OCJENA PODOBNOSTI DOKTORSKE TEZE I KANDIDATA

OPŠTI PODACI O DOKTORANDU	
Titula, ime i prezime	MSc Anton Gjokaj
Fakultet	Prirodno-matematički fakultet
Studijski program	Matematika
Broj indeksa	2/19
Podaci o magistarskom radu	„Konveksne i univalentne harmonijske funkcije u kompleksnoj ravni i njihova geometrija“ Matematička analiza, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, 2019, 10.00
NASLOV PREDLOŽENE TEME	
Na službenom jeziku	Granična svojstva kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru
Na engleskom jeziku	Boundary behaviour of quasiconformal harmonic mappings in space
Datum prihvatanja teme i kandidata na sjednici Vijeća organizacione jedinice	24.12.2021.
Naučna oblast doktorske disertacije	Matematička analiza
Za navedenu oblast matični su sljedeći fakulteti	
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore	

A. IZVJEŠTAJ SA JAVNE ODBRANE POLAZNIH ISTRAŽIVANJA DOKTORSKE DISERTACIJE

MSc Anton Gjokaj pristupio je odbrani polaznih istraživanja sprovedenih u okviru izrade doktorske disertacije pod nazivom "Granična svojstva kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru" dana 24.03.2022. godine u 10h, pred komisijom u sastavu:

- Dr Đorđije Vujadinović, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore
- Dr Marijan Marković, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore
- Dr David Kalaj, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore (mentor)

Komisija je imenovana na sjednici Vijeća Prirodno-Matematičkog fakulteta, održanoj 24.12.2021. godine. Kandidat je precizno izložio osnovnu temu disertacije i dosadašnje rezultate na kojima se bazira istraživanje, kao i predstavio svoje rezultate i korištene metode. Komisija je zaključila da ovo istraživanje predstavlja doprinos oblasti kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru. Komisija je, uzimajući u obzir kvalitet sprovedenih istraživanja i odgovore na postavljena pitanja, jednoglasno donijela odluku da je kandidat uspješno odbranio polazna istraživanja. Odbrana je završena u 10h i 55 minuta.

B. OCJENA PODOBNOSTI TEME DOKTORSKE DISERTACIJE

B1. Obrazloženje teme

Kvazikonformna preslikavanja u ravni su nastala kao prirodno uopštenje pojma konformnih preslikavanja. Danas je ova oblast aktivno područje istraživanja i srijeće se u parcijalnim diferencijalnim jednačinama, topologiji, dinamici i drugim oblastima. Finski matematičar O.Martio je prvi izučavao kvazikonformna harmonijska preslikavanja. Od tada problem Hölder i Lipschitz neprekidnosti kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja između oblasti u ravni sa unaprijed zadatim svojstvima izazvao je veliko interesovanje matematičara. Međutim, osjetno manje ima analognih rezultata u prostoru (u R^n, za $n \geq 3$), naročito zbog nedostatka tehnika iz kompleksne analize (svako harmonijsko preslikavanje u ravni se može napisati kao zbir analitičke i antianalitičke funkcije). Zato, za rješavanje odgovarajućih problema u prostoru je neophodno da se razviju nove pogodne tehnike. Sve to zajedno čini problem težim, ali eventualno rješavanje i odgovarajući pristup mogu biti korisni i za ostale probleme iz srodnih oblasti.

B2. Cilj i hipoteze

S obzirom na to da je kvazikonformnim preslikavanjima u prostoru posvećena manja pažnja u odnosu na slučaj ravni, prirodno se nameće potreba da se razvijaju nove tehnike kako bi se generalizovali i eventualno poboljšalji neki poznati rezultati iz ravni u prostoru $R^n, n \geq 3$. Cilj istraživanja je ispitivanje Lipschitz i Hölder neprekidnosti kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja između prostornih oblasti. To podrazumijeva određivanje potrebne glatkosti na granici odgovarajućih oblasti kako bi preslikavanje bilo Lipschitz neprekidno, odnosno Hölder neprekidno.

