

# Вијећу Природно-математичког факултета

Оцјена магистарског рада *Примјена бутстрап метода за рачунање  $p$  вриједности теста Колмогоров Смирнова* кандидата Јова Златичанина

На LXI сједници Вијећа Природно-математичког факултета одржаној 20.4.2021. године именовани смо у Комисију за оцјену магистарског рада под називом *Примјена бутстрап метода за рачунање  $p$  вриједности теста Колмогоров Смирнова* кандидата Јова Златичанина. Вијећу подносимо следећи

## ИЗВЈЕШТАЈ

### 1. Тема рада

Тема магистарског рада припада области Математичке статистике. Бутстрап је једна од метода реузорковања података из оригиналног скупа података. Методологија бутстрап технике увео је Бредли Ефрон 1979. године. Израз "to pull yourself up by your own bootstraps" послужио му је као инспирација да одреди име за нову статистичку технику. Бутстрап је једноставан, али веома моћан статистички метод. Међутим, и поред ове чињенице овај метод није довољно коришћен јер у то вријеме рачунари нису били довољно развијени тако да није било могуће брзо извођење захтијевних и великих рачуна.

### 2. Предмет рада

Поступци којима се примјеном статистичких метода утврђује да ли се, на основу узорка може, и са којом вјероватноћом прихватити претпоставка о конкретној бројчаној вриједности неког параметра су тестирања статистичких хипотеза. Ови тестови могу бити параметарски и непараметарски. Свака претпоставка (хипотеза) о непознатом параметру расподјеле назива се параметарска хипотеза, а поступак њеног потврђивања или одбијања на основу узорка је параметарски тест. Статистика које се користи у том поступку је тест статистика. Хипотезе о расподјели обиљежја које се не односе на параметре, већ на саму

расподјелу обележја су непараметарски тестови или тестови сагласности (обилежја са расподјелом).

Тест Колмогоров-Смирнова се користи за испитивње сагласности узорка са претпостављеном расподјелом и за испитивње једнакости расподјела два обилежја. У једном случају, располаже се једним узорком, док се у другом случају на располагању два независна узорка за свако обилежје посебно. Оба проблема тестирања статистичких хипотеза се посматрају у случају када су расподјеле обилежја апсолутно-непрекидне. Претпоставља се да у случају једног просто случајног узорка  $(X_1, \dots, X_n)$  обима  $n$  из популације чије обилежје  $X$  има функцију расподеле  $F$  апсолутно-непрекидног типа. Код теста Колмогоров-Смирнова се посматрају одступања између емпиријске функције расподјеле  $F_n$  и функције расподјеле  $F$ . Тако, тестирамо нулту хипотезу  $H_0(F = F_0)$ , гдје је  $F_0$  претпостављена функција расподјеле, против алтернативне хипотезе  $H_1(F \neq F_0)$ .

Нека је  $\alpha$  праг значајности и нека је  $F_n$  емпиријска функција расподјеле која одговара узорку  $(X_1, \dots, X_n)$ . За тестирање ових хипотеза користимо тест статистику  $D_n(F)$  облика

$$D_n(F) = \sup_x |F_n(x) - F(x)|.$$

Тест статистика  $D_n(F)$  се зове статистика Колмогоров-Смирнова и има веома интересантне особине. Тако, на основу теореме Гливенко-Кантели познато је да  $D_n(F)$  скоро извјесно тежи ка 0 када  $n \rightarrow \infty$ . Такође,  $D_n(F)$  не зависи од функције расподјеле  $F$ . Дакле, важи

**Теорема:** Ако је  $(X_1, \dots, X_n)$  прост случајан узорак обима  $n$  из популације чије обилежје  $X$  има функцију расподјеле  $F$  апсолутно-непрекидног типа, тада расподјела статистике Колмогоров-Смирнова  $D_n(F)$  не зависи од функције расподеле  $F$ .

Основни проблем који се у раду третирао јесте случај када се параметри расподјеле оцјењују на основу датог узорка. У том случају хипотеза  $H_0$  не важи, па је одговарајућа  $p$  вриједност израчуната примјеном бутстрап метода.

Примјена бутстрап метода је илустрована на конкретном примејру, гдје је  $p$  вриједност израчуната примјеном 10 000 репликација. Сва израчунавања су праћена одговарајућим кодом.

### 3. Организација и садржај рада

Рад је написан на 132 стране. Састоји се од увода, двије главе, закључка, литературе са 78 наслова. На крају је дат и додатак у коме је кандидат приказао имплементацију Колмогоров-Смирнов теста у коду Р. Такође, у додатуку се налазе и основна тврђења неопходна за потпуно разумијевање теоријског дијела рада.

У првом поглављу је сумирани постојећа литература која се бави бутстрап методом. Такође, детаљно су дати најважнији теоријски резултати који се односе на тест Колмогоров-Смирнова. Кандидат је размотрио и питање моћи теста, емпиријске функције расподеле и  $p$  вриједности.

У другој глави кандидат је мотивисао примјену бутстрап метода приликом рачунања  $p$  вриједности. Кандидат овдје даје неколико веома корисних примјера неопходних за правилно разумијевање разматраних проблема. У овој глави је илустрован предложен метод корићењем реалних података а који се односе на ниво TSH хормона.

У додацима кандидат је дао  $P$  код који је користио, као и најважније дефиниције и теореме које су неопходне за рад.

## Закључак

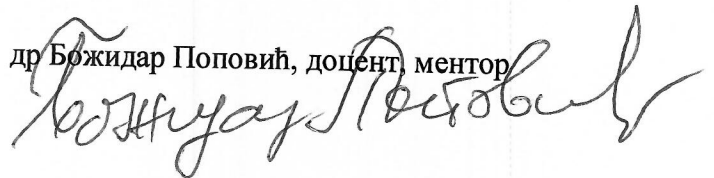
Рад је написан писмено, математички коректно, јасно и прегледно. Постигнут је планирани циљ истраживања. Предвиђање стопе некавалитетних кредита је први пут урађено у Црној Гори.

Предлажемо Вијећу да одобри јавну одбрану магистарског рада под називом *Примјена бутстрап метода за рачунање  $p$  вриједности теста Колмогоров Смирнова* кандидата Јова Златичанина.

У Подгорици,

05.07.2021. год.

др Божидар Поповић, доцент, ментор



др Синиша Стаматовић, редовни професор, члан

др Горан Попивода, доцент, члан

