

OCJENA DOKTORSKE DISERTACIJE

OPŠTI PODACI O DOKTORANDU		
Titula, ime i prezime	MSc Nikola Konatar	
Fakultet	Prirodno-matematički fakultet	
Studijski program	Matematika	
Broj indeksa	1/16	
MENTOR/MENTORI		
Prvi mentor	Prof. dr Darko Mitrović	Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Crna Gora
Drugi mentor	-	-
KOMISIJA ZA OCJENU DOKTORSKE DISERTACIJE		
Dr Oleg Obradović, redovni profesor	Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Crna Gora	
Dr Darko Mitrović, redovni profesor	Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Crna Gora	
Dr David Kalaj, redovni profesor	Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Crna Gora	
Dr Goran Popivoda, docent	Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Crna Gora	
Dr Sanja Konjik, redovni profesor	Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Srbija	
Datum značajni za ocjenu doktorske disertacije		
Doktorska disertacija i Izvještaj Komisije dostavljen Biblioteci UCG		
Javnost informisana (dnevne novine) da su Doktorska disertacija i Izvještaj Komisije dati na uvid		
Sjednica Senata na kojoj je izvršeno imenovanje Komisije za ocjenu doktorske disertacije		16.9.2022.
Uvid javnosti		
U predviđenom roku za uvid javnosti bilo je primjedbi?		
OCJENA DOKTORSKE DISERTACIJE		
1. Pregled disertacije (bibliografski podaci o disertaciji i sažetak disertacije) Doktorska disertacija "<i>Zakoni održanja u okviru stohastičkih i determinističkih modela</i>" kandidata MSc Nikole Konatara se sastoji iz rezimea, abstract-a na engleskom jeziku, predgovora, četiri poglavlja i spiska literature sa 83 bibliografske jedinice. Kandidat istražuje svojstva zakona održanja u okviru nekoliko determinističkih i stohastičkih modela. Preciznije, kandidat istražuje tri problema: kretanje granice između nemešljivih fluida, postojanje rješenja za zakon održanja sa prekidnim fluksom (takozvanim Caratheodory-jevim fluksom), i postojanje i jedinstvenost rješenja za stohastički skalarni zakon održanja na Riemann-ovoj mnogostrukosti. U nastavku je dat detaljan prikaz disertacije.		

Disertacija se sastoji iz četiri poglavlja. U prvom, uvodnom poglavlju kandidat je izložio dio matematičkog aparata potrebnog za rad na zadacima disertacije. Budući da su problemi kojima se kandidat bavi zahtijevaju znanje iz oblasti Funkcionalne analize, Parcijalnih diferencijalnih jednačina, Diferencijalne geometrije i Stohastike, posebno Ito-ove teorije, dati su osnovni pojmovi i tvrđenja vezani za potrebne oblasti, radi kompletnosti disertacije. Iz Funkcionalne analize kandidat daje osvrt na Banach-ove prostore, koji zauzimaju bitno mjesto u matematici, linearne operatore, kao i pojmove dualnog prostora i različite tipove konvergencije u Banach-ovim prostorima. Nakon toga kandidat daje pregled teorije vezane za Skalarne zakone održanja (parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda). Skalarni zakoni održanja se koriste za modeliranje mnogih prirodnih procesa, pa izučavanje njihovih svojstava ima mnogobrojne primjene u prirodi i industriji. Poznato je da, u opštem slučaju, zakoni održanja ne dozvoljavaju glatka (neprekidno-diferencijabilna) rješenja, pa se uvodi pojam slabog rješenja parcijalne diferencijalne jednačine, koji se zasnova na pojmu slabe konvergencije u Banach-ovim prostorima. Međutim, tu nastaje problem jedinstvenosti rješenja, tj. slabo rješenje skalarnog zakona održanja ne mora biti jedinstveno određeno. Zbog toga je Kružkov uveo pojam entropijskog rješenja skalarnog zakona održanja i dokazao da je entropijsko rješenje skalarnog zakona održanja skoro svuda jedinstveno. Dalje, kandidat uvodi osnovne pojmove i tvrđenja iz Teorije vjerovatnoće, kao i pojam Wiener-ovog procesa. Stohastički procesi su neizostavni u modeliranju. Budući da se u standardnim modelima ne mogu tačno predvidjeti svi događaji koji utiču na proces, stohastički procesi se koriste za modeliranje „šuma“ u modelima. Specijalno mjesto u stohastici zauzima Ito-ova teorija, koja ima važne primjene u finansijskoj matematici. Na kraju, kandidat izlaže osnovne pojmove i postulate diferencijalne geometrije i teorije mnogostrukosti.

