

VIJEĆU PRIRODNO-MATEMATIČKOG FAKULTETA I SENATU UNIVERZITETA CRNE GORE

PREDMET: Ocjena doktorske disertacije Nikole Konatara

Na sjednici Senata Univerziteta Crne Gore održanoj 16.9.2022. godine imenovana je Komisija u sastavu: dr Oleg Obradović, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore, dr David Kalaj, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore, dr Goran Popivoda, docent Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore, dr Sanja Konjik, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu i dr Darko Mitrović, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore, čiji je zadatak da ocijeni i pregleda doktorsku disertaciju pod nazivom „*Zakoni održanja u okviru stohastičkih i determinističkih modela*“ kandidata MSc Nikole Konatara.

Komisija je pregledala tekst disertacije i Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta i Senatu Univerziteta Crne Gore podnosi sljedeći

IZVJEŠTAJ

Pregled disertacije: Kandidat MSc Nikola Konatar je 2016. godine upisao doktorske studije matematike. Položio je sve ispite koji su predviđeni Planom doktorskih studija koji su usvojeni na Prirodno-matematičkom fakultetu u Podgorici. Nakon uspješne odbrane polaznih istraživanja 2020. godine, odobrena mu je izrada doktorske disertacije sa temom „*Zakoni održanja u okviru stohastičkih i determinističkih modela*“.

U doktorskoj disertaciji, kandidat istražuje svojstva zakona održanja u okviru nekoliko determinističkih i stohastičkih modela. Preciznije, kandidat istražuje tri problema: kretanje granice između nemešljivih fluida, postojanje rješenja za zakon održanja sa prekidnim fluksom (takozvanim Caratheodory-jevim fluksom), i postojanje i jedinstvenost rješenja za stohastički skalarni zakon održanja na Riemann-ovoj mnogostrukosti. U nastavku je dat detaljan prikaz disertacije.

Disertacija se sastoji iz četiri poglavlja. U prvom, uvodnom poglavlju kandidat je izložio dio matematičkog aparata potrebnog za rad na zadacima disertacije. Budući da su problemi kojima se kandidat bavi zahtijevaju znanje iz oblasti Funkcionalne analize, Parcijalnih diferencijalnih jednačina, Diferencijalne geometrije i Stohastike, posebno Ito-ove teorije, dati su osnovni pojmovi i tvrđenja vezani za potrebne oblasti, radi kompletnosti disertacije. Iz Funkcionalne analize kandidat daje osvrt na Banach-ove prostore, koji zauzimaju bitno mjesto u matematici, linearne operatore, kao i pojmove dualnog prostora i različite tipove konvergencije u Banach-ovim prostorima. Nakon toga kandidat daje pregled teorije vezane za Skalarnе zakone održanja (parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda). Skalarni zakoni održanja se koriste za modeliranje mnogih prirodnih procesa, pa izučavanje njihovih svojstava ima mnogobrojne primjene u

industriji. Poznato je da, u opštem slučaju, zakoni održanja ne dozvoljavaju glatka (neprekidno-diferencijabilna) rješenja, pa se uvodi pojam slabog rješenja parcijalne diferencijalne jednačine, koji se zasnovan na pojmu slabe konvergencije u Banach-ovim prostorima. Međutim, tu nastaje problem jedinstvenosti rješenja, tj. slabo rješenje skalarnog zakona održanja ne mora biti jedinstveno određeno. Zbog toga je Kružkov uveo pojam entropijskog rješenja skalarnog zakona održanja i dokazao da je entropijsko rješenje skalarnog zakona održanja skoro svuda jedinstveno. Dalje, kandidat uvodi osnovne pojmove i tvrđenja iz Teorije vjerovatnoće, kao i pojam Wiener-ovog procesa. Stohastički procesi su neizostavni u modeliranju. Budući da se u standardnim modelima ne mogu tačno predvidjeti svi događaji koji utiču na proces, stohastički procesi se koriste za modeliranje „šuma“ u modelima. Specijalno mjesto u stohastici zauzima Ito-ova teorija, koja ima važne primjene u finansijskoj matematici. Na kraju, kandidat izlaže osnovne pojmove i postulate diferencijalne geometrije i teorije mnogostrukosti.

Drugo, treće i četvrto poglavlje predstavljaju originalne rezultate kandidata, koji su objavljeni u časopisima sa SCIE liste.

U drugom poglavlju, pod nazivom *Dinamika trodimenzionog toka u poroznoj sredini*, kandidat se bavi odnosom, odnosno promjenom granice između dvije nemješljive tečnosti u poroznoj sredini. Kandidat daje model kojim se opisuje kretanje granice između fluida, i razmatra promjenu te granice u trodimenzionom slučaju.

