132] M. T. Hanna, Đirect Batch Evaluation of Optimal Orthonormal Eigenvectors of the DFT Matrix," in IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 56, no. 5, pp. 2138-2143, May 2008. [133] M. T. Hanna, Đirect sequential evaluation of optimal orthonormal eigenvectors of the discrete Fourier transform matrix by constrained optimization,Đigital Signal Processing, vol. 22, Issue 4, 2012, pp. 681-689 [134] A. Serbes and L. Durak-Ata, “The discrete fractional Fourier transform based on the DFT matrix,” Signal Processing, vol. 91, no. 3, pp. 571–581, March 2011. 4

[135] S

.-C. Pei, M.-H. Yeh and C.-C. Tseng, Discrete fractional Fourier transform based on orthogonal projections," in IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 47, no. 5, pp. 1335-1348, May 1999. 14

[136]

A. Kuznetsov, “Explicit Hermite-type eigenvectors of the discrete Fourier transform,” SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, vol. 36, no. 4, pp. 1443–1464, 2015. 4

[137] S.

C. Pei and Y. C. Lai, Signal Scaling by Centered Discrete Dilated Hermite Functions," in IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 60, no. 1, pp. 498-503, Jan. 2012. 14

doi:

10.1109/TSP.2011.2171687 [138] S. Clary, and D. H. Mugler. Shifted Fourier matrices and their tridiagonal commutors.SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications 24, 7

no. 3 (2003): 809-821. [139]

Z. Xu, B. Huang, K. Li, On Fourier Interpolation Error for Band-Limited Signals, IEEE Trans. on Signal Process. 57 (6) (2009) 2412–2416, 7

doi: 10.1109/TSP.2009.2016263. [140]

T. I. Laakso, V. Valimaki, M. Karjalainen, U. K. Laine, Splitting the unit delay [FIR/all pass filters design], IEEE Signal Process. Magazine 13 (1) (1996) 30–60, 3

doi: 10.1109/79.482137. [141] JP. Berrut, “A formula for the error of finite sinc-interpolation over a finite interval,” Numerical Algorithms, Vol. 45, Issue 1–4, pp 369–374, Aug. 2007 [142] A. Papoulis, Signal analysis, McGraw-Hill, New York, 1977. [143]

Antoniadis, A.; G. Oppenheim, Eds. (1995), Wavelets and statistics, 103, Lecture Notes in Statistics, Springer Verlag. [144] Donoho, D.L. (1993), "Progress in wavelet analysis and WVD: a ten minute tour," in Progress in wavelet analysis and applications, Y. Meyer, S. Roques, pp. 109–128. Frontires Ed. [145] Donoho, D.L.; I.M. Johnstone (1994), "Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage," Biometrika, Vol. 81, pp. 425–455. [146] Donoho, D.L. (1995), "De-noising by soft-thresholding," IEEE Trans. on Inf. Theory, 42 3, pp. 613– 627. 12

[147]

B. A. Rajoub, An efficient coding algorithm for the compression of ECG signals using the wavelet transform, IEEE Trans. Biomedical Eng. 49 (4) (2002) 355–362, 3

doi: 10

.1109/10.991163 [148] N. Boukhennoufa, K. Benmahammed, M. A. Abdi, F. Djeffal, Wavelet-based 3

ECG signals compression using SPIHT technique and VKTP coder, in: 3rd Int. Conf. on Signals, Circuits and Systems (SCS), Medenine, 2009, pp. 1–5, doi: 10.1109/ICSCS.2009.5412584. [149] S.

Olmosa, J. Garc ??aa, R. Janéb, P. Lagunaa, ECG signal compression plus noise filtering with truncated orthogonal expansions, Signal Process. 79 (1) (1999) 97–115. 41

doi:10.1016/S0165-1684(99)00083-3. [150] MIT-BIH ECG Compression Test Database [Online].

http://www.physionet. org/physiobank/database/ cdb [151] L. R. L. Conte, R. Merletti, G. V. Sandri, Hermite expansion of compact support waveforms: Applications to myoelectric signals, IEEE Trans. Biomedical Engineering 41 32

(12) (1994) 1147–1159, doi: 10.1109/10.335863. [152]

P. Laguna, R. Jané, S. Olmos, N. V. Thakor, H. Rix, P. Caminal, Adaptive estimation of QRS complex wave features of ECG signal by the Hermite model, Medical and Biological Engineering and 22

Computing 34 (1) (1996) 58–68,

3

doi:

10.1007/BF02637023 [153] L. Sörnmo, P. O. Börjesson, P. Nygards, O. Pahlm, A method for evaluation of QRS shape features using a mathematical model for the ECG, IEEE Trans. Biomedical Eng. 28 (10) (1981) 713–717,

3

doi:

10.1109/TBME.1981.324666. [154] M. Lagerholm, C. Peterson, G. Braccini, L. Edenbranhdt, L. Sörnmo, Clustering ECG complexes using Hermite functions and self-organizing maps, IEEE Trans. Biomedical Eng. 47 (7) (2000) 838–848,

doi: 10.1109/10.846677. [155] Y. Kopsinis and S. McLaughlin,

29

Development of EMD-Based Denoising Methods Inspired by Wavelet Thresholding," in IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 57, no. 4, pp. 1351-1362, April 2009, doi: 10.1109/TSP.2009.2013885

[156]

7

I. Selesnick, Sparsity-assisted signal smoothing (revisited),"2017 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), New Orleans, LA, 2017,

pp.

