

UNIVERZITET CRNE GORE
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DOKTORSKE STUDIJE

UNIVERZITET CRNE GORE
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
Broj 2023/01-1955
Podgorica, 22. 09. 2023. 20 god.

VIJEĆU PRIRODNO-MATEMATIČKOG FAKULTETA

Predmet: Izvještaj o ocjeni doktorske disertacije i predlog Komisije za odbranu doktorske disertacije

U skladu sa članom 41, stav 11, Pravila doktorskih studija, Komisija za ocjenu doktorske disertacije imenovana odlukom Senata na sjednici održanoj 23. 6. 2023. godine, dostavila je 19. 7. 2023. god. **Izvještaj o ocjeni doktorske disertacije** pod nazivom „**Granična svojstva kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru**“ kandidata **mr Antona Đokaja**.

Na osnovu člana 42 Pravila doktorskih studija, Izvještaj komisije i doktorska disertacija stavljeni su na uvid javnosti u Centralnoj univerzitetskoj biblioteci dana 20. 7. 2023. godine.

U predviđenom roku od 15 dana nije bilo primjedbi javnosti.

Komisija za doktorske studije PMF-a prosljeđuje na razmatranje Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta dostavljeni Izvještaj i podnosi

P R E D L O G

sastava **Komisije za odbranu disertacije**

1. **Dr Darko Mitrović**, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore
2. **Dr Miodrag Mateljević**, redovni profesor Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu
3. **Dr Đordije Vujadinović**, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore
4. **Dr Marijan Marković** vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore
5. **Dr David Kaljaj**, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore

Podgorica, 22. 9. 2023. god.

ZA KOMISIJU ZA DOKTORSKE STUDIJE

Goran Popivoda




Univerzitet Crne Gore
Centralna univerzitetska biblioteka
adresa / address Cetinjska br. 2
81000 Podgorica, Crna Gora
telefon / phone 00382 20 414 245
fax 00382 20 414 259
mail cub@ucg.me
web www.ucg.ac.me
Central University Library
University of Montenegro

Broj / Ref 01/G-16-3361/6
Datum / Date 28.08.2023

Crna Gora
UNIVERZITET CRNE GORE
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Broj _____

Podgorica, _____ 20____ god.

UNIVERZITET CRNE GORE
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Dekan
Prof. dr Miljan Bigović

Poštovani profesore Bigoviću,

U prilogu akta dostavljamo Vam doktorsku disertaciju mr **Antona Đokaja** pod naslovom: „**Granična svojstva kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru**“ i Izvještaj o ocjeni doktorske disertacije koji su u skladu sa članom 42 stav 3 Pravila doktorskih studija dostavljeni **Centralnoj univerzitetskoj biblioteci** 20. 07. 2023. godine, na uvid i ocjenu javnosti.

Na navedeni rad nije bilo primjedbi javnosti u predviđenom roku od 15 dana.

Molimo Vas da nam nakon odbrane, a u skladu sa članom 47 Pravila doktorskih studija, dostavite konačnu verziju doktorske disertacije.

S poštovanjem,



DIREKTOR


mr Bosiljka Ciemil

Pripremila:

Milica Barac 
Administrativna asistentkinja
Tel: 020 414 245
e-mail: cub@ucg.ac.me

VIJEĆU PRIRODNO-MATEMATIČKOG FAKULTETA I

SENATU UNIVERZITETA CRNE GORE

PREDMET: Ocjena doktorske disertacije Antona Gjokaja

Na sjednici Senata Univerziteta Crne Gore održanoj 23.06.2023. godine imenovana je Komisija u sastavu: dr Darko Mitrović, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore, dr David Kalaj, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore, dr Miodrag Mateljević, redovni profesor Matematičkog fakulteta u Beogradu, dr Đorđije Vujađinović, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore i dr Marijan Marković, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore čiji je zadatak da ocijeni i pregleda doktorsku disertaciju pod nazivom "*Granična svojstva kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru*" kandidata MSc Antona Gjokaja.

