

Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta

Ocjena magistarskog rada pod nazivom

*Optimalni stohastički procesi potrošnje s neopadajućim ograničenjem
u modelima s diskretnim vremenom*

kandidatkinje Jovane Dubak

Na LXVII sjednici vijeća održanoj 24.9.2021. godine imenovani smo u komisiju za ocjenu magistarskog rada pod nazivom *Optimalni stohastički procesi potrošnje s neopadajućim ograničenjem u modelima s diskretnim vremenom* kandidatkinje Jovane Dubak. Vijeću podnosimo sljedeći

IZVJEŠTAJ

1. Tema rada

Tema pripada oblastima Matematike finansija i Optimalne stohastičke kontrole. Jedan od klasičnih problema kojima se bavi finansijska matematika se tiče izbora optimalnog nivoa potrošnje u modelu finansijskog tržišta. Problemi ovog tipa se mogu formulisati kao problemi stohastičke kontrole (Merton 1969), pri čemu su u literaturi jako utemeljeni modeli u kojima je finansijsko tržište predstavljeno u diskretnom vremenu, a elementi modela su predstavljeni kao stohastički procesi s konačnim ili prebrojivim brojem stanja; optimalnost se u tim slučajevima može na prirodan način formulisati kao kriterijum maksimizacije ili minimizacije s eventualnim ograničenjima koja imaju jasnu interpretaciju u kontekstu finansijskog tržišta. U ovom radu se razmatra više problema stohastičke kontrole u modelima finansijskog tržišta s diskretnim vremenom i konačnim brojem stanja, od kojih najsloženiji uključuju ograničenja neopadajućeg tipa.

2. Predmet rada

Model finansijskog tržišta koji se razmatra u radu je uveden na standardan način koji je u skladu s relevantnom literaturom: bankovni i cjenovni procesi su predstavljeni kao stohastički procesi u diskretnom vremenu, pri čemu je data vjerovatnosna mjera na skupu sa konačnim brojem stanja, kao i odgovarajuća filtracija. Na prirodan način se uvode neophodni osnovni pojmovi neophodni za formulaciju problema, uključujući strategije trgovanja, samofinansirajuća ograničenja, vrijednosni proces, arbitražu i ekvivalentne martingalne mjere. Proces potrošnje je uveden kao predvidiv stohastički proces i razmatra se u paru sa samofinansirajućom strategijom trgovanja, a uvodi se i funkcija korisnosti koja dozvoljava preciznu formulaciju problema ulaganja i potrošnje. Rad na koncizan način uvodi i osnovne elemente teorije stohastičkih procesa koji rad čine potpunijim. Izlaganje počinje razmatranjem modela s konačnim vremenskim horizontom, a zatim se analiza proširuje na beskonačni (prebrojivi) slučaj.

Prvi problem optimizacije koji se razmatra je problem optimalnog ulaganja u finansijskom tržištu sa konačnim vremenskim horizontom: naći optimalni par stohastičkih procesa (H, C) gdje je $H-C$ samofinansirajući par potrošnje-ulaganja koji je dopustiv. Kriterijum optimizacije je maksimiziranje ukupne očekivane diskontovane koristi u odnosu na ranije uvedenu konkavnu funkciju korisnosti. Ovaj standardni problem optimalnog ulaganja se može riješiti na više načina, a u radu je predstavljeno rješenje koje problem zamjenjuje ekvivalentnim problemom izbora procesa C , pri čemu se ograničenje dopustivosti zamjenjuje jednakosti koja očekivanu ukupnu potrošnju (u odnosu na rizik neutralnu mjeru) izjednačava sa početnim bogatstvom. Rješenje tog problema se na elegantan način oslanja na Lagranžove množitelje; ovo je tehnika koja će biti korištena i u složenijim problemima. Ključni objekat koji se pojavljuje u analizi je proces gustine N date vjerovatnosne mjere u odnosu na ekvivalentnu martingalnu mjeru.