7

4546-4550. [157] I. W. Selesnick, Sparsity-assisted signal smoothing (SASS) [available online]: http://eeweb.poly.edu/iselesni/sass/, accessed January

2017. [158]

H. Rauhut, R. Ward, “Sparse Legendre expansions via l1-minimization,” J. Approx. Theory, 164(5):517-533, 2012. 76

[159]

H. Rauhut, “Stability Results for Random Sampling of Sparse Trigonometric Polynomials,” IEEE Tran. on Information theory, 54(12), pp. 5661 – 5670, 2008 1

[160]

I. Candel, C. Ioana, B. Reeb, “Robust sparse representation for adaptive sensing of turbulent phenomena,” IET Signal Processing, vol. 8, no. 3, 2014, pp. 285-290 [161] S. Stankovic, LJ. Stankovic, I. Orovic, “A Relationship between the Robust Statistics Theory and Sparse Compressive Sensed Signals Reconstruction,” IET Signal 2

Processing, Special issue on Compressive Sensing and Robust Transforms, May 2014. 97

[162]

M. Ghavami, L.B. Michael, R. Kohno, Ultra Wideband Signals and Systems in Communication Engineering, 2nd Edition, Wiley, 2007. [163] R. J. M. Cramer, R. A. Scholtz, and M. Z. Win , “Evaluation of an Ultra-Wide Band Propagation Channel,” IEEE Transactions on Antennas and Propagation, May 2002, 7

doi: 10.1109/TAP.2002.1011221 [164]

UltRa Lab UWB data: http://ultra.usc.edu/uwb_database/tdcindoor. [165] H. Zhang, X. Cui and T. A. Gulliver, “Remotely-sensed TOA interpretation of synthetic UWB based on neural networks,” EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2012, 2012 9

[166]

L. H. Nguyen, T. Tran and T. Do, "Sparse models and sparse recovery for ultra-wideband SAR applications," in IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 9

vol. 50, no. 2, pp. 940-958, April 2014. [167] J. L. Paredes, G. R. Arce and Z. Wang, "Ultra-Wideband Compressed Sensing: Channel Estimation," in IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, vol. 1, no. 3, pp. 383-395, Oct. 2007. 2

[168]

Huang, L. Qu, B. Wu, and F. Guangyou, "UWB through-wall imaging based on compressive sensing ," IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing, vol. 48, no. 3, pp. 1408-1415, Mar. 2010 18

[169]

M. Z. Win, R. A. Scholtz, Ultra-wide bandwidth time-hopping spread spectrum impulse radio for wireless multiple-access communication, IEEE Trans. on Communications, 48 (4) (2000) 679–691, 3

doi: 10

.1109/26.843135. [170] F. Ramirez-Mireles, On the performance of ultra-wide-band signals in Gaussian noise and dense multipath, IEEE Trans. on Vehicular Technology 50 (1) (2001) 244–249, 3

doi: 10.1109/25.917932. [171] S.

Gezici, H. Kobayashi, H. V. Poor and A. F. Molisch, "Performance evaluation of impulse radio UWB systems with pulse-based polarity randomization,"in IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 53, no. 7, pp. 2537-2549, July 2005. 39

[172] M. C. Shastry, R. M. Narayanan and M. Rangaswamy, "Sparsity-based signal processing for noise radar imaging," in

IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 51, no. 1, pp. 314-325, January 2015. [173] M. 17

J., Lindenfeld, “Sparse frequency transmit-and-receive waveform design,”

IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 40 (July 2004), 851–861. [174] M. C. Shastry, R. M. Narayanan and M. Rangaswamy, “Sparsity-based signal processing for noise radar imaging,” IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 9

vol. 51, no. 1, pp. 314-325, January 2015. doi: 10.1109/TAES.2014. 17

130733 [175]

N. Anselmi, G. Oliveri, M. Salucci, and A. Massa, “Wavelet-based compressive imaging of sparse targets,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 63, no. 11, pp. 4889-4900, Nov. 2015. [176] N. Anselmi, G. Oliveri, M. A. Hannan, M. Salucci, and A. Massa, “Color compressive sensing imaging of arbitrary shaped scatterers,” IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol. 65, pp. 1986-1999, 2

2017. [177]

L. C. Potter, E. Ertin, J. T. Parker, and M. Cetin, “Sparsity and compressed sensing in radar imaging,” Proc. IEEE, vol. 98, no. 6, pp. 1006-1020, June 2010 18

[178]

Lagunas, M. G. Amin, F. Ahmad, and M. Najar, “Joint wall mitigation and compressive sensing for indoor image reconstruction,” IEEE Trans. Geosci. Remote Sens., vol. 51, no. 2, pp. 891-906, Feb. 2013 [179] Oliveri, P. Rocca, and A. Massa, “A Bayesian compressive sampling-based inversion for imaging sparse scatterers,” IEEE Trans. Geosci. Remote Sens., vol. 49, no. 10, pp. 3993-4006, Oct. 2011 [180] G. Oliveri, N. Anselmi, and A. Massa, “Compressive sensing imaging of non-sparse 2D scatterers by a total-variation approach within the Born approximation,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 62, no. 10, pp. 5157–5170, Oct. 2014. [181] E. A. Marengo, R. D. Hernandez, Y. R. Citron, F. K. Gruber, M. Zambrano, and H. Lev-Ari, “Compressive sensing for inverse scattering,” Proc. XXIX URSI General Assembly, Chicago, Illinois, August 7-16, 2008. 2