Komisija je pregledala tekst disertacije i Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta i Senatu Univerziteta Crne Gore podnosi sljedeći

IZVJEŠTAJ

Pregled disertacije

Kandidat MSc Anton Gjokaj je 2019. godine upisao doktorske studije matematike. Položio je sve ispite koji su predviđeni Planom doktorskih studija koji su usvojeni na Prirodno-matematičkom fakultetu u Podgorici. Nakon uspješne odbrane polaznih istraživanja 2022. godine, odobrena mu je izrada doktorske disertacije "*Granična svojstva kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru*".

U ovoj doktorskoj disertaciji kandidat ispituje Lipschitz i Hölder neprekidnost kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja iz jedinične lopte $B \subset \mathbb{R}^n$ u prostornu oblast i generalizuje poznate rezultate iz ravni.

Disertacija se sastoji od rezimea, abstracta na engleskom jeziku, predgovora, tri glave, 12 slika, spiska specijalnih oznaka i spiska literature.

Prve dvije glave imaju uvodni karakter i sadrže poznate rezultate koje se odnose na teoriju Laplaceove i Poissonove jednačine (prva glava), odnosno kvazikonformnih preslikavanja (druga glava). Rezultati su ilustrovani dodatnim primjerima i djelimično prikazani na originalan način zbog potrebnih modifikacija koje se odnose na rezultate istraživanja.

Prva glava je posvećena rješavanju Dirichletovog problema za jediničnu loptu B i odgovarajućeg nehomogenog Dirichletovog problema za loptu, odnosno rješavanju Poissonove parcijalne diferencijalne jednačine u slabom smislu. Prvo su uvedena harmonijska preslikavanja, dokazana je Greenova reprezentacija a zatim razmatran Dirichletov problem za loptu i nehomogeni Dirichletov problem u slabom smislu.

U drugoj glavi je izložen pregled osnovnih pojmova iz teorije kvazikonformnih preslikavanja u prostoru. Najprije je dat geometrijski pristup kroz formulaciju pojma modula krivih, a zatim i analitički pristup, uz dokaz osnovnih svojstva i uz dodatne primjere. U drugom djelu ove glave, izučavajući modul krivih, odnosno utvrdeći njegova svojstva i posmatrajući familije krivih koje spajaju komponente povezanosti Grötzschovog i Teichmüllerovog prstena, dat je dokaz Morijeve teoreme za kvazikonformna preslikavanja iz B u B , koje centar slikaju u sebe. Ovim dobro poznatim rezultatom se obezbjeđuje α -Hölder neprekidnost preslikavanja, za $\alpha = \frac{1}{1-n}$, sa Hölder koeficijentom koji zavisi samo od K .

Treća glava predstavlja dokaze hipoteza doktorske disertacije, originalne rezultate kandidata koji su objavljeni u časopisima sa SCIE liste. Uopštena je Hardy-Littlewood teorema i za prostor, kroz dvije različite verzije. U slučaju kada je slika prostorna oblast sa $C^{1,\alpha}$ granicom, Lipschitz neprekidnost je dokazana i u slučaju kvazikonformnih preslikavanja koja su harmonijska, i u slučaju kada se uslov harmoničnosti (da je Laplasijan jednak nula) zamijeni uslovom da je Laplasijan iz L^p prostora. U slučaju kada kodomen je prostorna oblast sa C^1 granicom, ukazano je na primjere zbog kojih ne važi Lipschitz neprekidnost i dokazana je Hölder neprekidnost sa uniformnim koeficijentom za tu familiju preslikavanja.

Vrednovanje disertacije

Centralna tema ove disertacije je ispitivanje modula neprekidnosti kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja iz jedinične lopte prostora u oblast sa granicom određene glatkosti.

Imajući u vidu da analitička preslikavanja u ravni su i harmonijska, finski matematičar O. Martio je prvi izučavao kvazikonformna harmonijska preslikavanja kao generalizaciju analitičkih preslikavanja u ravni. Od tada problem Hölder i Lipschitz neprekidnosti kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja između oblasti u ravni sa unaprijed zadatim svojstvima izazvao je veliko interesovanje matematičara.

