

UNIVERZITET CRNE GORE
Prirodno-matematički fakultet

Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta

PREDMET: Izvještaj Komisije o ocjeni master rada pod nazivom *Prilagođavanje i mutacije u ponovljenim igrama sa konačnim skupom strategija* kandidatkinje Nade Milašinović.

Na sjednici Vijeća Prirodno-matematičkog fakulteta održanoj 31.05.2022. godine određena je Komisija za pregled i ocjenu master rada kandidatkinje Nade Milašinović pod naslovom: „Prilagođavanje i mutacije u ponovljenim igrama sa konačnim skupom strategija” u sastavu: prof. dr Vladimir Jaćimović (redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore), prof. dr Nevena Mijajlović (vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore) i prof. dr Marijan Marković (vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore).

Komisija je detaljno pregledala master rad i na osnovu toga podnosi Vijeću sljedeći

IZVJEŠTAJ

I Podaci o master radu

Master rad Nade Milašinović pod navedenim naslovom napisan je na 65 stranica kucanog teksta formata A4 i podijeljen je na šest poglavlja: Uvod (1 stranica), Osnovni pojmovi i zadaci teorije igara (5 stranica), Primjeri nekooperativnih igara (24 stranice), Mutacije u ponovljenim igrama (21 stranica), Hopfova bifurkacija u igri papir-kamen-makaze (13 stranica), Zaključak (1 stranica). Na kraju se nalazi spisak literature od 15 referenci koje su korišćene prilikom izrade ovog rada. U radu se nalaze 2 tabele i 15 slika.

Uvod sadrži nekoliko opštih rečenica o matematičkoj teoriji igara, posle čega je dat kratak pregled rada po poglavljima. U drugom poglavlju su uvedeni pojmovi gornje i donje granice vrijednosti igre i Nešove ravnoteže. Navedeni su primjeri nekooperativnih igara (detaljnije su opisane klasične igre „dilema zatvorenika“ i „papir-kamen-makaze“). Zatim su uvedene ponovljene igre i pojam evolucionarno stabilnih strategija. Nakon toga je objašnjen osnovni dinamički model u evolucionarnoj teoriji igara – to su replikatorske jednačine. Konačno, u drugom poglavlju su uvedeni osnovni pojmovi dinamičkih sistema (ravnoteža i stabilnost po Ljapunovu),

kao i njihova primjena na analizu replikatorskih jednačina. U trećem poglavlju je objašnjen efekat mutacija u evolucionarnim igrama, kao i matematički formalizam kojim se te mutacije opisuju. Takođe, u ovom poglavlju se detaljno objašnjavaju bifurkacije u dinamičkim sistemima. Opšta matematička teorija bifurkacija se dalje primjenjuje na replikatorsku dinamiku u evolucionarnim igrama sa posebnim osvrtom na igru „papier-kamen-makaze“ u četvrtom poglavlju. Konačno, u zaključku se kratko diskutuje pojam igre u svakodnevnom jeziku i njegov odnos sa matematičkom teorijom igara.

II Predmet istraživanja

Predmet istraživanja ovog master rada su evolucionarne igre sa konačnim brojem strategija. Posebno je razmatrana replikatorska dinamika koja opisuje process evolucije u ponovljenim igrama. U svom osnovnom obliku, replikatorska dinamika opisuje samo process prirodne selekcije (vrste koje imaju veći *fitness*, tj. prilagođenost će zauzimati više prostora na račun onih vrsta koje imaju manji *fitness* u datom momentu). Međutim, osnovna replikatorska dinamika koja uključuje samo process prirodne selekcije ima brojna ograničenja. Između ostalog, ona je “neinovativna”, jer je prirodna selekcija zasnovana isključivo na kopiranju uspješnijih strategija. Tako, ukoliko neka strategija ne postoji u datoj populaciji, ona se nikad neće pojaviti, bez obzira koliko je potencijalno uspješna. Za potpuniji opis evolucionarnih procesa u osnovne replikatorske jednačine je potrebno dodati još neke efekte. Najvažniji od tih efekata su mutacije koje se mogu slučajno pojaviti o okviru neke populacije. Potencijalno, mutacije mogu dovesti do stvaranja veoma uspješnih, ranije nepoznatih, strategija.

Posebna pažnja je posvećena jednom paradigmatičnom primjeru u evolucionarnoj teoriji igara. To je igra papier-kamen-makaze koja je dobro poznata iz svakodnevnog života. Ovo se može posmatrati kao igra tri biološke vrste sa cikličnom dominacijom (prva vrsta je snažnija od druge, druga od treće, a treća od prve).

Izučavan je efekat mutacija na stabilnost evolucionarno stabilnih strategija i pojavu bifurkacija u igri papier-kamen-makaze.

III Ciljevi istraživanja

Osnovni ciljevi istraživanja su efekat mutacija na pojavu bifurkacija u evolucionarnim igrama sa konačnim skupom strategija. Budući da je ovo suviše zahtjevan zadatak, istraživanje se fokusira na igru papier-kamen-makaze, koja ima tri strategije (tj. vrste) i specifičan sistem interakcija između vrsta.

IV Dobijeni rezultati i njihov značaj

Elegantni matematički rezultati za ponavljanu igru papir-kamen-makaze sa mutacijama se mogu dobiti samo uz dodatnu pretpostavku da su mutacije globalne, što znači da su sve mutacije rijetke i jednako vjerovatne. Drugim riječima, kamen sa jednakom vjerovatnoćom može mutirati u papir i makaze, sa istom vjerovatnoćom papir mutira u kamen ili makaze, a isto važi i za mutacije makaza. U ovom slučaju se, za određenu malu vrijednost ove vjerovatnoće, javlja tzv. Hopfova bifurkacija u položaju ravnoteže ($1/3, 1/3, 1/3$). Ovo znači da pri određenoj vrijednosti parametra položaj ravnoteže u kojoj su sve tri vrste jednako zastupljene (i imaju jednake vrijednosti *fitness* funkcije) gubi stabilnost i događa se interesantna periodička dinamika oko ovog položaja ravnoteže. Dakle, u jednom trenutku će kamen biti malo brojniji od druge dvije vrste, što će dovesti do smanjenja njegove *fitness* funkcije, što će dalje dovesti da se udio kamena u populaciji smanji, dok će nakratko preovladati papir, pa će dalje preovladati makaze i dalje u krug.

Iako je ovaj rezultat poznat od ranije (može se naći, npr, u referenci [15]), kandidatkinja je uradila neka dodatna izračunavanja koja se tiču kritičnosti Hopfove bifurkacije. Takođe, razmatran je model u kome mutacije nisu globalne, nego kamen može mutirati samo u makaze. Za ovaj model je veoma teško dobiti analitička rješenja i naći kritične vrijednosti parametra.

IV Mišljenje i zaključak Komisije

Na osnovu prethodno navedenog, uz mišljenje da je rad napisan jezički i matematički korektno, Komisija smatra da master rad Nade Milašinić pod nazivom *Prilagođavanje i mutacije u ponovljenim igrama sa konačnim skupom strategija* ispunjava uslove i kriterijume predviđene Pravilima studiranja na master studijama.

Stoga, Komisija predlaže Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta da rad prihvati i odobri javnu odbranu master rada.

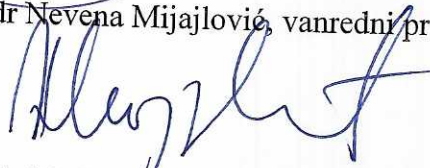
U Podgorici, 30. 05. 2023. godine

KOMISIJA:

dr Vladimir Jaćimović, redovni profesor PMF-a, mentor



dr Nevena Mijajlović, vanredni profesor PMF-a, član



dr Marijan Marković, vanredni profesor PMF-a, član