[182]

Fannjiang and H.-C. Tseng, "Compressive radar with off-grid targets: a perturbation approach," Inv. Probl., vol. 29, no. 5, art. no. 054008, pp.1-23, May 2013. 9

[183]

D. Malioutov, M. Cetin, and A. S. Willsky, "A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays," IEEE Trans. Signal Processing, vol. 53, no. 8, pp. 3010-3022, Aug. 2005 [184] M. D. Migliore, "A compressed sensing approach for array diagnosis from a small set of near-field measurements," IEEE Tran. Antennas Propag., vol. 59, no. 6, pp. 2127-2133, June 2011. [185] V. M. Patel, G. R. Easley, D. M. Healy, Jr., and R. Chellappa, "Compressed synthetic aperture radar," IEEE J. Sel. Topics Signal Process., vol. 4, no. 2, pp. 244–254, Apr. 2010. 2

[186]

A. Massa, P. Rocca, and G. Oliveri, "Compressive sensing in electromagnetics - A review," IEEE Antennas Propag. Mag., vol. 57, no. 1, pp. 224-238, Feb. 2015. [187] A. Massa, P. Rocca, and G. Oliveri, "Compressive sensing as a new paradigm in wave scattering and propagation," in Proc. IEEE Int. Symp. Antennas Propag., Fajardo, Puerto Rico, Jun. 2016, pp. 1525–1526. [188] A. Massa, G. Oliveri, N. Anselmi, L. Poli, and L Tenuti, "CS-based computational imaging at microwave frequencies," Proc. IEEE Int. Symp. Antennas Propag., Fajardo, Puerto Rico, Jun. 2016, pp. 1061–1062. [189] A. Massa, G. Oliveri, N. Anselmi, and L. Poli, "Compressive sensing as applied to electromagnetics—Challenges, solutions, and future trends," Proc. 10th Eur. Conf. Antennas Propag., Davos, Switzerland, Apr. 2016, pp. 1–4. 2

[190]

LJ. Stanković, I. Orović, S. Stanković, M. Amin, "Compressive Sensing 24

Based Separation of Non-Stationary and Stationary Signals Overlapping in Time-Frequency," IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 61, no. 18, pp. 4562-4572, 2013 [191] E. Sejdic, L. Chaparro, "Time-frequency representations based on compressive samples,"

Proc. of the 21st European Signal Processing Conference (EUSIPCO), 2013, pp.1-4 9

[192] S.

Stanković, I. Orović, and E. Sejdić, Multimedia signals and systems, Springer - Verlag, 2012 66

[193] L.

Stanković, M. Daković, T. Thayaparan, and V. Popović-Bugarin, "Micro-Doppler Removal in the Radar Imaging Analysis" IEEE Trans. on Aerospace and El. Sys., Vol. 49, No. 2, April 2013, pp.1234–1250 6

[194]

M. Martorella, "Novel approach for ISAR image cross-range scaling," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 44, no. 1, pp. 281-294, January 2008. 51

[195] M. Brajović, L. Stanković, and M. Daković, "Micro-Doppler removal in radar imaging in the case of non-compensated rigid body acceleration," 2018 23rd International Scientific-Professional Conference on Information Technology (IT), Zabljak, Montenegro, 2018, pp. 1-4, February 19-24, doi: 10.1109/SPIT.2018.8350451 [196]

V. C. Chen, F. Li, S. S. Ho and H. Wechsler, "Analysis of micro-Doppler signatures," in IEE Proceedings – Radar, Sonar and Navigation, vol. 150, no. 4, pp. 271-6-, 1 Aug. 2003. [197] V. C. Chen, F. Li, S. S. Ho and H. Wechsler, "Micro-Doppler effect in radar: phenomenon, model, and simulation study," in IEEE Trans. on Aerospace and El. Sys., vol. 42, no. 1, pp. 2-21, Jan. 2006. [198] X. Bai, F. Zhou, M. Xing and Z. Bao, "High Resolution ISAR Imaging of Targets with Rotating Parts textquotedblright in IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 47, no. 4, pp. 2530-2543, Oct 2011. [199] J. Li and H. Ling, "Application of adaptive chirplet representation for ISAR feature extraction from targets with rotating parts," in IEE Proc. 6

- RSN,

vol. 150, no. 4, pp. 284–91, 1 Aug. 2003. [200] Y. Wang, Y.-C. Jiang, "ISAR imaging of ship target with complex motion based on new approach of parameters estimation for polynomial phase signal," EURASIP Journal on Advances in Signal Processing 2011(2011) ArticleID 425203, 9 pp. 6

[201]

B. Boashash, Time-Frequency Signal Analysis and Processing –A Comprehensive Reference, Elsevier Science, Oxford, 2003. 23

[202]

L. Stanković, S. Stanković, T. Thayaparan, M. Daković, and I. Orović, “Separation and Reconstruction of the Rigid Body and Micro-Doppler Signal in ISAR Part I – Theory” IET Radar, Sonar & Navigation, vol.9, no.9, pp.1147-1154, 2015 13

[203]

I. Volarić, V. Sučić, Z. Car, “A compressive sensing based method for cross-terms suppression in the time-frequency plane,” IEEE 15th International Conference on Bioinformatics and Bioengineering, pp. 1–4, 2015. [204] L. Stanković, T. Thayaparan, and M. 20

Daković, “Signal Decomposition by Using the S-Method with Application to the Analysis of HF Radar Signals in Sea-Clutter ,”IEEE Transactions on Signal Processing, Vol.54, No.11, Nov. 2006, pp.4332- 4342 30

