UNIVERZITET CRNE GORE
Prirodno-matematički fakultet Podgorica

Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta

IZVJEŠTAJ KOMISIJE O PODOBNOSTI TEME MASTER RADA
KANDIDATA JELENE JOVANOVIĆ

Vijeće Prirodno-matematičkog fakulteta na sjednici održanoj 15. 2. 2022. imenovalo je mentora i Komisiju za ocjenu podobnosti teme za izradu master rada pod nazivom "Značaj aritmetičkih funkcija u dokazu Dirihleove teoreme o prostim brojevima" kandidata Jelene Jovanović, u sastavu:

dr Žana Kovijanić Vukićević, redovni profesor - član

dr Goran Popivoda, docent - član

dr Vladimir Božović, redovni profesor - mentor.

Nakon uvida u podneseni materijal, a u vezi sa članom 24 Pravila studiranja na postdiplomskim studijama, podnosimo sljedeći

IZVJEŠTAJ

Jelena Jovanović, specijalista Matematike i računarskih nauka, prijavila je temu master rada pod nazivom "Značaj aritmetičkih funkcija u dokazu Dirihleove teoreme o prostim brojevima". Tema spada u oblast matematike za koju je matičan Prirodno-matematički fakultet. Dokumenta podnesena za prijavu teme sadrže: biografiju kandidata, naziv i kratku razradu teme, kao i kratko obrazloženje predmeta istraživanja i strukture rada.

Podaci o kandidatu

Jelena Jovanović je rođena 21. 9. 1995. godine u Podgorici. Diplomirala je 2019. godine na bečelor studijama i 2020. godine na specijalističkim studijama odsjeka za Matematiku i računarske nauke Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore, sa specijalističkim radom pod nazivom "Difi-Helman protokol i eliptičke krive" pod mentorstvom prof. dr

Vladimira Božovića. U oktobru 2020. upisala je master studije istog odsjeka i do oktobra 2021. položila sve ispite predviđene programom studija. Nastavila je sa praktičnim usavršavanjem u oblasti Matematike i Informatike i trenutno je angažovana kao nastavnica u srednjoj školi.

Aktuelnost teme

Nizovi realnih i kompleksnih brojeva su značajni matematički pojmovi koji se u teoriji brojeva nazivaju aritmetičkim funkcijama. Primjenom aritmetičkih funkcija u savremenim dokazima Dirihleove teoreme o prostim brojevima smanjuje se nivo algebarske apstrakcije čime njihov značaj dolazi do izražaja. Podsjetimo se, Dirihleova teorema tvrdi da u proizvoljnom aritmetičkom nizu postoji beskonačno mnogo prostih brojeva. Dokazivanje ovog tvrđenja bio je veliki izazov, a prvi koji je u tome uspio Johan Peter Gustav Ležen Dirihle, koji je 1837. godine objavio dokaz. Matematičar Harold Šapiro je 1950. godine pojednostavio Dirihleov dokaz koristeći divergenciju reda $\sum \frac{\log\log p}{p}$, a ne $\sum \frac{1}{p}$, kao što je to originalno zamislio Dirihle, gdje p "prolazi" skup prostih brojeva. Formulacija Dirihleove teoreme je jasna, ali za detaljan i matematički precizan dokaz su potrebne ideje i metode Algebre, Analize i Teorije brojeva. Aritmetičke funkcije, posebno karakteri, imaju važnu ulogu u tom dokazu. Na osnovu definicije karaktera pokazuje se da su njihove vrijednosti kompleksni korijeni jedinice, odnosno da su oblika $\chi(n) = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, za prirodan broj n . Nastankom teorije Galoa, dokazuju se ostala važna svojstva karaktera od kojih treba istaknuti multiplikativnost, periodičnost i relacije ortogonalnosti. Ovako definisani Dirihleovi karakteri upotrebljivi su u rješavanju i drugih matematičkih problema, od kojih je Zakon kvadratnog reciprociteta jedan od najdubljih rezultata elementarne teorije brojeva i jedna od teorema kojom su se matematičari najviše bavili.

Iako naizgled sličan problemu dokazivanja beskonačnosti skupa prostih brojeva koji su uspješno riješili Euklid i Ojler, ovaj problem je neuporedivo kompleksniji ako se fokusiramo na neki aritmetički niz, odnosno postavimo pitanje da li u takvom nizu ima beskonačno mnogo prostih brojeva. Na ovaj način dobija se kompleksan matematički zadatak, za koji Euklidova teorema i Ojlerov dokaz pomoću divergencije reda $\sum \frac{1}{p}$ služe samo kao motivacija i početna ideja. Za dokazivanje Dirihleove teoreme Šapiro koristi divergenciju reda $\sum \frac{\log\log p}{p}$, a kako je u ovom redu potrebno izdvojiti samo proste brojeve aritmetičkog niza, koriste se upravo Dirihleovi karakteri. Neophodan i dovoljan uslov Dirihleove teoreme jeste da, za odgovarajuće proste brojeve, oblika mk+h, brojevi m i h budu uzajamno prosti. U suprotnom, zajednički djelilac brojeva m i h bio bi i zajednički djelilac svih članova tog niza, što znači da bi postojao najviše jedan prost član. Drugim riječima, odgovarajući prosti brojevi su kongruentni sa h po modulu m, pa su za dokazivanje Dirihleove teoreme značajni neki elementarni pojmovi algebre, kao što su modularna kongruencija i konačna multiplikativna grupa po modulu m. U vezi sa tim, u radu se pokazuje da je red grupe karaktera po modulu m jednak redu grupe ostataka po modulu m, jednak Ojlerovoj funkciji φ(m), što omogućava sumiranje u redovima po karakterima, a ne po prirodnim brojevima. Ovakvom analizom dobija se i jači rezultat od predviđenog, a to je formula za računanje raspodjele tj. "gustine" prostih brojeva u aritmetičkom nizu. Na primjer, nizovi 2, 4, 6, 8... i 4, 16, 64, 256... imaju beskonačno mnogo prostih brojeva ali u prvom ih ima više. Takođe, može se izvesti zaključak da prostih brojeva ima mnogo više nego potpunih kvadrata, obzirom na opštepoznatu činjenicu da red $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergira, a red $\sum \frac{1}{p}$ divergira.