Drugo, treće i četvrto poglavlje predstavljaju originalne rezultate kandidata, koji su objavljeni u časopisima sa SCIE liste.

U drugom poglavlju, pod nazivom *Dinamika trodimenzionog toka u poroznoj sredini*, kandidat se bavi odnosom, odnosno promjenom granice između dvije nemješljive tečnosti u poroznoj sredini. Kandidat daje model kojim se opisuje kretanje granice između fluida, i razmatra promjenu te granice u trodimenzionom slučaju.

U trećem poglavlju, pod nazivom *Skalarni zakoni održanja sa Charatheodory-jevim fluksom*, kandidat razmatra skalarne zakone održanja kod kojih fluks ima prekid. Zbog prekida u fluksu javljaju se problemi pri ispitivanju egzistencije i jedinstvenosti rješenja koje nemamo u slučaju neprekidnog fluksa, jer u tom slučaju problem nije dobro postavljen (u smislu definicije koju je dao Hadamard). Problemi ovog tipa se istražuju već dugo vremena, i kandidat je u svom radu uspio da dokaže postojanje rješenja za klasu zakona održanja sa prekidnim fluksom.

Četvrto poglavlje, pod nazivom *Jedinstvenost i egzistencija stohastičkih skalarnih zakona održanja na Riemann-ovim mnogostrukostima*, je posvećeno ispitivanju svojstava stohastičkih skalarnih zakona održanja. Kao što smo rekli, skalarni zakoni održanja u opštem slučaju ne dopuštaju klasična (neprekidno diferencijabilna rješenja), a kod stohastičkih zakona održanja situacija se još više komplikuje zbog prisustva nedeterminističkog člana. Kandidat je dao novi dokaz jedinstvenosti i egzistencije rješenja za klasu stohastičkih skalarnih zakona održanja.

2. Vrednovanje disertacije

2.1. Problem (navesti neriješena i kontraverzna mišljenja o istraživačkom problemu i dosadašnjim pokušajima rješavanja problema, rješenja do kojih su došli drugi autori, ocjenu osnove disertacije u skladu sa radovima i istraživanjima kandidata i način njihove veze sa samom disertacijom)

Centralna tema disertacije su zakoni održanja, koji se koriste za modeliranje različitih prrodnih i društvenih fenomena. Neki od primjera su tok u poroznoj sredini i tok saobraćaja. Zato je ovo je oblast koja se intenzivno razvija.

Disertacija predstavlja značajan doprinos u ovom smjeru, jer sadrži veliki broj originalnih rezultata. Kao što je navedeno, kandidat je istraživao tri problema: problem toka u poroznim sredinama, problem postojanja rješenja za skalarni zakon održanja sa prekidnim fluksom i problem postojanja i jedinstvenosti rješenja za stohastički zakon održanja na mnogostrukosti.

U prvom dijelu, odgovoreno je na pitanje formalno matematičkog opisa kretanja fluida, odnosno odnosa između nemješljivih fluida u poroznoj sredini. Time je uopšten rezultat koji je postojao za isti problem u dvije dimenzije. Napominjemo da su tehnike korišćene u dvodimenzionom i trodimenzionom slučaju značajno različite. Metod koji je razvijen u ovom dijelu disertacije je dobra osnova za moguću numeričku simulaciju trodimenzionalne dinamike dva nemješljiva fluida. Kandidat je dao strog matematički dokaz da se vrh interfejsa između dvije tečnosti u trodimenzionalnoj sredini kreće nadolje u slučaju kada je teža tečnost iznad lakše.

Drugi dio je posvećen skalarnom zakonu održanja:

$$\partial_t u + \operatorname{div}_x f(x, u) = 0$$

sa Caratheodory-jevim fluksom (fluks zadovoljava uslove A1. $f \in BV(R^d; C(R^d))$ i $\max_{\lambda \in [-M, M]} |f(x, \lambda)| \in L^{1+\sigma}_{loc}(R^d)$ i A2. $f(x, \lambda) = 0$ kada λ ne pripada (a, b) za neko $a, b \in R$). Ovo zahtijeva poznavanje i primjenu suptilnih metoda iz funkcionalne analize poput H-mjera i H-distribucija. Kandidat je uspio da preformuliše problem tako da omogući kombinaciju H-mjera i H-distribucija. To je svelo pitanje egzistencije rješenja na ispitivanje nosača pripadnih H-mjera i H-distribucija. Zahvaljujući uslovu nede degenerisanosti, kandidat je dobio da su nosači trivijalni što implicira postojanje rješenja razmatrane jednačine.

Posljednji dio disertacije je matematički najkompleksniji jer uključuje kombinaciju tri matematičke discipline: diferencijalnu geometriju, stohastičku analizu i parcijalne diferencijalne jednačine. Razmatra se Cauchy-jev problem

$$du + \operatorname{div}_g f(x, u) dt = \Phi(x, u) dW_t, \quad x \in M, t \geq 0$$

$$u_{t=0} = u_0(x) \in L^\infty(M)$$

na glatkoj, kompaktnoj, d-dimenzionalnoj mnogostrukosti (M, g) , gdje je W Wienerov process. Kandidat je formulisao jednačinu na mnogostrukosti koristeći pojam izvoda na Riemann-ovoj mnogostrukosti. Zatim je u model uveo i stohastičke elemente dodajući izvor/ponor na desnu stranu jednačine u obliku Wiener-ove mjere. Na kraju je preformulisao zakon održanja preko takozvane kinetičke formulacije i u kombinaciji sa dupliranjem promjenljivih dokazao jedinstvenost rješenja. Napominjemo da činjenica da se radi o jednačini na mnogostrukosti uz prisustvo stohastičkih elemenata značajno komplikuje analizu, i u tom smislu kandidat je pokazao značajnu tehničku vještinu u okviru date teorije. Za dokaz egzistencije, prilagođen je metod Galerkin-a, čime je problem sveden na rješavanje sistema stohastičkih diferencijalnih jednačina.

Kandidat odlično barata veoma komplikovanim matematičkim aparatom koji uključuje Ito-ovu analizu, analizu na mnogostrukostima kao i tehnike iz široke teorije zakona održanja.

2.2. Ciljevi i hipoteze disertacije

Glavni ciljevi disertacije su:

- Ispitati ponašanje interfejsa između dva nemješljiva fluida u poroznoj sredini
- Naći uslove postojanja rješenje skalarnog zakona održanja sa Caratheodory-jevim fluksom, i dokazati egzistenciju korišćenjem H-mjera i H-distribucija
- Naći kinetičku formulaciju stohastičkog zakona održanja na Riemann-ovoj mnogostrukosti
- Dokazati egzistenciju i jedinstvenost rješenja skalarnog zakona održanja na mnogostrukosti

2.3. Bitne metode koje su primijenjene u disertaciji i njihovu primjerenost. Ako je primijenjena nova ili dopunjena metoda, opišite šta je novo

Rezultati disertacije i njihovo tumačenje

Prilikom izrade disertacije kandidat je koristio različite metode iz realne i stohastičke analize.

Kod ispitivanja interfejsa između nemješljivih fluida u tri dimenzije, zbog nemogućnosti primjene funkcije toka koja je bila bitna u dvodimenzionom slučaju, primenom Green-ove formule pokazano je da pritisak može odigrati ulogu funkcije toka. U kombinaciji sa metodom karakteristika i teorijom distribucija, teorijski je opisano kretanje fluida.

Caratheodory-jeva funkcija je funkcija koja je neprekidna po jednoj, a mjerljiva po drugoj promjenljivoj. To su funkcije niske regularnosti, što značajno otežava rješavanje jednačina koje ih imaju za koeficijente. Sa druge strane, one omogućavaju da opisivanje fenomena u heterogenim sredinama, što ih čini zanimljivim za istraživanje. Kako se ne mogu primijeniti standardni metodi kod zakona održanja (poput pomjeranja promjenljivih), moraju se uvesti suštinski nove metode koje zalaze u teoriju mjere i teoriju distribucija, te Fourier-ovu analizu. Kandidat je u ovom dijelu disertacije koristio najsavremenije metode poput teorije H-mjera (prvi put uvedene 1991.) i H-distribucija (uvedene 2011.). I jedan i drugi pojam kombinuju teoriju mjere i distribucija sa teorijom Lagrange-ovih operatora množenja (Lagrange multiplier operators).

U posljednjem dijelu disertacije, kombinovane su tri različite matematičke discipline: osnove Riemann-ove geometrije na mnogostrukostima, stohastička analiza i teorija hiperboličkih parcijalnih diferencijalnih jednačina. Napominjemo da u okviru analize na mnogosturkostima divergencija se lokalno izražava preko Cristoffel-ovih simbola, što je prvi usložnjavajući moment. Osim toga, jednačina sadrži i Wiener-ov process, pa je neophodna upotreba Ito-ove teorije. Iako okvir koji uključuje i mnogostrukosti i stohastičku analizu značajno usložnjava problem, on je značajan jer omogućava modeliranje u neravnim sredinama i sa slučajnim događajima. Bitne metode korištene za dokazivanje jedinstvenosti su svođenje zakona održanja koji je u osnovi modela na takozvanu kinetičku formulaciju, dupliranje promjenljivih i standardne metode konvergencije u teoriji mjere i distribucije. Za dokazivanje egzistencije, korišćena je stohastička varijanta standardnog Galerkin-ovog metoda, u okviru kojeg se problem svede na konačno-dimenzionalni sistem stohastičkih diferencijalnih jednačina, a zatim se dokaže konvergencija ka rješenju originalnog problema.