[205] Yinsheng Wei, Shanshan Tan, “Signal decomposition by the S-method with general window functions

,”Signal Processing, Volume 92, Issue 1, January 2012, Pages 288-293. 87

[206]

Yang, Yang, Xingjian Dong, Zhike Peng, Wenming Zhang, and Guang Meng. “Component extraction for non-stationary multi-component signal using parameterized de-chirping and band-pass filter,” IEEE SP Letters, vol. 22, 77

no. 9 (2015): 1373-1377. [207]

Y. Wang and Y. Jiang, “ISAR Imaging of Maneuvering Target Based on the L-Class of Fourth-Order Complex-Lag PWVD,"in IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, vol. 48, no. 3, pp. 1518-1527, March 2010. [208] I. Orović, S. Stanković, and A. Draganić,'Time-Frequency Analysis and Singular Value Decomposition Applied to the Highly Multicomponent Musical Signals,”?Acta Acustica United With Acustica, Vol. 100 5

(2014) 1, [209] V. Katkovnik, L. Stanković, “Instantaneous frequency estimation using the Wigner distribution with varying and data driven window length

,"IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 46, No. 9, Sep.1998, pp. 2315-2325. [210] V.N. Ivanović, M. Daković, L. Stanković, “Performance of Quadratic Time-Frequency Distributions as Instantaneous Frequency Estimators ,"IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 51, No. 1, Jan. 2003, pp.77-89 28

[211]

A. Ahrabian, D. Looney, L. Stanković, and D. Mandic, “Synchrosqueezing-Based Time-Frequency Analysis of Multivariate Data ,"Signal Processing, Volume 106, January 2015, Pages 331–341. 5

[212]

J. M. Lilly and S. C. Olhede, “Analysis of Modulated Multivariate Oscillations,", IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 60, no. 2, pp. 600-612, Feb. 2012. [213] A. Omidvarnia, B. Boashash, G. Azemi, P. Colditz and S. Vanhatalo, “Generalised phase synchrony within multivariate signals: An emerging concept in time-frequency analysis,"IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), pp. 3417-3420, Kyoto, 2012 [214] J. M. Lilly and S. C. Olhede, “Bivariate Instantaneous Frequency and Bandwidth ,"IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 58, no. 2, pp. 591-603, Feb. 2010. 5

[215]

B. Boashash, "Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal. I. Fundamentals ,"Proceedings of the IEEE, vol. 80, no. 4, pp. 520 -538, Apr 1992. doi: 10.1109/5.135376 23

[216]

J. C. Wood and D. T. Barry, "Radon transformation of time-frequency distributions for analysis of multicomponent signals ,"IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 42, no. 11, pp. 3166-3177, Nov 1994. [217] G. Lopez-Risueno, J. Grajal and O. Yeste-Ojeda, "Atomic decomposition-based radar complex signal interception ,"IEE Proceedings - Radar, Sonar and Navigation, vol. 150, no. 4, pp. 323-31-, 5

1 Aug. 2003. [218] L.

Stanković, M. Daković, T. Thayaparan, and V. Popović-Bugarin, "Inverse Radon Transform Based Micro-Doppler Analysis from a Reduced Set of Observations," IEEE Transactions on 24

AES,

Vol. 51, No. 2, pp.1155-1169, April 2015 [219] M. Daković, and L. Stanković, "Estimation of sinusoidally modulated signal parameters based on the inverse Radon transform ,"ISPA 2013, Trieste, Italy, 4-6 September 2013, 5

pp. 302-307 [220]

D. P. Mandic, N. u. Rehman, Z. Wu, N. E. Huang, "Empirical Mode Decomposition-Based Time-Frequency Analysis of Multivariate Signals: The Power of Adaptive Data Analysis ,"IEEE Signal Processing Magazine, vol.30, pp.74-86, Nov. 2013. [221] S. M. U. Abdullah, N. u. Rehman, M. M. Khan, D. P. Mandic, " A Multivariate Empirical Mode Decomposition Based Approach to Pansharpening ,"IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, vol. 53, no.7, pp. 3974-3984, July 2015. [222] A. Hemakom, A. Ahrabian, D. Looney, N. u. Rehman, D. P. Mandic, "Nonuniformly 5

sampled trivariate empirical mode decomposition,"IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 2015), South Brisbane, QLD, 2015, pp. 3691-3695. [223]

G. Wang, C. Teng, K. Li, Z. Zhang and X. Yan, "The Removal of EOG Artifacts From 10

EEG Signals Using Independent Component Analysis and Multivariate Empirical Mode Decomposition,"IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics, vol. 20, no. 5, pp. 1301-1308, Sept. 2016. [224] S. Tavildar and

A. Ashrafi, "Application of multivariate empirical mode decomposition and canonical correlation analysis for EEG motion artifact removal," 2016 Conference on Advances in Signal Processing (CASP), Pune, 2016, pp. 150-154. 5

[225]

Y. Zhang, M. G. Amin, B. A. Obeidat, "Polarimetric Array Processing for Nonstationary Signals," in Adaptive Antenna Arrays: Trends and Applications edited by S. Chandran, Springer, 56

2004, pp. 205-218. [226] L. Stanković, "A measure of some time–frequency distributions concentration," Signal Processing, vol. 81, 2001, pp.

621–631. [227] J. C. Spall, Introduction to Stochastic Search and Optimization, Wiley. ISBN 0-471-33052-3. [228] J. Larson, S.M. Wild, 10

"A batch, derivative-free algorithm for finding multiple local minima", Optimization Engineering, March 2016, Volume 17, Issue 1, pp 205?228, doi

:10.1007/s11081-015-9289-7 [229] A.Neumaier, Čomplete Search in Continuous Global Optimization and Constraint Satisfaction", Acta Numerica, 13(1), 2004 [230] W. Hu, K. Wu, P.P. Shum, N. I. Zheludev, C. Soci, "All-Optical Implementation of the Ant Colony Optimization Algorithm", Scientific Reports, vol. 6, 2016, 10

doi: 10.1038/srep26283. [231] S.

Kirkpatrick, C. D. Gelatt, M. P. Vecchi, "Optimization by Simulated Annealing", Science, 13 May 1983, Vol. 220, Issue 4598, pp. 671-680, doi: 10.1126/science.220.4598.671 36

[232] R. Chelouaha, P. Siarry, "Genetic and Nelder-Mead algorithms hybridized for a more accurate global optimization of continuous multiminima functions", European Journal of Operational Research, Vol. 148, Issue 2, 16 July 2003, Pages 335?348. [233] A. Cichocki, S. Amari, Adaptive Blind Signal and Image Processing: Learning Algorithms and

Applications, vol. 1, John Wiley and Sons, 2002, pp. 191-193. [234] M. Brajović, and V. Popović-Bugarin,"Instantaneous Frequency Estimation Using Ant Colony Optimization and Wigner Distribution," 4th Mediterranean Conference on Embedded Computing, MECO 2015, Budva, Montenegro, June 2015. [235] M. Brajović, V. Popović-Bugarin, I. Djurović, and S. Djukanović, "Post-processing of Time-Frequency Representations in Instantaneous Frequency Estimation Based on Ant Colony Optimization,"Signal Processing, Vol. 138, September 2017, pp. 195–210, http://dx.doi.org/10.1016/j.sigpro.2017.03.022. Glava 1. Rekonstrukcija rijetkih signala sa osvrtom Furijeov transformacioni domen Glava 1. Rekonstrukcija rijetkih signala sa osvrtom Furijeov transformacioni domen Glava 1. Rekonstrukcija rijetkih signala sa osvrtom Furijeov transformacioni domen Glava 1. Rekonstrukcija rijetkih signala sa osvrtom Furijeov transformacioni domen Glava 1. Rekonstrukcija rijetkih signala sa osvrtom Furijeov transformacioni domen Glava 1. Rekonstrukcija rijetkih signala sa osvrtom Furijeov transformacioni domen Glava 1. Rekonstrukcija rijetkih signala sa osvrtom Furijeov transformacioni domen Glava 1. Rekonstrukcija rijetkih signala sa osvrtom Furijeov transformacioni domen Glava 1. Rekonstrukcija rijetkih signala sa osvrtom Furijeov transformacioni domen Glava 1. Rekonstrukcija rijetkih signala sa osvrtom Furijeov transformacioni domen Glava 1. Rekonstrukcija rijetkih signala sa osvrtom Furijeov transformacioni domen Glava 1. Rekonstrukcija rijetkih signala sa osvrtom Furijeov transformacioni domen Glava 1. Rekonstrukcija rijetkih signala sa osvrtom Furijeov transformacioni domen Glava 1. Rekonstrukcija rijetkih signala sa osvrtom Furijeov transformacioni domen Glava 1. Rekonstrukcija rijetkih signala sa osvrtom Furijeov transformacioni domen Glava 1. Rekonstrukcija rijetkih signala sa osvrtom Furijeov transformacioni domen Glava 1. Rekonstrukcija rijetkih signala sa osvrtom Furijeov transformacioni domen Glava 1. Rekonstrukcija rijetkih signala sa osvrtom Furijeov transformacioni domen Glava 1. Rekonstrukcija rijetkih signala sa osvrtom Furijeov transformacioni domen Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 2. Diskretna Hermitska transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 3. Diskretna kosinusna transformacija kao domen rijetkosti signala Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Glava 4. Vremensko-frekvencijska analiza i rekonstrukcije na bazi mjera koncentracije Bibliografija 4 5 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 1 2 3 4 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111 112 113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128 129 130 131 132 133 134 135 136 137 138 139 140 141 142 143 144 145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159 160 161 162 163 164 165 166 167 168 169 172 173 174 175 176 177 178 179 180 181 182 183 184 185 186 187 188 191 192 193 194 195 196 197 198 199 200 201 202 203 204 205 206 207 208 209 210 211 212 213 214 215 216 217

sources:

1 — 1,428 words / 2% - Crossref
Ljubisa Stankovic, Milos Brajovic. "Analysis of the Reconstruction of Sparse Signals in the DCT Domain Applied to Audio Signals", IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing, 2018

2 — 448 words / 1% - Crossref
Milos Brajovic, Irena Orovic, Milos Dakovic, Srdjan Stankovic. "Compressive Sensing of Sparse Signals in the Hermite Transform Basis", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2018

3 — 378 words / < 1% match - Crossref
Miloš Brajović, Irena Orović, Miloš Daković, Srdjan Stanković. "On the parameterization of Hermite transform with application to the compression of QRS complexes", Signal Processing, 2017

4 — 256 words / < 1% match - Crossref
Jose R. de Oliveira Neto, Juliano B. Lima. "Discrete Fractional Fourier Transforms Based on Closed-Form Hermite–Gaussian-Like DFT Eigenvectors", IEEE Transactions on Signal Processing, 2017