Pored navedenog, Dirihleova teorema pronašla je još neke primjene u matematici. Pomoću nje moguće je odrediti tačke torzije eliptičke krive $y^2 = x^3 - n^2x$, granice konačnih podgrupa specijalne linearne grupe $GL_n(Q)$ i konstruisati prebrojiv slučajni graf. Svakako, u pitanju su veoma značajne i interesantne matematičke teme, koje bi mogle biti predmet daljeg istraživanja. Takođe, rešavanjem Dirihleove teoreme o prostim brojevima, prirodno se postavlja i obrnuto pitanje, odnosno pitanje o egzistenciji aritmetičkih nizova proizvoljne dužine u skupu prostih brojeva. Godine 2004. ovo tvrđenje je dokazano za aritmetičke nizove sa konačnim brojem članova. Ipak, neke slične hipoteze su ostale neriješene, kao na primjer hipoteza o prostim brojevima "blizancima" koja tvrdi da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva čija je razlika tačno 2.

Cilj, struktura i metodologija rada

Cilj ovog istraživanja je da se pokažu značaj i uloga aritmetičkih funkcija u dokazu Dirihleove teoreme o prostim brojevima i da se uz pomoć određenih teorema iz oblasti Analize, Algebre i Teorije brojeva, unaprijedi dokaz Dirihleove teoreme u odnosu na prvobitnu verziju. Predstavljanje aritmetičkih funkcija kao u modifikovanom dokazu Dirihleove teoreme značajno doprinosi razvoju analitičke teorije brojeva i daje dobru teorijsku podlogu za rešavanje drugih matematičkih problema.

U prvom dijelu rada biće predstavljena Euklidova i Ojlerova analiza sličnog problema kako bi se jasno predstavile ideje i ciljevi. Ojlerova analiza temelji se na formuli za Ojlerov proizvod i Riman-zeta funkciji, koja se u dokazu Dirihleove teoreme pojavljuje u generalizovanom obliku kao L-funkcija. Motivacija i početne ideje za dokaz Dirihleove teoreme zasnivaju se na sledećem. Beskonačnost skupa prostih brojeva može se dokazati metodom svođenja na apsurd tj. uz pretpostavku da je ovo skup sa konačnim brojem elemenata. Kada se pronađe bar jedan prost broj, koji ne pripada pretpostavljenom konačnom skupu, dokaz je završen. To je pristup koji se može primijeniti na neke posebne slučajeve aritmetičkih nizova, ali je neprimjenljiv u opštem slučaju. Stoga, koristi se drugačiji pristup, zasnovan na divergenciji redova. Divergencije redova $\sum \frac{1}{p}$ i $\sum \frac{\log\log p}{p}$ u kojima se pojavljuju svi prosti brojevi, impliciraju da prostih brojeva ima beskonačno mnogo. Ova ideja može se iskoristiti i za proizvoljan aritmetički niz što se pokazuje u dokazu Dirihleove teoreme. U drugom dijelu rada će se teorijski predstaviti grupa aritmetičkih funkcija sa Dirihleovom konvolucijom i proširenje na veći skup, odakle će se dobiti Mebijusova formula inverzije i uspostaviti veza između parcijalnih suma aritmetičkih funkcija i parcijalnih suma Dirihleovog proizvoda. Biće prikazano asimptotsko ponašanje aritmetičkih funkcija i pomoću Ojlerove formule sumiranja, biće dokazana ostala neophodna pomoćna tvrđenja. Analizirajući Dirihleove karaktere i L-funkcije doći će se do konačnog dokaza Dirihleove teoreme o prostim brojevima, čemu je posvećeno poslednje poglavlje.

Dakle, metodologija analize dokaza se sastoji iz tri dijela: hronološki navedene nastale činjenice koje formiraju konačnu ideju i plan dokaza, analize aritmetičkih funkcija i njihove upotrebe u dokazu Dirihleove teoreme o prostim brojevima. Rad će se sastojati od sledećih cjelina: Uvod, Algebarski pojmovi, Početne ideje i motivacija, Aritmetičke funkcije, Dirihleovi karakteri i L-funkcije, Dokaz Dirihleove teoreme o prostim brojevima, Zaključak.

Zaključak

Na osnovu prethodno izloženog smatramo da predložena tema master rada kandidata Jelene Jovanović ispunjava sve uslove predviđene Pravilima studiranja na postdiplomskim studijama, propisanim od strane Senata Univerziteta Crne Gore. Komisija predlaže Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta da kandidatu Jeleni Jovanović odobri izradu master rada pod nazivom "Značaj aritmetičkih funkcija u dokazu Dirihleove teoreme o prostim brojevima".

U Podgorici, 8. 3. 2022.

KOMISIJA

dr Žana Kovijanić Vukićević, redovni profesor PMF-a - član

dr Goran Popivoda, docent PMF-a - član

dr Vladimir Božovićc, vanredni profesor PMF-a – mentor