Postavljene hipoteze su:

1) Kvazikonformno harmonijsko preslikavanja iz jedinične lopte u R^n na prostornu oblast Ω sa $C^{1,\alpha}$ granicom je Lipschitz neprekidno.
2) Kvazikonformno preslikavanje f iz β-Bloch harmonijskog prostora, $\beta \in (0,1)$, između jedinične lopte i prostorne oblasti sa C^1 granicom je α-Hölder neprekidno, $\alpha \in (0,1-\beta)$, sa uniformnim Hölder koeficijentom koji ne zavisi ni od f, ni od β.
3) Kvazikonformno harmonijsko, Lipschitz neprekidno preslikavanje f između jedinične lopte i prostorne oblasti sa C^1 granicom je α-Hölder neprekidno, $\alpha \in (0,1)$, sa uniformnim Hölder koeficijentom koji ne zavisi od f.
4) Kvazikonformno preslikavanje f koje zadovoljava uslov $\Delta f = g$, gdje je $g \in L^p, za\ p > n$, iz jedinične lopte u R^n na prostornu oblast Ω sa $C^{1,\alpha}$ granicom je Lipschitz neprekidno.

Napomena: Rezultat hipoteze 1) je već ostvaren kroz autorski rad.

B3. Metode i plan istraživanja

Po geometrijskoj definiciji sa pojmom kvazikonformnog preslikavanja se podrazumijeva homeomorfizam $f : U \to V$ (U i V su oblasti u R^n) koji čuva orijentaciju i koji ostavlja kvazi-invarijantnim modul svake familije krivih iz G, tj. postoji konstanta $K \geq 1$ td.

$$\frac{1}{K}M(\Gamma) \leq M(f(\Gamma)) \leq KM(\Gamma),$$

za svaku familiju krivih Γ iz G. Napominjemo da je modul krivih invarijanta za konformna preslikavanja, što gorenavedenu definiciju čini prirodnom. Ispostavlja se da kvazikonformna preslikavanja možemo definisati i preko metričke definicije koja se zasniva na ograničenost dilatacije, čime se pokazuje da kvazikonformnost je lokalno svojstvo. U našim istraživanjima $f: U \to V$ je kvazikonformno preslikavanje ako je homeomorfizam koji je apsolutno neprekidan na linijama, i za koji postoji $K \geq 1$ tako da je

$$|f'(x)| \leq Kl(f'(\mathrm{x})), \ za \ x \in U,$$

gdje je $|f'(x)| = \sup_{|h|=1} |f'(x)h|$ norma preslikavanja $f'(x)$, a $l(f'(x)) = \inf_{|h|=1} |f'(x)h|$.

Od velikog značaja za dokaz hipoteza kandidata jeste i jedna generalizacija u prostoru dobro poznate Hardy-Littlewood teoreme. Ovom generalizacijom, za harmonijsku funkciju $u: B \subset R^n \to R$, i $\eta \in S = \partial B$, se daje veza između μ-Hölder koeficijenta ($\mu < 1$) na S u odnosu na tačku η, tj.

$$X = \sup_{\xi \in S, \xi \neq \eta} \frac{|u(\eta) - u(\xi)|}{|\eta - \xi|^{\mu}}$$

i vrijednosti

$$Y = \sup_{\mathrm{x} \in [0,\eta)} (1 - |x|)^{1-\mu} |\nabla u(x)|,$$

kroz sljedeću nejednakost:

$$\frac{1}{C}X \leq Y \leq CX,$$

gdje konstanta C zavisi samo od μ. Kandidat je dokaz izveo primijenom Poasonovog integrala. Naime, svaka funkcija $u: \overline{B} \subset R^n \to R$, gdje je u harmonijska u jediničnoj lopti B, a neprekidna u $\overline{B} = B \cup S$, se može zapisati u sljedećem obliku

$$u(x) = \int_S \frac{1 - |x|^2}{|x - \xi|^n} u(\xi) d\sigma(\xi),$$

gdje je σ normalizovana površinska mjera na S.

Osim navedene generalizacije Hardy-Littlewood teoreme, kandidat dokazuje odgovarajuću verziju teoreme i u slučaju da je $\mu > 1$. Ako za fiksirano $\eta \in S$, imamo nejednakost

$$|u(\eta) - u(\xi)| \leq M|\eta - \xi|^{\mu}, za \ \xi \in S,$$

onda važi $|\nabla u(x)| \leq C$, za x iz duži $[0, \eta)$, gdje je C konstanta koja zavisi samo od μ i M.