5 — 243 words / < 1% match - Crossref

Ljubisa Stankovic, Milos Brajovic, Milos Dakovic, Danilo Mandic. "Two-component bivariate signal decomposition based on time-frequency analysis", 2017 22nd International Conference on Digital Signal Processing (DSP), 2017

6 239 words / < 1% match - Crossref
Milos Brajovic, Ljubisa Stankovic, Milos Dakovic. "Micro-Doppler removal in radar imaging in the case of non-compensated rigid body acceleration", 2018 23rd International Scientific-Professional Conference on Information Technology (IT), 2018

7 219 words / < 1% match - Crossref
Miloš Brajović, Srdjan Stanković, Irena Orović. "Analysis of noisy coefficients in the discrete Hermite transform domain with application in signal denoising and sparse signal reconstruction", Signal Processing, 2018

8 152 words / < 1% match - Crossref
Miloš Brajović, Vesna Popović-Bugarin, Igor Djurović, Slobodan Djukanović. "Post-processing of time-frequency representations in instantaneous frequency estimation based on ant colony optimization", Signal Processing, 2017

9 115 words / < 1% match - Crossref
Milos Brajovic, Irena Orovic, Milos Dakovic, Srdjan Stankovic. "Compressive Sensing of Sparse Signals in the Hermite Transform Basis", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2017

10 109 words / < 1% match - Crossref
Ljubiša Stanković, Danilo Mandić, Miloš Daković, Miloš Brajović. "Time-frequency decomposition of multivariate multicomponent signals", Signal Processing, 2018

11 63 words / < 1% match - Internet from 06-Aug-2010 12:00AM
ntur.lib.ntu.edu.tw

12 62 words / < 1% match - Internet from 08-Mar-2017 12:00AM
in.mathworks.com

13 61 words / < 1% match - Internet from 25-Dec-2018 12:00AM
downloads.hindawi.com

14 55 words / < 1% match - Internet from 12-Jan-2017 12:00AM
ee.ntu.edu.tw

15 53 words / < 1% match - Internet from 11-Nov-2014 12:00AM
www.researchgate.net

16 46 words / < 1% match - Internet from 17-Sep-2017 12:00AM
repository.ntu.edu.sg

17 43 words / < 1% match - Internet from 10-Jun-2017 12:00AM
senat.ucg.ac.me

18

42 words / < 1% match - Crossref
Anselmi, Nicola, Marco Salucci, Giacomo Oliveri, and Andrea Massa. "Wavelet-Based Compressive Imaging of Sparse Targets", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2015.

19

41 words / < 1% match - Internet from 10-Oct-2018 12:00AM
scitepress.org

20

37 words / < 1% match - Crossref
Isidora Stankovic, Milos Brajovic, Milos Dakovic, Cornel Ioana. "Effect of Random Sampling on Noisy Nonsparse Signals in Time-Frequency Analysis", 2018 26th European Signal Processing Conference (EUSIPCO), 2018

21

33 words / < 1% match - Internet from 30-Sep-2013 12:00AM
www.artechhouse.com

22

33 words / < 1% match - Internet from 27-Jan-2013 12:00AM
www.experts.scival.com

23

33 words / < 1% match - Internet from 11-Dec-2012 12:00AM
en.wikipedia.org

24

32 words / < 1% match - Internet from 03-Oct-2015 12:00AM
www.tfsa.me

25

32 words / < 1% match - Internet from 25-Jul-2018 12:00AM
epdf.tips

26

31 words / < 1% match - Internet from 18-Sep-2015 12:00AM
www.tfsa.me

27

29 words / < 1% match - Internet from 13-Jul-2013 12:00AM
www.niceindia.com

28

28 words / < 1% match - Internet from 23-Dec-2008 12:00AM
tfsa.cg.yu

29

28 words / < 1% match - Internet from 04-Apr-2017 12:00AM
researchportal.hw.ac.uk

30

27 words / < 1% match - Internet from 02-Nov-2016 12:00AM
www.tfsa.me

31

27 words / < 1% match - Crossref
Milos Brajovic, Irena Orovic, Milos Dakovic, Srdan Stankovic. "Representation of uniformly sampled signals in the Hermite transform domain", 2016 International Symposium ELMAR, 2016

32 27 words / < 1% match - Crossref
Pei, Soo-Chang, and Yun-Chiu Lai. "Signal Scaling by Centered Discrete Dilated Hermite Functions", IEEE Transactions on Signal Processing, 2012.

---

33 26 words / < 1% match - Internet from 30-Sep-2011 12:00AM
www.hal.inserm.fr

---

34 26 words / < 1% match - Internet from 09-May-2016 12:00AM
www.heric.me

---

35 25 words / < 1% match - Internet from 27-Oct-2017 12:00AM
casopisi.junis.ni.ac.rs

---

36 25 words / < 1% match - Internet from 07-Sep-2017 12:00AM
hal.archives-ouvertes.fr

---

37 25 words / < 1% match - Internet from 16-May-2009 12:00AM
www.ucg.cg.ac.yu

---

38 24 words / < 1% match - Internet from 08-Sep-2017 12:00AM
www.cs.technion.ac.il

---

39 24 words / < 1% match - Internet from 07-Jul-2010 12:00AM
www.ee.bilkent.edu.tr

---

40 24 words / < 1% match - Internet from 29-Jun-2012 12:00AM
ipl.johnvillasenor.com

---

41 24 words / < 1% match - Crossref
Brajović, Miloš, Irena Orović, Miloš Daković, and Srdjan Stanković. "On the parameterization of Hermite transform with application to the compression of QRS complexes", Signal Processing, 2017.

