Crna Gora
UNIVERZITET CRNE GORE
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Broj 2975

Podgorica, 22 12 20 21 god.

VIJEĆU PRIRODNO-MATEMATIČKOG FAKULTETA

PREDMET: Predlog komisije za ocjenu podobnosti teme doktorskedisertacijekandidata MSc Antona Gjokaja

Predlažem komisijuza ocjenu podobnosti teme doktorske disertacije pod nazivom **"Granična svojstva kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru"** kandidata **Antona Gjokaja** u sljedećem sastavu:

1. Dr Đorđije Vujadinović, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore (naučna oblast: Matematička analiza)
2. Dr Marijan Marković, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore (naučna oblast: Matematička analiza)
3. Dr David Kalaj, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore (naučna oblast: Matematička analiza).

Podgorica, 22.12.2021. god.

Mentor
Prof. dr David Kalaj

David Kalaj

PRIJAVA TEME DOKTORSKE DISERTACIJE

OPŠTI PODACI O DOKTORANDU	
Titula, ime i prezime	MSc Anton Gjokaj
Fakultet	Prirodno-matematički fakultet
Studijski program	Matematika
Broj indeksa	2/19
Ime i prezime roditelja	Gjelosh Gjokaj
Datum i mjesto rođenja	13.6.1994. Podgorica, Crna Gora
Adresa prebivališta	Ul. 16, br. 33, Tuzi
Telefon	069292943
E-mail	antondj@ucg.ac.me; antongjpmf@gmail.com
BIOGRAFIJA I BIBLIOGRAFIJA	
Obrazovanje	o 1.10. 2017. – 19. 03. 2019. master studije Univerzitet Crne Gore, Priridno–matematički fakultet, prosječna ocjena: 10,00 o 1.10. 2016. – 9.7.2017. specijalističke studije Univerzitet Crne Gore, Prirodno-matematički fakultet, prosječna ocjena: 10,00 o 7. 9. 2013. – 9. 7. 2016. osnovne studije Univerzitet Crne Gore, Prirodno-matematički fakultet, prosječna ocjena: 10,00 o 1. 9. 2009. – 20. 5. 2013. Gimnazija *„25 maj"* Tuzi, prosječna ocjena: 5,00
Radno iskustvo	o 1.11.2017 i dalje: Univerzitet Crne Gore, Prirodno-matematički fakultet, saradnik u nastavi
Popis radova	1. A. Gjokaj, D. Kalaj: Quasiconformal Harmonic Mappings Between the Unit Ball and a Spatial Domain with $C^{1,\alpha}$ Boundary, Potential Analysis (2021). https://doi.org/10.1007/s11118-021-09919-y.
NASLOV PREDLOŽENE TEME	
Na službenom jeziku	Granična svojstva kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru
Na engleskom jeziku	Boundary behaviour of quasiconformal harmonic mappings in space

Obrazloženje teme

Kvazikonformna preslikavanja u ravni su nastala kao prirodno uopštenje pojma konformnih preslikavanja. Danas je ova oblast aktivno područje istraživanja i srijeće se u parcijalnim diferencijalnim jednačinama, topologiji, dinamici i drugim oblastima. Finski matematičar O.Martio je prvi izučavao kvazikonformna harmonijska preslikavanja. Od tada problem Hölder i Lipschitz neprekidnosti kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja između oblasti u ravni sa unaprijed zadatim svojstvima izazvao je veliko interesovanje matematičara. Međutim, osjetno manje ima analognih rezultata u prostoru (u R^n, za $n \geq 3$), naročito zbog nedostatka tehnika iz kompleksne analize (svako harmonijsko preslikavanje u ravni se može napisati kao zbir analitičke i antianalitičke funkcije). Zato, za rješavanje odgovarajućih problema u prostoru je neophodno da se razviju nove pogodne tehnike. Sve to zajedno čini problem težim, ali tada eventualno rješavanje i odgovarajući pristup mogu biti korisni i za ostale probleme iz srodnih oblasti.

Pregled istraživanja

Pojam kvazikonformnog preslikavanja u ravni je prvenstveno uveden u radovima matematičara H.Grötzscha i L. Ahflorsa u prvoj polovini XX vijeka. Veliki doprinos u razvoju ove oblasti u to vrijeme su dali i matematičari M.A. Lavrentjev, O. Teichmüller i B. Fuglede. Nagli razvoj ove teorije je omogućeno i dokazom ekvivalencije između geometrijske definicije, koja koristi modul krivih, i metričke definicije. Kako se navedene definicije mogu prirodno uopštiti i u prostoru, u prilogu povećanom interesovanju za ovu teoriju je išla i klasična teorema Liouvillea: Konformno preslikavanje definisano u nekoj oblasti u R^n, za $n \geq 3$, je restrikcija jedne Möbiusove transformacije. Möbiusovo preslikavanje je preslikavanje generisano sa translacijom, rotacijom, homotetijom i inverzijom na sferama. Ova trivijalnost familije konformnih preslikavanja u prostoru je predstavljala dodatni motiv da se matematičari ozbiljnije okrenu ka familiji kvazikonformnih preslikavanja.

Kako su konformna preslikavanja u ravni i harmonijska, finski matematičar Martio je u [19] prvi izučavao kvazikonformna harmonijska preslikavanja. Jedan od bitnijih rezultata za ovu klasu preslikavanja je rad Pavlovića [24], gdje je dokazano da kvazikonformno harmonijsko preslikavanje u ravni iz jediničkog diska na sebe je bi-Lipschitz neprekidno. Od tada, u ravni, su ostvareni značajni rezultati u vezi sa problemom Hölder i Lipschitz neprekidnosti kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja. To podrazumijeva različite uslove na domenu, i naročito na kodomenu preslikavanja. Kalaj kroz radove [12] i [13] dokazuje Lipschitz neprekidnost kvazikonformnog harmonijskog preslikavanja između oblasti sa $C^{1,\alpha}$ granicom, čime se uopštava rezultat iz [24] . U [14] je dokazana α- Hölder neprekidnost kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja f između oblasti sa C^1 granicom, za svako $\alpha < 1$, ali tako da Hölder koeficijent ne zavisi od preslikavanja f, već samo od α, nekih određenih osobina kodomena Ω i vrijednosti $f(0)$. Ovaj rezultat predstavlja uopštenje dobijenih rezultata u radu [26] za konformna preslikavanja. Dalje, u radu [17] je, između ostalog, dokazana Lipschitz neprekidnost kvazikonformnog preslikavanja f iz jediničkog diska D u C^2 Žordanovu oblast, pod uslovom da je $\Delta f \in L^p(D)$, za $p > 2$. Drugi interesantni rezultati u ravni se mogu naći u radovima [5], [16],[18], [22].

U prostoru, kao što je već naglašeno ima manje rezultata. U radu [3] autori dokazuju Lipschitz neprekidnost kvazikonformnog harmonijskog preslikavanja iz jedinične lopte na sebe, što parcijalno generalizuje pomenuti rezultat Pavlovica u [24]. U [11] autor dokazuje da je kvazikonformno preslikavanje jedinične lopte u oblasti sa C^2 granicom, koje zadovoljava Poasonovu diferencijalnu nejednačinu, Lipschitz neprekidno. U prostoru možemo izdvojiti i radove [2], [15], [20].

Cilj i hipoteze

Glavni ciljevi disertacije su:

1) Ispitivanje Lipschitz neprekidnosti kvazikonformnog harmonijskog preslikavanja iz jedinične lopte u R^n na prostornu oblast Ω sa $C^{1,\alpha}$ granicom.
2) Ispitivanje Hölder neprekidnosti kvazikonformnog harmonijskog preslikavanja iz jedinične lopte u R^n na prostornu oblast Ω sa C^1 granicom.
3) Ispitivanje Lipschitz neprekidnosti kvazikonformnog preslikavanja f koje

zadovoljava uslov $\Delta f = g$, gdje je $g \in L^p, za\ p > n$, iz jedinične lopte u R^n na prostornu oblast Ω sa $C^{1,\alpha}$ granicom.

Napomena: Rezultat 1) je već ostvaren kroz autorski rad [9] i dat je potvrdan odgovor.