Kada je u pitanju Hölder neprekidnost kvazikonformnih preslikavanja iz jedinične lopte u jediničnu loptu, onda neizostavan je rezultat teoreme Mori u prostoru: K kvazikonformno sirjektivno preslikavanje $f: B \subset R^n \to B, f(0) = 0$, je α-Hölder neprekidno, gdje je $\alpha = K^{\frac{1}{1-n}}$, sa Hölder koeficijentom koji zavisi samo od K.

Za dokaz rezultata 1) korišćena je tehnika koja omogućava sukcesivno poboljšanje Hölder neprekidnosti u jediničnoj lopti B, imajući kao bazni slučaj β-Hölder neprekidnost koja se dobija primijenom Morijeve teoreme. Koristeći uslov $C^{1,\alpha}$ granice kodomena, granica kodomena se može lokalno predstaviti kao grafik $C^{1,\alpha}$ funkcije. To omogućava da u odnosu na jednu fiksiranu tačku n–ta koordinata funkcije f bude $(1 + \alpha)\beta$ -Hölder neprekidna u S, što na osnovu generalizacije Hardy-Littlewood teoreme daje ograničenost vrijednosti Y. Koristeći kvazikonformnost preslikavanja f ta nejednakost se može dobiti i za ostale koordinate funkcije f, a koristeći pogodne izometrije nejednakost se prenosi i na sve ostale tačke iz jedinične lopte. Na taj način, generalizacija Hardy-Littlewood teorema daje $(1+\alpha)\beta$–Hölder neprekidnost početnog preslikavanja u čitavoj lopti (iz β-Hölder neprekidnosti se došlo do $(1+\alpha)\beta$–Hölder neprekidnosti). Sukcesivnom primijenom ovog postupka, zaključuje se da je f μ-Hölder neprekidno za sve $\mu \in (0,1)$. Prelazak iz Hölder neprekidnosti u Lipschitz neprekidnost kandidat ostvaruje na analogan način kao za preostale iteracije, osim što koristi verziju Hardy-Littlewood teoreme za slučaj $\mu > 1$.

Što se tiče hipoteze/problema 2) kandidat planira da parcijalno generalizuje rezultate iz ravni u prostoru. Dodatna pretpostavka, u odnosu na rezultate ostvarene u ravni je uslov β- Bloch prostora za preslikavanje f, za neko $\beta \in (0,1)$. Ideja se zasniva na posmatranje n-te kordinate funkcije f. Zbog uslova β-Bloch prostora ispostavlja se da funkcija

$$(1-|x|)^{1-\alpha}|f_n{}'(x)|$$

uzima vrijednost nula na sferi S, pa se odgovarajući supremum dostiže u unutrašnjosti lopte B. To, na osnovu pomenutog uopštenja Hardy-Littlewood teoreme, povlači α-Hölder neprekidnost preslikavanja f_n, sa Hölder koeficijentom koji zavisi od navedenog supremuma. Odgovarajuće nejednakosti se prenose i na ostale koordinatne funkcije koristeći kvazikonformnost preslikavanja f. Očekuje se da, zbog kompaktnosti granice i kvazikonformnosti preslikavanja f, navedeni supremum može biti kontrolisan nezavisno od tačke iz lopte gdje se dostiže taj supremum/maksimum i nezavisno od preslikavanja f.

Za hipotezu/problem 4) uslov $\Delta f = g$, gdje je $g \in L^p$, kandidat će koristiti za reprezentaciju funkcije f preko Poasonovog jezgra i odgovarajuće Grinove funkcije. Očekuje se da dio koji je povezan sa Grinovom funkcije može biti "kontrolisan" i tako se uopštiti rezultate iz ravni gdje je uzet jači uslov (C^2 uslov na granici kodomena).