Bitan trenutak u intenzitetu razvoja ove oblasti predstavlja rad M. Pavlovića iz 2002. godine, gdje je između ostalog dokazano da kvazikonformna harmonijska preslikavanja iz jediničnog diska D u sebe su bi-Lipschitz neprekidna. Nakon toga, niz matematičara (D. Kalaj, M. Mateljević, K. Astala, D. Partyka, M. Arsenović itd.) se posvetio radu na ovoj temi i dobijeni su interesantni rezultati kroz uopštavanje rezultata na razne oblasti u ravni (na primjer između oblasti sa granicama $C^{1,\alpha}$ glatkosti, odnosno oblasti sa granicama

C^1 glatkosti) ili kroz olakšavanje uslova harmoničnosti funkcije (Laplasijan funkcije pripada nekom integrabilnom prostoru).

Međutim, osjetno manje ima analognih rezultata u prostoru ($u \in R^n$, za $n \geq 3$), naročito zbog nedostatka tehnika iz kompleksne analize (svako harmonijsko preslikavanje u ravni se može napisati kao zbir analitičke i antianalitičke funkcije). Ovom disertacijom se uopštavaju rezultati iz ravni u prostor R^n , a u nekim slučajevima i poboljšavaju postojeći oslabljenjem uslova glatkosti na granici slike. Stoga, disertacija predstavlja značajan doprinos u izučavanju graničnih svojstva kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja. Kandidat odlično barata veoma komplikovanim matematičkim aparatom koji uključuje Poissonov integral i modul krivih, i koristi interesantne matematičke tehnike i pristupe u dokazivanju teorema.

Zaključak: Prilikom izrade disertacije kandidat je koristio različite metode realne analize.

Značajnu ulogu u dokazivanju rezultata disertacije ima Hardy-Littlewood teorema, koja je u ovoj disertaciji uopštena za harmonijske funkcije iz jedinične lopte B prostora R^n . Teorema daje vezu između koeficijenta μ -Hölder neprekidnosti na sferi u odnosu na tačku $\eta \in S$ harmonijske funkcije $u = u(x)$, tj.

$$\sup_{\xi \in S, \xi \neq \eta} \frac{\|u(\eta) - u(\xi)\|}{\|\eta - \xi\|^\mu} \quad (1)$$

i vrijednosti

$$\sup_{x \in [0, \eta)} (1 - \|x\|)^{1-\mu} \|\nabla u(x)\|. \quad (2)$$

Konkretno, ovom teoremom se dokazuje direktna zavisnost (ekvivalencija) između ograničenosti jedne i druge vrijednosti. Dokaz je izveden primjenom Poissonovog integrala. Naime, svaka funkcija $u: \overline{B} \subset R^n \rightarrow R$, gdje je u harmonijska u jediničnoj lopti B , a neprekidna u $\overline{B} = B \cup S$, se može predstaviti u sljedećem obliku

$$u(x) = \int_S \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - \xi\|^n} u(\xi) d\sigma(\xi),$$

gdje je σ normalizovana površinska mjera na S .

Osim navedene generalizacije Hardy-Littlewood teoreme, dokazana je i odgovarajuća verzija teoreme u slučaju da je $\mu > 1$. Ako za fiksirano $\eta \in S$, važi nejednakost

$$\|u(\eta) - u(\xi)\| \leq M \|\eta - \xi\|^\mu, \quad \text{za } \xi \in S,$$

onda je $\|\nabla u(x)\| \leq C$, za x iz duži $[0, \eta)$, gdje je C konstanta koja zavisi samo od μ i M .

Dakle, teorema donosi ekvivalenciju između dva uslova, pri čemu jedan se odnosi na sferu, a drugi na unutrašnjost lopte B . Način na koji se ta veza koristi predstavlja glavni momenat u dokazu rezultata (1) i (3). Naime, kandidat koristi jednu zanimljivu tehniku koja omogućava sukcesivno poboljšanja Hölder neprekidnosti u jediničnoj lopti B , imajući kao bazni slučaj β -Hölder neprekidnost koje se dobija primjenom Morijeve teoreme. Koristeći uslov $C^{1,\alpha}$ granice kodomena, granica kodomena se može lokalno predstaviti kao grafik $C^{1,\alpha}$ funkcije. To omogućava da n -ta koordinata funkcije f u odnosu na jednu fiksiranu tačku bude $(1 + \alpha)\beta$ -Hölder neprekidna u S , što na osnovu pomenute Hardy-Littlewood teoreme daje ograničenost vrijednosti (2). Koristeći kvazikonformnost preslikavanja f tu nejednakost kandidat prvo prenosi i na ostale koordinate funkcije f , a koristeći pogodne izometrije i na sve ostale tačke iz jedinične lopte. U tom momentu, Hardy-Littlewood teorema daje $(1 + \alpha)\beta$ -Hölder neprekidnost preslikavanja u čitavoj lopti. Sukcesivnom primjenom ovog postupka, kandidat dobija da je f μ -Hölder neprekidno za sve $\mu \in (0,1)$. Prelazak iz Hölder neprekidnosti u Lipschitz neprekidnost je ostvaren na analogan način kao za preostale iteracije, osim što se u tom slučaju koristi Hardy-Littlewood teorema za slučaj $\mu > 1$.

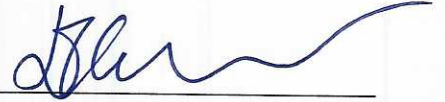
U zaključku, kandidat je pokazao sistematičan pristup u bavljenju naučnim radom, što je potvrđeno i objavljivanjem naučnih radova.

Na osnovu prethodnog, Komisija konstatuje da doktorska disertacija kandidata MSc Antona Gjokaja ispunjava sve formalne, pravne i suštinske uslove, kao i sve kriterijume koji se primjenjuju prilikom vrednovanja doktorske disertacije. Komisija smatra da doktorska disertacija ima originalni naučni doprinos, koji se ogleda u teorijskom doprinosu teoriji kvazikonformnih i harmonijskih preslikavanja.

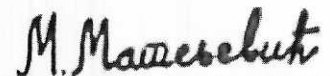
Imajući u vidu kvalitet ostvarenih rezultata, Komisija sa zadovoljstvom predlaže Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta i Senatu Univerziteta Crne Gore da prihvati doktorsku disertaciju pod nazivom "*Granična svojstva kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru*" kandidata MSc Antona Gjokaja i odobri njenu javnu odbranu.



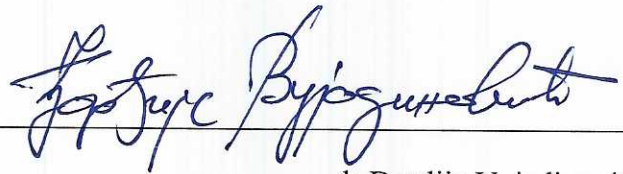
dr Darko Mitrović,
redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore



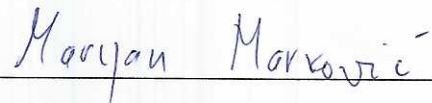
dr David Kalaj,
redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore



dr Miodrag Mateljević,
redovni profesor Matematičkog fakulteta u Beogradu



dr Đorđije Vujadinović,
vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore



dr Marijan Marković,
vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore

OCJENA DOKTORSKE DISERTACIJE

OPŠTI PODACI O DOKTORANDU		
Titula, ime i prezime	MSc Anton Gjokaj	
Fakultet	Prirodno-matematički fakultet	
Studijski program	Matematika	
Broj indeksa	2/19	
MENTOR/MENTORI		
Prvi mentor	Prof. dr David Kalaj	Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Crna Gora
Drugi mentor	-	-
KOMISIJA ZA OCJENU DOKTORSKE DISERTACIJE		
Prof. dr Darko Mitrović	Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Crna Gora	
Prof. dr David Kalaj	Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Crna Gora	
Prof. dr Miodrag Mateljević	Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Srbija	
Prof. dr Marijan Marković	Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Crna Gora	
Prof. dr Đorđije Vujadinović	Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Crna Gora	
Datum značajni za ocjenu doktorske disertacije		
Doktorska disertacija i Izvještaj Komisije dostavljen Biblioteci UCG		
Javnost informisana (dnevne novine) da su Doktorska disertacija i Izvještaj Komisije dati na uvid		
Sjednica Senata na kojoj je izvršeno imenovanje Komisije za ocjenu doktorske disertacije	23.06.2023.	
Uvid javnosti		
U predviđenom roku za uvid javnosti bilo je primjedbi?		
OCJENA DOKTORSKE DISERTACIJE		
1. Pregled disertacije (bibliografski podaci o disertaciji i sažetak disertacije) Kandidat MSc Anton Gjokaj je 2019. godine upisao doktorske studije matematike. Položio je sve ispite koji su predviđeni Planom doktorskih studija koji su usvojeni na Prirodno-matematičkom fakultetu u Podgorici. Nakon uspješne odbrane polaznih istraživanja 2022. godine, odobrena mu je izrada doktorske disertacije <i>“Granična svojstva kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru”</i>. U ovoj doktorskoj disertaciji kandidat ispituje Lipschitz i Hölder neprekidnost		

generalizuje poznate rezultate iz ravni.

Disertacija se sastoji od rezimea, abstracta na engleskom jeziku, predgovora, tri glave, 12 slika, spiska specijalnih oznaka i spiska literature.

Prve dvije glave imaju uvodni karakter i sadrže poznate rezultate koje se odnose na teoriju Laplaceove i Poissonove jednačine (prva glava), odnosno kvazikonformnih preslikavanja (druga glava). Rezultati su ilustrovani dodatnim primjerima i djelimično prikazani na originalan način zbog potrebnih modifikacija koje se odnose na rezultate istraživanja.

Prva glava je posvećena rješavanju Dirichletovog problema za jediničnu loptu B i odgovarajućeg nehomogenog Dirichletovog problema za loptu, odnosno rješavanju Poissonove parcijalne diferencijalne jednačine u slabom smislu. Prvo su uvedena harmonijska preslikavanja, dokazana je Greenova reprezentacija a zatim razmatran Dirichletov problem za loptu i nehomogeni Dirichletov problem u slabom smislu.

U drugoj glavi je izložen pregled osnovnih pojmova iz teorije kvazikonformnih preslikavanja u prostoru. Najprije je dat geometrijski pristup kroz formulaciju pojma modula krivih, a zatim i analitički pristup, uz dokaz osnovnih svojstva i uz dodatne primjere. U drugom djelu ove glave, izučavajući modul krivih, odnosno utvrdeći njegova svojstva i posmatrajući familije krivih koje spajaju komponente povezanosti Grötzschovog i Teichmüllerovog prstena, dat je dokaz Morijeve teoreme za kvazikonformna preslikavanja iz B u B , koje centar 0 slikaju u sebe. Ovim dobro poznatim rezultatom se obezbjeđuje α -Hölder neprekidnost preslikavanja, za $\alpha = \frac{1}{K^{1-n}}$, sa Hölder koeficijentom koji zavisi samo od K .

Treća glava predstavlja dokaze hipoteza doktorske disertacije, originalne rezultate kandidata koji su objavljeni u časopisima sa SCIE liste. Uopštena je Hardy-Littlewood teorema i za prostor, kroz dvije različite verzije. U slučaju kada je slika prostorna oblast sa $C^{1,\alpha}$ granicom, Lipschitz neprekidnost je dokazana i u slučaju kvazikonformnih preslikavanja koja su harmonijska, i u slučaju kada se uslov harmoničnosti (da je Laplasijan jednak nula) zamijeni uslovom da je Laplasijan iz L^p prostora. U slučaju kada kodomen je prostorna oblast sa C^1 granicom, ukazano je na primjere zbog kojih ne važi Lipschitz neprekidnost i dokazana je Hölder neprekidnost sa uniformnim koeficijentom za tu familiju preslikavanja.