U trećem poglavlju, pod nazivom *Skalarni zakoni održanja sa Charatheodory-jevim fluksom*, kandidat razmatra skalarne zakone održanja kod kojih fluks ima prekid. Zbog prekida u fluksu javljaju se problemi pri ispitivanju egzistencije i jedinstvenosti rješenja koje nemamo u slučaju neprekidnog fluksa, jer u tom slučaju problem nije dobro postavljen (u smislu definicije dobre postavljenosti koju je dao Hadamard). Problemi ovog tipa se istražuju već dugo vremena, i kandidat je u svom radu uspio da dokaže postojanje rješenja za klasu zakona održanja sa prekidnim fluksom.

Četvrto poglavlje, pod nazivom *Jedinstvenost i egzistencija stohastičkih skalarnih zakona održanja na Riemann-ovim mnogostrukostima*, je posvećeno ispitivanju svojstava stohastičkih skalarnih zakona održanja. Kao što smo rekli, skalarni zakoni održanja u opštem slučaju ne dopuštaju klasična (neprekidno diferencijabilna rješenja), a kod stohastičkih zakona održanja situacija se još više komplikuje zbog prisustva nedeterminističkog člana. Kandidat je dao novi dokaz jedinstvenosti i egzistencije rješenja za klasu stohastičkih skalarnih zakona održanja.

Vrednovanje disertacije: Centralna tema disertacije su zakoni održanja, koji se koriste za modeliranje različitih prorodnih i društvenih fenomena. Neki od primjera su tok u poroznoj sredini i tok saobraćaja. Zato je ovo je oblast koja se intenzivno razvija.

Disertacija predstavlja značajan doprinos u ovom smjeru, jer sadrži veliki broj originalnih rezultata. Kao što je navedeno, kandidat je istraživao tri problema: problem toka u poroznim sredinama, problem postojanja rješenja za skalarni zakon održanja sa prekidnim fluksom i problem postojanja i jedinstvenosti rješenja za stohastički zakon održanja na mnogostrukosti.

U prvom dijelu, odgovoreno je na pitanje formalno matematičkog opisa kretanja fluida, odnosno odnosa između nemješljivih fluida u poroznoj sredini. Time je uopšten rezultat koji je postojao za isti problem u dvije dimenzije. Napominjemo da su tehnike korišćene u dvodimenzionom i trodimenzionom slučaju značajno različite. Metod koji je razvijen u ovom dijelu disertacije je dobra osnova za moguću numeričku simulaciju trodimenzionalne dinamike dva nemješljiva fluida. Kandidat je dao strog matematički dokaz da se vrh interfejsa između dvije tečnosti u trodimenzionalnoj sredini kreće nadolje u slučaju kada je teža tečnost iznad lakše.

Drugi dio je posvećen skalarnom zakonu održanja:

$$\partial_t u + \operatorname{div}_x f(x, u) = 0$$

sa Caratheodory-jevim fluksom (fluks zadovoljava uslove A1. $f \in BV(R^d; C(R^d))$ i $\max_{\lambda \in [-M, M]} |f(x, \lambda)| \in L_{loc}^{1+\sigma}(R^d)$ i A2. $f(x, \lambda) = 0$ kada λ ne pripada (a, b) za neko $a, b \in R$). Ovo zahtijeva poznavanje i primjenu suptilnih metoda iz funkcionalne analize poput H-mjera i H-distribucija. Kandidat je uspio da preformuliše problem tako da omogući kombinaciju H-mjera i H-distribucija. To je svelo pitanje egzistencije rješenja na ispitivanje nosača pripadnih H-mjera i H-distribucija. Zahvaljujući uslovu nedegenerisanosti, kandidat je dobio da su nosači trivijalni što implicira postojanje rješenja razmatrane jednačine.

Posljednji dio disertacije je matematički najkompleksniji jer uključuje kombinaciju tri matematičke discipline: diferencijalnu geometriju, stohastičku analizu i parcijalne diferencijalne jednačine. Razmatra se Cauchy-jev problem

$$du + \operatorname{div}_g f(x, u) dt = \Phi(x, u) dW_t, \quad x \in M, t \geq 0$$

$$u_{t=0} = u_0(x) \in L^\infty(M)$$

na glatkoj, kompaktnoj, d-dimenzionalnoj mnogostrukosti (M, g) , gdje je W Wienerov process. Kandidat je formulisao jednačinu na mnogostrukosti koristeći pojam izvoda na Riemann-ovoj mnogostrukosti. Zatim je u model uveo i stohastičke elemente dodajući izvor/ponor na desnu stranu jednačine u obliku Wiener-ove mjere. Na kraju je preformulisao zakon održanja preko takozvane kinetičke formulacije i u kombinaciji sa dupliranjem promjenljivih dokazao jedinstvenost rješenja. Napominjemo da činjenica da se radi o jednačini na mnogostrukosti uz prisustvo stohastičkih elemenata značajno komplikuje analizu, i u tom smislu kandidat je pokazao značajnu tehničku vještinu u okviru date teorije. Za dokaz egzistencije, prilagođen je metod Galerkin-a, čime je problem sveden na rješavanje sistema stohastičkih diferencijalnih jednačina.