---

42 23 words / < 1% match - Internet from 20-Jun-2017 12:00AM
www.ucg.ac.me

---

43 22 words / < 1% match - Crossref
Ljubisa Stankovic, Milos Brajovic. "Analysis of the Reconstruction of Sparse Signals in the DCT Domain Applied to Audio Signals", IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing, 2018

---

44 20 words / < 1% match - Internet from 15-Nov-2018 12:00AM
export.arxiv.org

---

45 20 words / < 1% match - Internet from 16-Dec-2017 12:00AM
yiminzhang.com

46 20 words / < 1% match - Crossref
Vujovic, Stefan, Milos Dakovic, Irena Orovic, and Srdjan Stankovic. "An architecture for hardware realization of compressive sensing Gradient algorithm", 2015 4th Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO), 2015.

47 19 words / < 1% match - Internet from 17-Jun-2016 12:00AM
theses.eurasip.org

48 19 words / < 1% match - Internet from 28-Feb-2014 12:00AM
arxiv.org

49 19 words / < 1% match - Internet from 27-Jul-2018 12:00AM
tuprints.ulb.tu-darmstadt.de

50 19 words / < 1% match - Internet from 30-Jun-2018 12:00AM
aip.scitation.org

51 18 words / < 1% match - Internet from 24-Aug-2016 12:00AM
academic.odysci.com

52 18 words / < 1% match - Internet from 13-Sep-2018 12:00AM
hal.archives-ouvertes.fr

53 17 words / < 1% match - Internet from 17-Oct-2014 12:00AM
korchagin.info

54 17 words / < 1% match - Crossref
Andjela Draganić, Irena Orović, Srdjan Stanković, Xiumei Li, Zhi Wang. "An approach to classification and under-sampling of the interfering wireless signals", Microprocessors and Microsystems, 2017

55 16 words / < 1% match - Internet from 15-Oct-2018 12:00AM
hal-lirmm.ccsd.cnrs.fr

56 16 words / < 1% match - Internet from 23-Mar-2009 12:00AM
www.ece.villanova.edu

57 16 words / < 1% match - Crossref
Milos Brajovic, Irena Orovic, Milos Dakovic, Srdan Stankovic. "Compressive sensing of signals sparse in 2D Hermite transform domain", 2016 International Symposium ELMAR, 2016

58 16 words / < 1% match - Crossref
Nedjeljko Lekić, Maja Lakičević Žarić, Irena Orović, Srdjan Stanković. "Adaptive gradient-based analog hardware architecture for 2D under-sampled signals reconstruction", Microprocessors and Microsystems, 2018

59
16 words / < 1% match - Crossref
Milos Brajovic, Milos Dakovic, Ljubisa Stankovic. "Convexity of the ℓ1-norm based sparsity measure with respect to the missing samples as variables", 2016 5th Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO), 2016

60
15 words / < 1% match - Internet from 08-Mar-2016 12:00AM
digre.pmf.unizg.hr

61
15 words / < 1% match - Crossref
Zoja Vulaj, Andjela Draganic, Milos Brajovic, Irena Orovic. "A tool for ECG signal analysis using standard and optimized Hermite transform", 2017 6th Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO), 2017

62
15 words / < 1% match - Crossref
Ljubiša Stanković, Miloš Daković. "Compressive Sensing Inspired Multivariate Median", Circuits, Systems, and Signal Processing, 2018

63
14 words / < 1% match - Internet from 03-Nov-2017 12:00AM
hal.archives-ouvertes.fr

64
14 words / < 1% match - Internet from 01-Jul-2013 12:00AM
www-stat.stanford.edu

65
14 words / < 1% match - Internet from 15-Mar-2006 12:00AM
math.lanl.gov

66
13 words / < 1% match - Internet from 18-Sep-2015 12:00AM
www.tfsa.ac.me

67
13 words / < 1% match - Internet from 11-Sep-2012 12:00AM
www.fesb.hr

68
13 words / < 1% match - Crossref
Andjela Draganić, Irena Orović, Srdjan Stanković, Xiumei Li, Zhi Wang. "An approach to classification and under-sampling of the interfering wireless signals", Microprocessors and Microsystems, 2017

69
13 words / < 1% match - Crossref
Milos Brajovic, Ljubisa Stankovic, Milos Dakovic, Danilo Mandic. "Additive noise influence on the bivariate two-component signal decomposition", 2018 7th Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO), 2018

70
13 words / < 1% match - Crossref
Manikandan, M. Sabarimalai, and S. Dandapat. "Wavelet-based electrocardiogram signal compression methods and their performances: A prospective review", Biomedical Signal Processing and Control, 2014.

71
12 words / < 1% match - Internet from 07-Feb-2017 12:00AM
yoksis.bilkent.edu.tr

72
12 words / < 1% match - Internet from 11-Mar-2012 12:00AM
reznik.org

73
12 words / < 1% match - Internet from 23-Oct-2018 12:00AM
ucg.ac.me

74
12 words / < 1% match - Internet from 18-Apr-2009 12:00AM
www.optimization-online.org

75
12 words / < 1% match - Internet from 08-Feb-2014 12:00AM
www.scribd.com

76
12 words / < 1% match - Internet from 30-Mar-2017 12:00AM
www.mathc.rwth-aachen.de

77
12 words / < 1% match - Internet from 06-Jun-2016 12:00AM
dblp.dagstuhl.de

78
12 words / < 1% match - Internet from 24-Sep-2008 12:00AM
www-optics.unine.ch

79
12 words / < 1% match - Internet from 30-Sep-2017 12:00AM
www.ideals.illinois.edu

80
12 words / < 1% match - Internet from 17-Apr-2018 12:00AM
pastel.archives-ouvertes.fr

81
12 words / < 1% match - Internet from 28-Sep-2006 12:00AM
www.terry.uga.edu

82
12 words / < 1% match - Crossref
L. Stankovic, M. Dakovic, T. Thayaparan, V. Popovic-Bugarin. "Signal Decomposition of Micro-Doppler Signatures", Institution of Engineering and Technology (IET), 2014

83
12 words / < 1% match - Crossref
Srdjan Stankovic, Stefan Vujovic, Irena Orovic, Milos DakoviC, Ljubisa StankoviC. "Combination of gradient based and single iteration reconstruction algorithms for sparse signals", IEEE EUROCON 2017 -17th International Conference on Smart Technologies, 2017

84
11 words / < 1% match - Internet from 29-Apr-2016 12:00AM
isdl.ee.washington.edu

85
11 words / < 1% match - Internet from 17-Dec-2018 12:00AM
nardus.mpn.gov.rs

86 11 words / < 1% match - Internet from 07-Feb-2014 12:00AM
www.paza.ca

87 11 words / < 1% match - Internet from 06-Oct-2011 12:00AM
rss.sciencedirect.com

88 11 words / < 1% match - Internet from 10-Oct-2015 12:00AM
www.nrel.gov

89 11 words / < 1% match - Internet from 13-Sep-2014 12:00AM
asp.eurasipjournals.com

90 11 words / < 1% match - Internet
ldos.fe.uni-lj.si

91 11 words / < 1% match - Internet from 13-Oct-2014 12:00AM
math-cs.aut.ac.ir

92 11 words / < 1% match - Internet from 30-Sep-2015 12:00AM
www.hs-nb.de

93 11 words / < 1% match - Internet from 24-Jul-2018 12:00AM
the-eye.eu

94 11 words / < 1% match - Internet from 19-Nov-2018 12:00AM
epdf.tips

95 11 words / < 1% match - Internet from 26-Jan-2014 12:00AM
ttctech.com

96 11 words / < 1% match - Internet from 01-Sep-2018 12:00AM
iroha.scitech.lib.keio.ac.jp

97 11 words / < 1% match - Crossref
Medenica, Milica, and Sanja Zukovic. "Statistical parameters analysis of non-iterative algorithm for reconstruction of Compressive Sampled signals", 2014 22nd Telecommunications Forum Telfor (TELFOR), 2014.

98 10 words / < 1% match - Internet from 30-Jan-2017 12:00AM
eprints.ugd.edu.mk

99 10 words / < 1% match - Internet from 23-Nov-2017 12:00AM
profdoc.um.ac.ir

100 10 words / < 1% match - Internet from 29-May-2009 12:00AM

epubl.luth.se

101 10 words / < 1% match - Internet from 08-Nov-2017 12:00AM
mediatum.ub.tum.de

102 10 words / < 1% match - Internet from 09-Mar-2016 12:00AM
kluedo.ub.uni-kl.de

103 10 words / < 1% match - Internet from 07-Jul-2014 12:00AM
www.tfsa.ac.me

104 10 words / < 1% match - Internet from 28-Apr-2015 12:00AM
arxiv.org

105 10 words / < 1% match - Internet from 28-Nov-2016 12:00AM
pdfs.semanticscholar.org

106 10 words / < 1% match - Internet from 05-Oct-2018 12:00AM
hal.archives-ouvertes.fr

107 10 words / < 1% match - Internet from 22-Feb-2006 12:00AM
research.att.com

108 10 words / < 1% match - Internet from 27-May-2014 12:00AM
fr.slideshare.net

109 10 words / < 1% match - Internet from 20-Jun-2003 12:00AM
valle.fciencias.unam.mx

110 10 words / < 1% match - Internet from 18-May-2011 12:00AM
www.math.utpa.edu

111 10 words / < 1% match - Internet from 18-May-2012 12:00AM
alsholm.dk

112 10 words / < 1% match - Internet from 25-Jul-2012 12:00AM
www.leif.org

113 10 words / < 1% match - Internet from 03-Oct-2014 12:00AM
soundartarchive.net

114 10 words / < 1% match - Internet from 30-Nov-2017 12:00AM
arxiv.org

115 10 words / < 1% match - Internet from 16-Apr-2018 12:00AM
fedorabg.bg.ac.rs

116 10 words / < 1% match - Internet from 16-Jul-2018 12:00AM
epdf.tips

117 10 words / < 1% match - Internet from 15-Mar-2008 12:00AM
www.egr.uh.edu

118 10 words / < 1% match - Internet from 28-Feb-2015 12:00AM
www.dissers.ru

119 10 words / < 1% match - Internet from 04-Oct-2016 12:00AM
www.scribd.com

120 10 words / < 1% match - Crossref
Miloš Brajović, Irena Orović, Miloš Daković, Srdjan Stanković. "On the parameterization of Hermite transform with application to the compression of QRS complexes", Signal Processing, 2017

121 10 words / < 1% match - Crossref
Srdjan Stanković. "Time-Frequency Analysis and Its Application in Digital Watermarking", EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2010