Materijali, metode i plan istraživanja

Po geometrijskoj definiciji sa pojmom kvazikonformnog preslikavanja se podrazumijeva homeomorfizam $f : U \to V$ (U i V su oblasti u R^n) koji čuva orijentaciju i koji ostavlja kvazi-invarijantnim modul svake familije krivih iz G, tj. postoji konstanta $K \geq 1$ td.

$$\frac{1}{K} M(\Gamma) \leq M(f(\Gamma)) \leq KM(\Gamma),$$

za svaku familiju krivih Γ iz G. Napominjemo da je modul krivih invarijanta za konformna preslikavanja, što gorenavedenu definiciju čini prirodnom. Ispostavlja se da kvazikonformna preslikavanja možemo definisati i preko metričke definicije koja se zasniva na ograničenost dilatacije, čime se pokazuje da kvazikonformnost je lokalno svojstvo. U našim istraživanjima $f: U \to V$ je kvazikonformno preslikavanje ako je homeomorfizam koji je apsolutno neprekidan na linijama, i za koji postoji $K \geq 1$ tako da je

$$|f'(x)| \leq Kl(f'(x)),\ za\ x \in U,$$

gdje je $|f'(x)| = \sup_{|h|=1} |f'(x)h|$ norma preslikavanja $f'(x)$, a $l(f'(x)) = \inf_{|h|=1} |f'(x)h|$.
Sve ove definicije su ekvivalentne [1,25].

Od velikog značaja za dokaz naših hipoteza i postavljenih problema jeste i jedna generalizacija dobro poznate Hardy-Littlewood teoreme [10] u prostoru. Rezultat je objavljen u radu [9]. Ovom teoremom, za harmonijsku funkciju $u: B \subset R^n \to R$, i $\eta \in S = \partial B$, se daje veza između μ-Hölder koeficijenta ($\mu < 1$) u odnosu na tačku η, tj.

$$X = \sup_{\xi \in S, \xi \neq \eta} \frac{|u(\eta) - u(\xi)|}{|\eta - \xi|^\mu}$$

i vrijednosti

$$Y = \sup_{x \in [0,\eta)} (1 - |x|)^{1-\mu} |\nabla u(x)|,$$

kroz sljedeću nejednakost:

$$\frac{1}{C} X \leq Y \leq CX,$$

gdje konstanta C zavisi samo od μ. Dokaz smo izveli primijenom Poasonovog integrala. Naime, svaka funkcija $u: \overline{B} \subset R^n \to R$, gdje je u harmonijska u jediničnoj lopti B, a neprekidna u $\overline{B} = B \cup S$, se može zapisati u sljedećem obliku

$$u(x) = \int_S \frac{1 - |x|^2}{|x - \xi|^n} u(\xi) d\sigma(\xi),$$

gdje je σ normalizovana površinska mjera na S.

Osim navedene generalizacije Hardy-Littlewood teoreme, u [9] smo dokazali i odgovarajuću verziju teoreme u slučaju da je $\mu > 1$. Ako za fiksirano $\eta \in S$, imamo nejednakost

$$|u(\eta) - u(\xi)| \leq M|\eta - \xi|^\mu,\ za\ \xi \in S,$$

onda je $|\nabla u(x)| \leq C$, za x iz duži $[0, \eta)$, gdje je C konstanta koja zavisi samo od μ i M.

Kada je u pitanju Hölder neprekidnost kvazikonformnih preslikavanja iz jedinične lopte u jediničnu loptu, onda neizostavan je rezultat teoreme Mori u prostoru [8].: K kvazikonformno sirjektivno preslikavanje $f: B \subset R^n \to B, f(0) = 0$, je α-Hölder neprekidno, gdje je $\alpha = K^{\frac{1}{1-n}}$, sa Hölder koeficijentom koji zavisi samo od K.

Za dokaz rezultata 1) korišćena je tehnika koja omogućava sukcesivno poboljšanja Hölder neprekidnosti u jediničnoj lopti B, imajući kao bazni slučaj β-Hölder neprekidnost koju smo dobili primijenom Morijeve teoreme. Koristeći uslov $C^{1,\alpha}$ granice kodomena, možemo da granicu kodomena lokalno predstavimo kao grafik $C^{1,\alpha}$ funkcije. To omogućava da u odnosu na jednu fiksiranu tačku n–ta koordinata funkcije f bude $(1+\alpha)\beta$-Hölder neprekidna u S, što na osnovu naše Hardy-Littlewood teoreme daje ograničenost vrijednosti Y. Koristeći kvazikonformnost preslikavanja f možemo tu nejednakost dobiti i za ostale koordinate funkcije f, a koristeći pogodne izometrije nejednakost se prenosi i na sve ostale tačke iz jedinične lopte. U ovom momentu, naša Hardy-Littlewood teorema nam daje $(1+\alpha)\beta$–Hölder neprekidnost našeg preslikavanja u čitavoj lopti (krenuli smo iz β-Hölder neprekidnosti). Sukcesivnom primijenom ovog postupka, zaključujemo da je f μ-Hölder neprekidno za sve $\mu \in (0,1)$. Prelazak iz Hölder neprekidnosti u Lipschitz neprekidnost je ostvareno na analogan način kao za preostale iteracije, osim što smo koristili verziju Hardy-Littlewood teoreme za slučaj $\mu > 1$.

Što se tiče hipoteze/problema 2) naš cilj je da parcijalno generalizujemo navedene rezultat u [14] i [26] iz ravni u prostoru. Dodatna pretpostavka, u odnosu na te radove, je β- Hölder neprekidnost preslikavanja f, za neko $\beta \in (0,1)$. Ideja se zasniva na posmatranje n-te kordinate funkcije f. Zbog uslova β-Hölder neprekidnosti ispostavlja se da funkcija

$$(1-|x|)^{1-\alpha}|f_n'(x)|$$

uzima vrijednost nula na sferi S, pa se odgovarajući supremum dostiže u unutrašnjosti lopte B. To, na osnovu pomenutog uopštenja Hardy-Littlewood teoreme, povlači α-Hölder neprekidnost preslikavanja f_n, sa Hölder koeficijentom koji zavisi od navedenog supremuma. Odgovarajuće nejednakosti se prenose i na ostale koordinatne funkcije koristeći kvazikonformnost preslikavanja f. Očekuje se da, zbog kompaktnosti granice i kvazikonformnosti preslikavanja f, navedeni supremum može biti kontrolisan nezavisno od tačke iz lopte gdje se dostiže taj supremum/maksimum i nezavisno od preslikavanja f.

Za hipotezu/problem 3) uslov $\Delta f = g$, gdje je $g \in L^p$, ćemo koristiti za reprezentaciju funkcije f preko Poasonovog jezgra i odgovarajuće Grinove funkcije. Očekujemo da dio koji je povezan sa Grinovom funkcije možemo "kontrolisati" i tako uopštiti rezultat iz [9], i generalizovati i uopštiti pomenuti rezultat iz [17], gdje je uzet jači uslov (C^2 uslov na granici kodomena).

Očekivani naučni doprinos

Kao što je naglašeno, ispitivanje Hölder i Lipschitz neprekidnosti kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja je tema koja je imala dosta pažnje u slučaj ravni, međutim u prostoru je nedovoljno istražena. Dokaz pojedinih tvrđenja i u prostoru bi omogućilo ne samo generalizaciju rezultata iz ravni, već u nekim slučajevima i uopštenje i poboljšanje već postignutih rezultata. Kroz nove razvijene tehnike u prostoru odgovarajući pristup može biti koristan i za ostale slične probleme. Sa druge strane, u pojedinim situacijama možemo ukazati i na suštinske razlike koje donosi prelaz iz ravni u prostor, zbog kojih se neka tvrđenja ne mogu generalizovati.

Spisak objavljenih radova kandidata

1. A. Gjokaj, D. Kalaj: Quasiconformal Harmonic Mappings Between the Unit Ball and a Spatial Domain with $C^{1,\alpha}$ Boundary. Potential Analysis (2021). https://doi.org/10.1007/s11118-021-09919-y.