2. Vrednovanje disertacije

2.1. *Problem (navesti neriješena i kontraverzna mišljenja o istraživačkom problemu i dosadašnjim pokušajima rješavanja problema, rješenja do kojih su došli drugi autori, ocjenu osnove disertacije u skladu sa radovima i istraživanjima kandidata i način njihove veze sa samom disertacijom)*

Centralna tema ove disertacije je ispitivanje modula neprekidnosti kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja iz jedinične lopte prostora u oblast sa granicom određene glatkosti.

Imajući u vidu da analitička preslikavanja u ravni su i harmonijska, finski matematičar O. Martio je prvi izučavao kvazikonformna harmonijska preslikavanja kao generalizaciju analitičkih preslikavanja u ravni. Od tada problem Hölder i Lipschitz neprekidnosti kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja između oblasti u ravni sa unaprijed zadatim svojstvima izazvao je veliko interesovanje matematičara.

Bitan trenutak u intenzitetu razvoja ove oblasti predstavlja rad M. Pavlovića iz 2002. godine, gdje je između ostalog dokazano da kvazikonformna harmonijska preslikavanja iz jediničnog diska D u sebe su bi-Lipschitz neprekidna. Nakon toga, niz matematičara (D. Kalaj, M. Mateljević, K. Astala, D. Partyka, M. Arsenović itd.) se posvetio radu na ovoj temi i dobijeni su interesantni rezultati kroz uopštavanje rezultata na razne oblasti u ravni (na primjer između oblasti sa granicama $C^{1,\alpha}$ glatkosti, odnosno oblasti sa granicama C^1 glatkosti) ili kroz olakšavanje uslova harmoničnosti funkcije (Laplasijan funkcije pripada nekom integrabilnom prostoru).

Međutim, osjetno manje ima analognih rezultata u prostoru (u R^n , za $n \geq 3$), naročito zbog nedostatka tehnika iz kompleksne analize (svako harmonijsko preslikavanje u ravni se može napisati kao zbir analitičke i antianalitičke funkcije). Ovom disertacijom se uopštavaju rezultati iz ravni u prostor R^n , a u nekim slučajevima i poboljšavaju postojeći oslabljenjem uslova glatkosti na granici slike. Stoga, disertacija predstavlja značajan doprinos u izučavanju graničnih svojstva kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja. Kandidat odlično barata veoma komplikovanim matematičkim aparatom koji uključuje Poissonov integral i modul krivih, i koristi interesantne matematičke tehnike i pristupe u dokazivanju teorema.

2.2. Ciljevi i hipoteze disertacije

Glavni ciljevi disertacije su:

- 1) Ispitivanje Lipschitz neprekidnosti kvazikonformnog harmonijskog preslikavanja iz jedinične lopte u R^n na prostornu oblast Ω sa $C^{1,\alpha}$ granicom.
- 2) Ispitivanje Hölder neprekidnosti kvazikonformnog harmonijskog preslikavanja iz jedinične lopte u R^n na prostornu oblast Ω sa C^1 granicom.
- 3) Ispitivanje Lipschitz neprekidnosti kvazikonformnog preslikavanja f koje zadovoljava uslov $\Delta f = g$, gdje je $g \in L^p$, za $p > n$, iz jedinične lopte u R^n na prostornu oblast Ω sa $C^{1,\alpha}$ granicom.

2.3. *Bitne metode koje su primijenjene u disertaciji i njihovu primjerenost. Ako je primijenjena nova ili dopunjena metoda, opišite šta je novo*

Značajnu ulogu u dokazivanju rezultata disertacije ima Hardy-Littlewood teorema, koja je u ovoj disertaciji uopštena za harmonijske funkcije iz jedinične lopte B prostora R^n .