U sljedećoj fazi rada, posmatra se uopštenje finansijskog tržišta koje uključuje beskonačni vremenski horizont i prebrojiv broj stanja svijeta. Uopštavaju se ranije uvedeni pojmovi i predstavlja se verzija prethodno razmatranog problema optimizacije u uopštenom kontekstu. Rješenje se, grubo govoreći, može naći na način koje je analogan slučaju sa konačnim brojem perioda. U radu je rješenje predstavljeno u potpunosti sa jasnom naznakom razlika u odnosu na prethodni slučaj.

Posljednje uopštenje koje se posmatra se tiče samog problema: u prethodno uvedenom modelu finansijskog tržišta posmatra se problem iz prethodnog poglavlja sa dodatnim ograničenjem – zahtijeva se da proces potrošnje bude neopadajući. Ovakvo ograničenje, koje ne zavisi samo od trenutne vrijednosti procesa, već od cijele istorije vrijednosti procesa koji su elementi modela, na značajan način usložnjava analizu. Prilagođavanje prethodne analize na ovaj slučaj je netrivialan problem koji je do sada u literaturi demonstriran samo u slučaju s neprekidnim vremenom. Korišćenje ideja iz neprekidnog vremena u modelu s diskretnim vremenom zahtijeva tehničku pripremu rezultata o sumiranjima koji su, iako koriste

elementarne tehnike, nestandardni i zathijevaju preciznost. Nakon toga, uz uvođenje dodatne pretpostavke o strukturi procesa gustine N , rad identifikuje kandidatsko rješenje za uopšteni problem: optimalni proces potrošnje se traži u klasi tekućih maksimuma rješenja problema bez neopadajućeg ograničenja. Ovaj neočekivani rezultat je zatim formalno predstavljen kao teorema verifikacionog tipa koja potvrđuje da je predloženi proces zaista optimalan. Dokaz teoreme je složen i svodi se na seriju transformacija i dokazivanja nejednakosti koje garantuju optimalnost i predstavljen je u potpunosti s detaljnim komentarima.

3. Organizacija i sadržaj rada

Rad je napisan na 85 strana, i sadrži uvod, tri poglavlja, zaključak i tri dodatka.

U prvoj glavi je predstavljen model finansijskog tržišta sa konačnim brojem perioda. Uvedeni su osnovni pojmovi i predstavljeni prvi rezultati koji se tiču problema optimalne potrošnje. U poglavlje je uključen dokaz optimalnosti identifikovanog procesa potrošnje, uključujući i lemu koja koristi Fenchel-Legendre transformaciju konkavne funkcije.

U drugom poglavlju je predstavljen model sa beskonačnim brojem perioda, kao i verzije tvrđenja o optimalnoj potrošnji u uopštenom modelu.

Treće poglavlje predstavlja srž rada i tiče se problema potrošnje u modelu sa beskonačnim brojem stanje sa neopadajućim ograničenjem. Poglavlje sadrži opis problema, heurističku identifikaciju kandidatskog rješenja problema neopadajuće potrošnja, kao i potpun dokaz da je identifikovano rješenje zaista optimalno. Poglavlje sadrži i tehničko potpoglavlje koje predstavlja rezultate o sumiranjima nizova i redova koji su korišteni u dokazu.

Dodaci na koristan način predstavljaju osnovne elemente teorije slučajnih procesa i stohastičke optimizacije, kao i dodatne objašnjenja vezana za Fenchel-Legendre transformaciju.

4. Zaključak

Rad je napisan jasnim jezikom, matematička izlaganja su precizna, a donošenje zaključaka je korektno. Postignut je planirani cilj istraživanja: prilagođavanjem rezultata iz modela sa neprekidnim vremenom po prvi put su predstavljeni rezultati u modelima sa diskretnim vremenom koji se tiču optimalne potrošnje s neopadajućim ograničenjem.

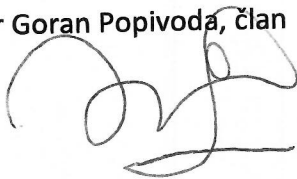
Predlažemo Vijeću da odobri javnu odbranu magistarskog rada pod nazivom *Optimalni stohastički procesi potrošnje s neopadajućim ograničenjem u modelima s diskretnim vremenom* kandidatkinje Jovane Dubak.

Komisija:

dr Darko Mitrović, mentor



dr Goran Popivoda, član



dr Lazar Obradović, član



Podgorica, 2.12.2021.