Popis literature

1. L. Ahflors: Lectures on quasiconformal mappings, Van Nostrnad, Princeton (1996).
2. M. Arsenović, V. Bozin, V. Manojlović: Moduli of continuity of harmonic quasiregular mappings in B^n, Potential analysis vol 34 (2011) 283-291.
3. K. Astala, V. Manojlović: On Pavlovic theorem in space, Potential Anal. 43, No.3, 2015, 361-370.
4. S. Axler, P. Bourdon, W. Ramey: Harmonic funciton theory, Springer-Verlag New York (2000).
5. V. Božin, M. Mateljević: Quasiconformal and HQC mappings between Lyapunov Jordan domains, pp. 23 Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci (5) DOI Number: 10.2422/2036-2145.201708 013.
6. K. M. Dyakonov: Equivalent norms on Lipchitz-type spaces of holomorphic functions. Acta Math. 178, 1997, 143167.
7. P. Duren: Harmonic mappings in the plane, Cambridge University Press, 2004.
8. R. Fehlmann, M. Vuorinen: Mori's theorem for n-dimensional quasiconformal mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 13 (1988), no. 1, 111-124.
9. A. Gjokaj, D. Kalaj, Quasiconformal harmonic mappings between the unit ball and a spatial domain with $C^{1,\alpha}$ boundary, Potential Analysis, 2021, DOI https://doi.org/10.1007/s11118-021-09919-y.
10. G.M. Goluzin: Geometric function theory of a complex variable, Transl. Of Math. Monographs 26. – Providence: AMS, 1969.
11. D. Kalaj: A priori estimate of gradient of a solution to certain differential inequality and quasiconformal mappings, Journal d'Analyse Math. Volume 119, 2013, pp 63-88.
12. D. Kalaj: Quasiconformal mappings between Jordan domains, Math. Z. 260, No.2, 237-252, 2008.
13. D. Kalaj: Lipschitz spaces and harmonic mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn., Math. **34**, 475–485 (2009).
14. D. Kalaj: Harmonic quasiconformal mappings between C^1 smooth Jordan domains, Revista Iberoamericana, DOI 10.4171/RMI/1272.
15. D. Kalaj: On harmonic quasiconformal self-mappings of the unit ball, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **33** (2008), no. 1, 261–271. MR2386850 (2008m:30024).
16. D. Kalaj and M. Pavlović: On quasiconformal self-mappings of the unit disk satisfying Poisson's equation, Transactions of the American Mathematical Society 363(08):4043-4061 (2011).
17. D. Kalaj, E. Saksman: Quasiconformal maps with controlled Laplacian, Journal d'Analyse Mathématique (2018). DOI:10.1007/s11854-018-0072-5
18. V. Manojlović: Bi-Lipschicity of quasiconformal harmonic mappings in the plane, Filomat 23, No. 1, 85-89 (2009).
19. O. Martio: On harmonic quasiconformal mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I 425 (1968), 3-10.

20. O. Martio, R. Näkki: Hölder continuity and quasiconformal mappings, J. London Math. Soc. (2), 44, no.2, 1991, 339-350.
21. J.C.C. Nitsche: The boundary behaviour of minimal surfaces. Kellog's theorem and branch points on the boundary, Invent. Math. 8, 313-333 (1969).
22. D. Partyka, K. Sakan: On bi-Lipschitz type inequalities for quasiconformal harmonic mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **32** (2007), no. 2, 579–594. MR2337496 (2008m:30021).
23. M. Pavlović: Lipschitz conditions on the modulus of a harmonic function, Rev. Mat. Iberoam. 23 (2007), no. 3, 831-845.
24. M. Pavlović: Boundary correspondence under harmonic quasiconformal homeomorphisms of the unit disc, An. Acad. Sci. Fenn., 27, 365-372 (2002).
25. J. Väisälä: Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings, Lecture notes Math. , 229, Sprinder-Verlag Berlin- New York, 1971.
26. S. Warschawski: On conformal mapping of regions bounded by smooth curves, Proc. Am. Math. Soc. 2, 1951, 254-261.

SAGLASNOST PREDLOŽENOG/IH MENTORA I DOKTORANDA SA PRIJAVOM

Odgovorno potvrđujem da sam saglasan sa temom koja se prijavljuje.

Prvi mentor	Prof. dr David Kalaj	
Drugi mentor		
Doktorand	MSc Anton Gjokaj	A Gjokaj

IZJAVA

Odgovorno izjavljujem da doktorsku disertaciju sa istom temom nisam prijavio/la ni na jednom drugom fakultetu.

U Podgorici,
21.12.2021. god.

Ime i prezime doktoranda
Anton Gjokaj