Teorema daje vezu između koeficijenta μ -Hölder neprekidnosti na sferi u odnosu na tačku $\eta \in S$ harmonijske funkcije $u = u(x)$, tj.

$$\sup_{\xi \in S, \xi \neq \eta} \frac{\|u(\eta) - u(\xi)\|}{\|\eta - \xi\|^\mu} \quad (1)$$

i vrijednosti

$$\sup_{x \in [0, \eta)} (1 - \|x\|)^{1-\mu} \|\nabla u(x)\|. \quad (2)$$

Konkretno, ovom teoremom se dokazuje direktna zavisnost (ekvivalencija) između ograničenosti jedne i druge vrijednosti. Dokaz je izveden primjenom Poissonovog integrala. Naime, svaka funkcija $u: \bar{B} \subset R^n \rightarrow R$, gdje je u harmonijska u jediničnoj lopti B , a neprekidna u $\bar{B} = B \cup S$, se može predstaviti u sljedećem obliku

$$u(x) = \int_S \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - \xi\|^n} u(\xi) d\sigma(\xi),$$

gdje je σ normalizovana površinska mjera na S .

Osim navedene generalizacije Hardy-Littlewood teoreme, dokazana je i odgovarajuća verzija teoreme u slučaju da je $\mu > 1$. Ako za fiksirano $\eta \in S$, važi nejednakost

$$\|u(\eta) - u(\xi)\| \leq M \|\eta - \xi\|^\mu, \quad \text{za } \xi \in S,$$

onda je $\|\nabla u(x)\| \leq C$, za x iz duži $[0, \eta)$, gdje je C konstanta koja zavisi samo od μ i M .

Dakle, teorema donosi ekvivalenciju između dva uslova, pri čemu jedan se odnosi na sferu, a drugi na unutrašnjost lopte B . Način na koji se ta veza koristi predstavlja glavni momenat u dokazu rezultata (1) i (3). Naime, kandidat koristi jednu zanimljivu tehniku koja omogućava sukcesivno poboljšanja Hölder neprekidnosti u jediničnoj lopti B , imajući kao bazni slučaj β -Hölder neprekidnost koje se dobija primjenom Morijeve teoreme. Koristeći uslov $C^{1,\alpha}$ granice kodomena, granica kodomena se može lokalno predstaviti kao grafik $C^{1,\alpha}$ funkcije. To omogućava da n -ta koordinata funkcije f u odnosu na jednu fiksiranu tačku bude $(1 + \alpha)\beta$ -Hölder neprekidna u S , što na osnovu pomenute Hardy-Littlewood teoreme daje ograničenost vrijednosti (2). Koristeći kvazikonformnost preslikavanja f tu nejednakost kandidat prvo prenosi i na ostale koordinate funkcije f , a koristeći pogodne izometrije i na sve ostale tačke iz jedinične lopte. U tom momentu, Hardy-Littlewood teorema daje $(1 + \alpha)\beta$ -Hölder neprekidnost preslikavanja u čitavoj lopti. Sukcesivnom primjenom ovog postupka, kandidat dobija da je f μ -Hölder neprekidno za sve $\mu \in (0, 1)$. Prelazak iz Hölder neprekidnosti u Lipschitz neprekidnost je ostvaren na analogan način kao za preostale iteracije, osim što se u tom slučaju koristi Hardy-Littlewood teorema za slučaj $\mu > 1$.

U zaključku, kandidat je pokazao sistematičan pristup u bavljenju naučnim radom, što je potvrđeno i objavljivanjem naučnih radova.

2.4. Rezultati disertacije i njihovo tumačenje

Originalni rezultati kandidata su:

- 1) kvazikonformno harmonijsko preslikavanje iz jedinične lopte u R^n na prostornu oblast Ω sa $C^{1,\alpha}$ granicom je Lipschitz neprekidno.
- 2) kvazikonformna harmonijska preslikavanja, koja pripadaju Bloch prostoru, iz jedinične lopte u R^n na prostornu oblast Ω sa C^1 granicom su uniformno Hölder neprekidna.
- 3) kvazikonformno preslikavanje f koje zadovoljava uslov $\Delta f = g$, gdje je $g \in L^p$, za $p > n$, iz jedinične lopte u R^n na prostornu oblast Ω sa $C^{1,\alpha}$ granicom je Lipschitz neprekidno.

Rezultati predstavljaju generalizaciju dobijenih rezultata u ravni. Rezultat 3) u prostoru je već dokazan u slučaju da Ω ima C^2 granicu, pa zato predstavlja i poboljšanje već poznatih rezultata.