U zaključku, kandidat je pokazao sistematičan pristup u bavljenju naučnim radom, što je potvrđeno samostalnim objavljivanjem rezultata u renomiranim naučnim časopisima.

2.4. Zaključci (usaglašenost sa rezultatima i logično izvedeno tumačenje)

Dati zaključci unutar ove doktorske disertacije su dati logičkim slijedom. Tvrdjenja su dokazana korišćenjem matematičkog aparata, a proizilaze iz jasno potkrijepljenih i obrazloženih činjenica.

3. Konačna ocjena disertacije

3.1. Usaglašenost sa obrazloženjem teme

Disertacija je u potpunosti usaglašena sa obrazloženjem teme.

3.2. Mogućnost ponovljivosti

Ponovljivost rezultata dobijenih u disertaciji je moguća, uz poštovanje metodologije i zadatih uslova.

3.3. Buduća istraživanja

Oblast disertacije je veoma plodna za dalje istraživanje, a sam problem je moguće proširiti na ispitivanje svojstava šire klase zakona održanja slabljenjem nekih uslova.

3.4. Ograničenja disertacije i njihov uticaj na vrijednost disertacije

Nema posebnih ograničenja.

Orginalni naučni doprinos

U disertaciji su predstavljeni novi metodi i rezultati u okviru determinističkih i stohastičkih zakona održanja. Istraživanje je sprovedeno u cilju konkretnog objašnjavanja prirodnih fenomena (prvi dio disertacije), kao i teorijskih rezultata za zakone održanja u determinističkom (drugi dio disertacije) i stohastičkom slučaju (treći dio disertacije). U pogledu ostvarenog naučnog doprinosa izdvajamo sljedeće:

- Matematički opis dinamike interfejsa između nemješljivih fluida.
- Dokaz egzistencije rješenja zakona održanja sa prekidnim fluksom.
- Kombinovanje H-mjera i H-distribucija.
- Postavljanje zakona održanja na mnogostrukosti sa uključenim stohastičkim fenomenima.
- Razvijanje metoda stohastičke analize u okviru skalarnih zakona održanja.
- Dokaz dobre postavljenosti Cauchy-jevog problema za skalarni zakon održanja na mnogostrukosti sa stohastičkim forsingom.

Rezultati, koji predstavljaju orginalni doprinos disertacije, su publikovani u tri samostalna rada u časopisima sa SCIE liste.

Mišljenje i prijedlog komisije

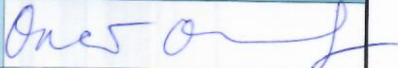
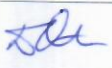
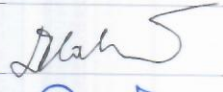
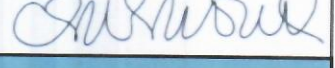
Na osnovu prethodno rečenog, Komisija konstatuje da doktorska disertacija kandidata MSc Nikole Konatara ispunjava sve formalne, pravne i suštinske uslove, kao i sve kriterijume koji se primjenjuju prilikom vrednovanja doktorske disertacije. Komisija smatra da doktorska disertacija ima orginalni naučni doprinos, koji se ogleda u teorijskom doprinosu teoriji determinističkih i stohastičkih zakona održanja.

Imajući u vidu kvalitet ostvarenih rezultata, Komisija sa zadovoljstvom predlaže Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta i Senatu Univerziteta Crne Gore da prihvati doktorsku disertaciju pod nazivom „*Zakoni održanja u okviru stohastičkih i determinističkih modela*“ kandidata MSc Nikole Konatara i odobri njenu javnu odbranu.

Izdvojeno mišljenje

(popuniti ukoliko neki član komisije ima izdvojeno mišljenje)

Ime i prezime

Napomena	
(popuniti po potrebi)	
KOMISIJA ZA OCJENU DOKTORSKE DISERTACIJE	
Prof. dr Oleg Obradović, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Crna Gora	
Prof. dr Darko Mitrović, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Crna Gora	
Prof. dr David Kalaj, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Crna Gora	
Docent dr Goran Popivoda, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Crna Gora	
Prof. dr Sanja Konjik, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Srbija	
Datum i ovjera (pečat i potpis odgovorne osobe)	
U Podgorici, 28.10.2022.	
MP	DEKAN