B4. Naučni doprinos

Kao što je naglašeno, ispitivanje Hölder i Lipschitz neprekidnosti kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja je tema koja je imala dosta pažnje u slučaj ravni, međutim u prostoru je nedovoljno istražena. Dokaz pojedinih tvrđenja i u prostoru bi omogućilo ne samo generalizaciju rezultata iz ravni, već u nekim slučajevima i uopštenje i poboljšanje već postignutih rezultata. Kroz nove razvijene tehnike u prostoru odgovarajući pristup može biti koristan i za ostale slične probleme. Sa druge strane, u pojedinim situacijama se može ukazati i na suštinske razlike koje donosi prelaz iz ravni u prostor, zbog kojih se neka tvrđenja ne mogu generalizovati.

B5. Finansijska i organizaciona izvodljivost istraživanja

Mišljenje komisije je da kandidat uz sopstvene napore i podršku Prirodno-Matematičkog fakulteta može obrezbijediti odgovarajuće organizacione uslove za izradu ove doktorske disertacije.

Mišljenje i prijedlog komisije

Komisija za ocjenu podobnosti teme i rada kandidata, nakon detaljnog razmatranja prijave teme i javne prezentacije programa istraživanja, smatra da je predmet istraživanja kandidata matematički sadržajan, originalan, aktuelan i da odgovora nivou istraživanja za doktorsku disertaciju. Takođe, komisija je mišljenja da prezentovani novi rezultati predstavljaju doprinos u izučavanju kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru, što potvrđuje i publikovanje rada u časopisu Potential Analysis.

Stoga komisija predlaže Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta da se podrži prijava disertacije kandidata MSc Antona Gjokaja.

Prijedlog izmjene naslova

Prijedlog promjene mentora i/ili imenovanje drugog mentora

Planirana odbrana doktorske disertacije

2023, zimski semestar

Izdvojeno mišljenje

Napomena

ZAKLJUČAK

Predložena tema po svom sadržaju **odgovara** nivou doktorskih studija.	**DA**	NE
Tema **je** originalan naučno-istraživački rad koji odgovara međunarodnim kriterijumima kvaliteta disertacije.	**DA**	NE
Kandidat **može** na osnovu sopstvenog akademskog kvaliteta i stečenog znanja da uz adekvatno mentorsko vođenje realizuje postavljeni cilj i dokaže hipoteze.	**DA**	NE

Komisija za ocjenu podobnosti teme i kandidata

Prof. dr Đorđije Vujadinović, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Crna Gora	
Prof. dr Marijan Marković, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Crna Gora	Marijan Marković
Prof. dr David Kalaj, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Crna Gora	

U Podgorici,
28.03.2022.

DEKAN

MP

PRILOG

PITANJA KOMISIJE ZA OCJENU PODOBNOSTI DOKTORSKE TEZE I KANDIDATA	
Prof. dr Đorđije Vujadinović	Da li je uslov u definiciji kvazikonformnih preslikavanja u prostoru motivisan definicijom kvazikonformnih preslikavanja u ravni sa dilatacijama?
	Pojasniti strategiju korišćenja uslova Bloch prostora kod hipoteze 2.
	Koji bi bio suštinski problem da se uopšti rezultat hipoteze/rezultata 1 i na oblast sa Dini glatkom granicom (umjesto $C^{1,\alpha}$ granicom)?
Prof dr. Marijan Marković	Obasniti korišćenje Morijeve teoreme.
	Da li ste razmatrali uopštenje rezultata 1 za slučaj kada je i domen preslikavanja oblast sa $C^{1,\alpha}$ granicom?
	Zašto nije prirodno očekivati da važi rezultat 1 za slučaj kada je domen preslikavanja oblast sa C^1 granicom?
Prof. dr David Kalaj	Šta predstavlja $d\sigma$ kod Puasonovog integrala?
	Koja je veza između ACL (apsolutna neprekidnost po linijama) i diferencijabilnosti?
	Šta se može reći za co-Lipschitz neprekidnost u slučaju preslikavanja iz kruga u konveksnu oblast sa C^1 granicom?
	Mogućnost uopštenja tvrđenja na klasu pluriharmonijskih preslikavanja u prostoru.
PITANJA PUBLIKE DATA U PISANOJ FORMI	
ZNAČAJNI KOMENTARI	