2.5. Zaključci (usaglašenost sa rezultatima i logično izvedeno tumačenje)

Dati zaključci unutar ove doktorske disertacije dati su logičkim slijedom. Sva tvrđenja su dokazana korišćenjem matematičkog aparata, a proizilaze iz jasno potkrijepljenih i obrazloženih činjenica.

3. Konačna ocjena disertacije

3.1. Usaglašenost sa obrazloženjem teme

Disertacija je usaglašena sa obrazloženjem teme.

3.2. Mogućnost ponovljivosti

Ponovljivost rezultata dobijenih u disertaciji je moguća, uz poštovanje metodologije i zadatih uslova.

3.3. Buduća istraživanja

Ostaje otvoreno pitanje da li rezultat 2) važi i bez uslova da preslikavanje pripada Bloch prostoru kao i da li rezultati važe i u slučaju kada se umjesto lopte u domenu posmatra oblast sa granicom određene glatkosti.

3.4. Ograničenja disertacije i njihov uticaj na vrijednost disertacije

Nema posebnih ograničenja.

Originalni naučni doprinos

. U pogledu naučnog doprinosa izdvajamo sljedeće:

- 1) dokaz Hardy-Littlewood teoreme za prostor.
- 2) kvazikonformno harmonijsko preslikavanje iz jedinične lopte u R^n na prostornu

oblast sa granicom je Lipschitz neprekidno.

3) kvazikonformna harmonijska Bloch preslikavanja iz jedinične lopte u na prostornu oblast sa granicom su uniformno Hölder neprekidna.

4) kvazikonformno preslikavanja koje zadovoljava uslov , gdje je , iz jedinične lopte u na prostornu oblast sa granicom je Lipschitz neprekidno.

Rezultati koji predstavljaju originalni doprinos disertacije su publikovani kroz dva rada u časopisima sa SCI/SCIE liste i kroz izlaganje na jednom simpozijumu.

Mišljenje i prijedlog komisije

Na osnovu prethodnog, Komisija konstatuje da doktorska disertacija kandidata MSc Antona Gjokaja ispunjava sve formalne, pravne i suštinske uslove, kao i sve kriterijume koji se primjenjuju prilikom vrednovanja doktorske disertacije. Komisija smatra da doktorska disertacija ima originalni naučni doprinos, koji se ogleda u teorijskom doprinosu teoriji kvazikonformnih i harmonijskih preslikavanja.

Imajući u vidu kvalitet ostvarenih rezultata, Komisija sa zadovoljstvom predlaže Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta i Senatu Univerziteta Crne Gore da prihvati doktorsku disertaciju pod nazivom "*Granična svojstva kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru*" kandidata MSc Antona Gjokaja i odobri njenu javnu odbranu.

Izdvojeno mišljenje

(popuniti ukoliko neki član komisije ima izdvojeno mišljenje)

Ime i prezime

Napomena

(popuniti po potrebi)

KOMISIJA ZA OCJENU DOKTORSKE DISERTACIJE

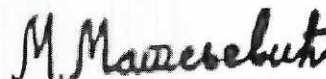
Prof. dr Darko Mitrović, Prirodno-matematički fakultet,
Univerzitet Crne Gore, Crna Gora



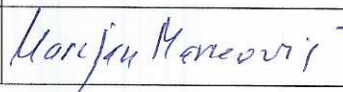
Prof. dr David Kalaj, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet
Crne Gore, Crna Gora

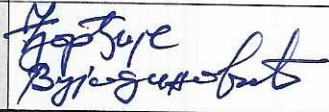


Prof. dr Miodrag Mateljević, Matematički fakultet, Univerzitet u
Beogradu, Srbija



Prof. dr Marijan Marković, Prirodno-matematički fakultet,
Univerzitet Crne Gore, Crna Gora



Prof. dr Đorđije Vujadinović, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Crna Gora	
Datum i ovjera (pečat i potpis odgovorne osobe)	
U Podgorici,	
MP	DEKAN