

УНИВЕРЗИТЕТ ЦРНЕ ГОРЕ

ВИЈЕЋУ ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКОГ ФАКУЛТЕТА

Предмет: Извјештај комисије о мастер раду под називом „Инверзија у геометријским динамичким софтверима” кандидата Николе Радојичића

Вијеће Природно-математичког факултета на сједници одржаној 18.04.2023. године именовало је Комисију за оцјену теме мастер рада „Инверзија у геометријским динамичким софтверима” кандидата Николе Радојичића.

На основу прегледаног рада и услова утврђених Статутом Универзитета Црне Горе, подносимо сљедећи

ИЗВЈЕШТАЈ

1. Анализа мастер рада

Мастер рад „Инверзија у геометријским динамичким софтверима” је рад који припада областима класичне еуклидске геометрије и примјене динамичких геометријских софтвера. Централна тема рада је геометријска трансформација инверзија чија се својства и особине проучавају, користећи геометријске динамичке софтвере Cinderella и Geo Gebra.

Рад је написан на 100 страна. Састоји се од предговора, девет поглавља и закључка, литературе са 26 библиографских јединица. Поред тога рад садржи и 82 слике које су рађене у софтверима Cinderella и Geo Gebra које прате и илуструју обрађени материјал.

У првом поглављу рада се дефинише инверзија и описују конструкција инверзне слике дате тачке.

Друго поглавље обрађује својства инверзије као што су инверзне слике кругова и правих, као и промјену дужине растојања између двије тачке после инверзије. У овом поглављу је обрађена и потенција тачке у односу на круг као фундаментални појам блиско повезан са инверзијом.

У трећем поглављу се изучава особина конформности инверзије као пресликавања. Посебно се разматра нормалност међу круговима и концентрични кругови као особине на којима се заснивају резултати у наредним поглављима.

Четврто поглавље обрађује теореме класичне геометрије као што су Паскалова, Фојербахова, Птоломејеве и Микелове теореме. Њихови докази инверзијом су такође приказани.

У петом поглављу се изучава примјена инверзије у конструктивним проблемима и задацима, као што су десет Аполонијевих проблема.

Шесто поглавље је посвећено поризмима, посебно Штајнеровом поризму и блиској конструкцији познатој као Папосов обућарски нож.

У седмој глави су приказани оригинални резултати који проучавају појам ортогоналности два Папосова ланца кругова и аналогни резултати за два Штајнерова ланца.

Осма глава обрађује геометријске динамичке софтвере Cinderella и Geo Gebra.

У деветом поглављу је илустрована алатка за инверзију у овим софтверима и приказане неке интересантне примјене.

2. Постављени циљеви

Инверзија је једна од тема класичне математике која има фундаменталан значај у хиперболичкој геометрији, комплексној анализи, теорији билијара и другим дисциплинама. Но, упркос томе, у савременом свијету највише је заступљена као тема и метод у решавању олимпијских проблема из геометрије на међународним такмичењима из математике. Значајно је поменути да је она дио и вишевјесковне математичке културе и насљеђа широм свијета, од античких Аполонијевих проблема и Сангаку таблица из древног Јапана, преко радова Фојербаха и Штајнера све до данашњих дана. Бројни геометријско динамички софтвери имају могућност добре имплементације инверзије, који су недавно подстакли нова истраживања у овој области.

Мастер рад је дао садржајан преглед дефиниције и својстава инверзије ослањајући се на класично излагање еуклидске геометрије. У раду су доказане класичне теореме као што су Фојербахова, Паскалова, Микелове и Птоломејеве, док су докази пропраћени одговарајућим илустрацијама у софтверу Cinderella. Мастер рад је представио и рјешења Аполонијевих конструктивних проблема и неких других конструкција које се заснивају на инверзији.

У раду су посебно описани динамичко геометријски софтвери, Cinderella и Geo Gebra чије су могућности за кориштење у образовном процесу фактички неисцрпне. Рад је посебно обрадио и алате који се користе за инверзију, илуструјући на конкретним примјерима те примјене.

Мастер рад је велико обогаћење литературе о еуклидској геометрији у Црној Гори и региону, који је постављене циљеве остварио и успио да изложи једноставним, али научно коректним језиком који је доступан и разумљив напреднијим средњошколцима и студентима основних студија.

3. Научни циљ рада

Научни циљ рада је био да се користећи алатке софтвера Cinderella покушају систематизовати класична теорија инверзије и најважније теореме еуклидске геометрије које се елегантно показују инверзијом. Рад је презентовао и метод инверзије у конструктивним проблемима.

Најзначајнији научни допринос рада је дио којим се изучавају Штајнерови и Папосови ланци кругова. То су конфигурације кругова који додирују два фиксирана круга која се додирују или не сијеку и у коме сваки круг у ланцу додирује претходни. Ове конфигурације су у блиској вези са поризмима чије се изучавање везује за многе модерне дисциплине у математици као што су алгебарска геометрија, интеграбилни динамички системи, билијари и друге.

Посебно је важно истаћи да је овај мастер рад отишао и неколико корака даље и да је дубоко искорачио у оригинално истраживање. У мастер раду су унапређени резултати недавно објављених радова Ђ. Baralić, D. Jokanović and M. Milićević, *Variations on Steiner's Porism*, Mathematical Intelligencer 39 (2017), 6-11 и V. Čerňanová, *On a Fabric of Kissing Circles*, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 104(2) (2021), 320–329. Тематика ова два рада је спојена тако што су уведени појмови ортогоналних Папосових ланаца кругова и у тим конфигурацијама су уочени да одређени скупови тачака леже на истом кругу, а да центри кругова у одређеним класама тих кругова леже на истој коници. Иако је у раду доказано да се аналогни појмови не могу увести за Штајнерове ланце кругова, рад указује на важност проучавања конфигурација два Штајнерова ланца са заједничким кругом, пошто под одређеним условима важе аналогни резултати као и за Папосове ланце. Овим мастер радом су отворени и нови правци истраживања теме која је у класичној геометрији већ доста проучавана.

4. Примењене методе

Докази у мастер раду се базирају на методу инверзије. Нови оригинални резултати се односе на разне конфигурације кругова који се додирују па се користи инверзија која преводи два круга у праве или два концентрична круга.

Доста оригиналних тврђења у раду говоре да одређени скупови центара неких кругова припадају истој коници. Доказивање да неки скуп тачака припада кривој другог реда геометријским методама није лак, а у овом мастер раду главни метод је уочавање да

одређени кругови додирују два фиксна круга, те су њихови центри жижје одговарајућих елипса или хипербола.

У мастер раду се користи динамички геометријски софтвер Cinderella у којем су урађене анимације и тестиране хипотезе. Често ови експерименти и наводе на одговарајуће поступке у њиховом доказивању.

5. Добијени резултати

У мастер раду је приказано како се динамички геометријски софтвер Cinderella може користити за цртање добрих и прецизних скица и анимација помоћу којих се могу добити идеје за развијање геометријског доказа. У раду је на елегантан начин изложена и проучена инверзија као геометријска трансформација са значајним карактеристикама.

Посебна вриједност овог мастер рада су нови резултати који се односе на Папосове и Штајнерове ланце кругова. Уведен је појам ортогоналних Папосових ланаца и показано да у овој конфигурацији постоје врло интересантне фамилије кругова чији центри леже на коници. Ови резултати су се директно надовезали на недавне радове Баралића, Јокановића, Милићевића и Ћерћаповá у којима се проучавају Штајнерови поризми и њихова својства. У раду је доказано да није могуће увести појам ортогоналних Штајнерових ланаца, али су дати примјери који указују да два Штајнерова ланца са заједничким кругом под одређеним условима дозвољавају аналогне резултате као и у случају Папосових ланаца.

У раду су презентована и рјешења неких конструктивних проблема помоћу инверзије, као и докази неких класичних геометријских теорема. Ови резултати, доступни у литератури која је углавном на страним језицима су од значаја за наставни кадар и учеснике средњошколских математичких такмичења на којима се ово градиво појављује. Комисија оцјењује да мастер рад „Инверзија у геометријским динамичким софтверима” свеукупно са својим добијеним резултатима има неопходне научно-истраживачке компоненте, али и педагошко-стручну вриједност која је од ширег интереса математичке заједнице Црне Горе.

6. Закључак

Након прегледаног мастер рада, анализе добијених резултата и значаја остварених истраживања, Комисија констатује да рад задовољава све услове научно-истраживачког рада. Задата тема овог рада је актуелна и на савремени начин образложена, а резултати се надовезују на недавно добијене резултате публиковане у реномираним научним часописима.

Комисија похваљује мастер рад и предлаже Вијећу Природно-математичког факултета да одобри одбрану мастер рада „Инверзија у геометријским динамичким софтверима”.

У Подгорици, 10. марта 2024. године

КОМИСИЈА

Проф. др Миленко Мосуровић, члан

Mosurovic'

Проф. др Свјетлана Терзић, члан

Sterezic

Проф. др Владимир Божовић, члан

Bozovic

Др Ђорђе Баралић, ментор

Ђорђе Баралић

Проф. др Невена Мијајловић, члан

Mijajlovic