Kandidat odlično barata veoma komplikovanim matematičkim aparatom koji uključuje Ito-ovu analizu, analizu na mnostrukostima kao i tehnike iz široke teorije zakona održanja.

Zaključak: Prilikom izrade disertacije kandidat je koristio različite metode iz realne i stohastičke analize.

Kod ispitivanja interfejsa između nemješljivih fluida u tri dimenzije, zbog nemogućnosti primjene funkcije toka koja je bila bitna u dvodimenzionom slučaju, primjenom Green-ove

formule pokazano je da pritisak može odigrati ulogu funkcije toka. U kombinaciji sa metodom karakteristika i teorijom distribucija, teorijski je opisano kretanje fluida.

Caratheodory-jeva funkcija je funkcija koja je neprekidna po jednoj, a mjerljiva po drugoj promjenljivoj. To su funkcije niske regularnosti, što značajno otežava rješavanje jednačina koje ih imaju za koeficijente. Sa druge strane, one omogućavaju da opisivanje fenomena u heterogenim sredinama, što ih čini zanimljivim za istraživanje. Kako se ne mogu primijeniti standardni metodi kod zakona održanja (poput pomjeranja promjenljivih), moraju se uvesti suštinski nove metode koje zalaze u teoriju mjere i teoriju distribucija, te Fourier-ovu analizu. Kandidat je u ovom dijelu disertacije koristio najsavremenije metode poput teorije H-mjera (prvi put uvedene 1991.) i H-distribucija (uvedene 2011.). I jedan i drugi pojam kombinuju teoriju mjere i distribucija sa teorijom Lagrange-ovih operatora množenja (Lagrange multiplier operators).

U posljednjem dijelu disertacije, kombinovane su tri različite matematičke discipline: osnove Riemann-ove geometrije na mnogostrukostima, stohastička analiza i teorija hiperboličkih parcijalnih diferencijalnih jednačina. Napominjemo da u okviru analize na mnogosturkostima divergencija se lokalno izražava preko Cristoffel-ovih simbola, što je prvi usložnjavajući moment. Osim toga, jednačina sadrži i Wiener-ov process, pa je neophodna upotreba Ito-ove teorije. Iako okvir koji uključuje i mnogostrukosti i stohastičku analizu značajno usložnjava problem, on je značajan jer omogućava modeliranje u neravnim sredinama i sa slučajnim događajima. Bitne metode korištene za dokazivanje jedinstvenosti su svođenje zakona održanja koji je u osnovi modela na takozvanu kinetičku formulaciju, dupliranje promjenljivih i standardne metode konvergencije u teoriji mjere i distribucije. Za dokazivanje egzistencije, korišćena je stohastička varijanta standardnog Galerkin-ovog metoda, u okviru kojeg se problem svede na konačno-dimenzionalni sistem stohastičkih diferencijalnih jednačina, a zatim se dokaže konvergencija ka rješenju originalnog problema.

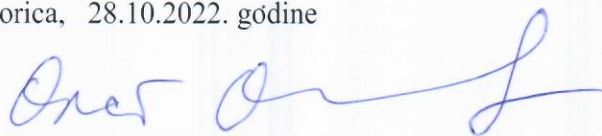
U zaključku, kandidat je pokazao sistematičan pristup u bavljenju naučnim radom, što je potvrđeno samostalnim objavljivanjem rezultata u renomiranim naučnim časopisima.

Na osnovu prethodno rečenog, Komisija konstatuje da doktorska disertacija kandidata MSc Nikole Konatara ispunjava sve formalne, pravne i suštinske uslove, kao i sve kriterijume koji se primjenjuju prilikom vrednovanja doktorske disertacije. Komisija smatra da doktorska disertacija ima originalni naučni doprinos, koji se ogleda u teorijskom doprinosu teoriji determinističkih i stohastičkih zakona održanja.

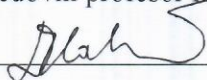
Imajući u vidu kvalitet ostvarenih rezultata, Komisija sa zadovoljstvom predlaže Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta i Senatu Univerziteta Crne Gore da prihvati doktorsku disertaciju pod nazivom „*Zakoni održanja u okviru stohastičkih i determinističkih modela*“ kandidata MSc Nikole Konatara i odobri njenu javnu odbranu.

Podgorica, 28.10.2022. godine

KOMISIJA:



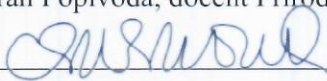
dr Oleg Obradović, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore



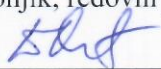
dr David Kalaj, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore



dr Goran Popivoda, docent Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore



dr Sanja Konjik, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu



dr Darko Mitrović, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore