

UNIVERZITET CRNE GORE

Prirodno-matematički fakultet Podgorica

Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta

IZVJEŠTAJ KOMISIJE O PREGLEDU I OCJENI MASTER RADA MILIJANE ZINDOVIĆ

Vijeće Prirodno-matematičkog fakulteta na sjednici održanoj 23. 04. 2024. godine imenovalo je Komisiju za pregled i ocjenu master rada pod nazivom "Lokalna interpretacija geometrijske formalnosti glatkih mnogostrukosti malih dimenzija", kandidata Milijane Zindović, u sastavu dr Svjetlana Terzić, redovni profesor-mentor, dr Marijan Marković, vanredni profesor-član i dr Djordjije Vujadinović, vanredni profesor-član.

Milijana Zindović je predala tekst master rada 30. 10. 2024. godine na uvid javnosti i ocjenu.

Nakon uvida u podneseni tekst, a u vezi sa članom 29 Pravila studiranja na master studijama, podnosimo sledeći

IZVJEŠTAJ

Master rad Milijane Zindović, bečelora matematike, pod nazivom "Lokalna interpretacija geometrijske formalnosti glatkih mnogostrukosti malih dimenzija" se sastoji od 62 strane originalnog teksta, uz dodatne strane koje se odnose na opšte informacije, izvod rada i izvod rada na engleskom jeziku. Na taj način tekst ispunjava sve zahtjeve propisane članom 27 Pravila studiranja na master studijama.

Rad pripada oblasti matematike, odnosno uže specijalizovanoj oblasti diferencijalne geometrije. Rad se sastoji iz pet poglavlja: Uvod, Diferencijalne forme na Rimanovoj mnogostrukosti, Proizvod harmonijskih formi, Simetrični prostori i geometrijska formalnost i Zaključak. Prve četiri glave su podijeljene na potpoglavlja u kojima se detaljno i nadovezano prikazuju pojmovi i tvrdjenja koja se razmatraju. Preciznije prva glava se sastoji od razdjela: Diferencijalne forme u euklidskom prostoru, Spoljašnji proizvod diferencijalnih formi, Spoljašnji izvod

i koizvod diferencijalnih formi, Diferencijabilna mnogostrukost, Rimanova mnogostrukost; druga glava se sastoji od razdjela: Zadavanje diferencijalnih formi, Hodžov zvijezda operator, Harmonijske diferencijalne forme, treća glava se sastoji od razdjela: Euklidska metrika, Hiperbolička metrika, Kohomološke klase de Rama i teorema Hodža, dok se četvrta glava sastoji od razdjela: Primjeri simetričnih prostora, Jedinična sfera S^2 , Realni hiperbolička ravan $\mathbb{R}H^2$.

U radu se izučava pojam geometrijske formalnosti Rimanove metrike i pojam geometrijske formalnosti glatke mnogostrukosti. Za Rimanovu metriku na mnogostrukosti se kaže da je formalna ako je spoljašnji proizvod svake dvije forme koje su harmonijske u odnosu na datu metriku forma koja je takodje harmonijska u odnosu na datu metriku. Za glatku mnogostrukost se kaže da je geometrijski formalna ako se na njoj može zadati formalna Rimanova metrika. Posljedica poznate teoreme Hodža tvrdi da na kompaktnoj Rimanovoj mnogostrukosti svaka kohomološka klasa iz $H^*(M, \mathbb{R})$, sadrži tačno po jednog, s tačnošću do na skalar, predstavnika koji je harmonijska forma. Na osnovu toga se može direktno dokazati da je svaka geometrijski formalna mnogostrukost i formalna u smislu Sullivan-a. U literaturi postoje klase prostora za koje je dokazano da su formalni u smislu Sullivan-a i iz dokaza njihove formalnosti slijedi da su ove mnogostrukosti i geometrijski formalne. To se u prvom redu odnosi na kompaktne simetrične prostore, koji se definišu kao količinski prostori G/H Lijeve grupe G po podgrupi H , koja predstavlja podgrupu fiksnih tačaka nekog involutivnog automorfizma za grupu G . S druge strane, veliki broj uopštenih simetričnih prostora nijesu geometrijski formalni jer je pokazano da struktura njihove kohomološke algebra zajedno sa teoremom Hodža daje opstrukcije za postojanje formalne Rimanove metrike.

Cilj rada je da se uslovi formalnosti Rimanove metrike na datoj mnogostrukosti, odnosno geometrijske formalnosti same mnogostrukosti predstave u terminima lokalnih koordinata mnogostrukosti. U terminima lokalnih koordinata mogu se predstaviti i diferencijalne forme, i u skladu sa tim cilj rada je da se prvo izvede interpretacija pojma geometrijske formalnosti u lokalnom koordinatama, a onda i da se, u terminima lokalnih koordinata, izučava postojanje formalne metrike na nekim jednostavnim mnogostrukostima malih dimenzija.

Preciznije, cilj je da se daju odgovori na ova pitanja u terminima lokalnih koordinata za, između ostalog, euklidsku ravan i prostor, euklidsku sferu $S^2 = \{z = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ sa standardnom euklidskom normom, kao i prostor $H^2 = \{z = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1, x_3 > 0\}$, gdje je hiperbolička norma zadata sa $(z, z) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$.

Lokalnom interpretacijom harmonijskih formi je pokazano da euklidska metrika na prostorima $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ nije i formalna, kao ni hiperbolička metrika gornje polu-

ravni H^2 . S druge strane pokazano je da je sfera S^2 geometrijski formalna u odnosu na indukovanu metriku iz $\mathbb{R}^3$, kao i da je realna projektivna ravan $\mathbb{R}P^2$ geometrijski formalna mnogostrukost u odnosu na metriku indukovanu sa sfere S^2 . Takodje je pokazano da je realna hiperbolička ravan $\mathbb{R}H^2$ geometrijski formalna mnogostrukost u odnosu na Lorencov skalarni proizvod koji je indukovano iz $\mathbb{R}^3$. Za sve pomenute prostore se odogovor na pitanje geometrijske formalnosti može dati topološkim metodama, odnosno na osnovu strukture njihovog realnog kohomološkog prstena, ali se u radu daje odgovor na ovo pitanje diferencijalno-analičkim metodama u terminima njihove diferencijalno-geometrijske strukture.

U radu se primjenjuju metode diferencijalne geometrije, diferencijalnih i parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Detaljan pregled rada po poglavljima je sledeći.

U prvom poglavlju su definisani osnovni pojmovi koji se koriste u radu: diferencijalna forma, spoljašnji proizvod diferencijalnih formi, diferencijabilna mnogostrukost, Rimanova mnogostrukost. Diferencijalna forma je definisana u prostoru $\mathbb{R}^n$.

U drugom poglavlju je data definicija diferencijalnih formi na proizvoljnoj Rimanovoj mnogostrukosti (M, g) . Definisan je unutrašnji proizvod dvije forme kao i operatori: d (exterior derivative), δ (coderivative) i Δ (Laplace-de Rham). Posljedično su definisane harmonijske diferencijalne forme. Naveden je i kratak prikaz kohomoloških grupa de Rham-a i teoreme Hodža u kojoj važnu ulogu imaju harmonijske forme.

U trećem poglavlju su izvedeni opšti uslovi u terminima lokalnih koordinata da bi proizvod harmonijskih formi bila harmonijska forma. Pokazano je da $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ sa standardnom euklidskom metrikom, kao i H^2 sa hiperboličkom metrikom nijesu geometrijski formalne mnogostrukosti.

U četvrtom poglavlju je pokazano da je sfera S^2 sa standardnom parametrizacijom i indukovanom metrikom iz $\mathbb{R}^3$ geometrijski formalna, da je realna projektivna ravan $\mathbb{R}P^2$ sa metrikom indukovanom sa S^2 geometrijski formalna, kao i da je realna hiperbolička ravan $\mathbb{R}H^2$ sa Lorencovom metrikom geometrijski formalna mnogostrukost.

U glavi Zaključak su sumirani rezultati predstavljeni u radu i navedeni mogući pravci za dalje istraživanje.

Zaključak i predlog

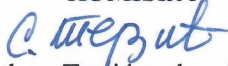
Na osnovu prethodno izloženog smatramo da je master rad "Lokalna interpretacija

geometrijske formalnosti glatkih mnogostrukosti malih dimenzija" Milijane Zindović napisan jasno, da su svi pojmovi i tvrdjenja koja se koriste tačno prikazani, uz neophodne interpretacije. Smatramo i da su rezultati koji daju odgovor na pitanje geometrijske formalnosti euklidskih prostora, hiperboličke poluravni, sfere, realne projektivne ravni i realne hiperboličke ravni tačni i jasno izvedeni. Na osnovu toga smatramo da rad ispunjava sve uslove predviđene Pravilima studiranja na master studijama. Kandidat je kroz izradu ovog rada ovladao nekim od klasičnih pojmova diferencijalne geometrije i uspješno ih primijenio sa ciljem dobijanja eksplicitnih rezultata. Smatramo da je na taj način kandidat u potpunosti realizovao postavljene ciljeve. U skladu sa tim, Komisija pozitivno ocjenjuje master rad "Lokalna interpretacija geometrijske formalnosti glatkih mnogostrukosti malih dimenzija" kandidata Milijane Zindović.

Komisija predlaže Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta da rad pod naslovom "Lokalna interpretacija geometrijske formalnosti glatkih mnogostrukosti malih dimenzija" Milijane Zindović prihvati kao master rad i odobri njegovu javnu usmenu odbranu.

U Podgorici, 05. 12. 2024.

KOMISIJA



dr Svjetlana Terzić, redovni profesor PMF-a – mentor

dr Marijan Marković, vanredni profesor PMF-a – član



dr Djordjije Vujadinović, vanredni profesor PMF-a – član

