Crna Gora
UNIVERZITET CRNE GORE
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
Broj 2024/01-3409
Podgorica, 06. 12. 2024 god.

KOMISIJI ZA DOKTORSKE STUDIJE PRIRODNO-MATEMATIČKOG FAKULTETA

Predlažem Vijeću Prirodno-matematičkog fakuleta da imenuje Komisiju za ocjenu prijave teme doktorske disertacije pod nazivom Z_2 - *homologije prostora orbita* $G_{n,2}/T^n$ kandidata Vladimira Ivanovića u sastavu

1. dr Svjetlana Terzić, redovni profesor, mentor
   Prirodno-matematički fakutet, Univerzitet Crne Gore
2. dr Rade Živaljević, naučni savetnik, član
   Matematički institut, SANU
2. dr Djorde Baralić, viši naučni saradnik, član
   Matematički institut, SANU

U Podgorici, 06. 12. 2024.

Prof. dr Svjetlana Terzić

Crna Gora
UNIVERZITET CRNE GORE
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
Broj 2024/01-2969
Podgorica, 29.10. 2024 god.

UCG

UNIVERZITET CRNE GORE
Obrazac PD: Prijava teme doktorske disertacije

PRIJAVA TEME DOKTORSKE DISERTACIJE

OPŠTI PODACI O DOKTORANDU	
Titula, ime i prezime	MSc Vladimir Ivanović
Fakultet	Prirodno-matematički fakultet
Studijski program	Matematika
Broj indeksa	2/2020
Ime i prezime roditelja	Ranko Ivanović
Datum i mjesto rođenja	13.07.1993, Podgorica
Adresa prebivališta	Kralja Nikole 128, Podgorica
Telefon	+38267666676
E-mail	vladimir.i@ucg.ac.me

	BIOGRAFIJA I BIBLIOGRAFIJA
Obrazovanje	• Magistar(MSc) Matematike, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore i Univerzitet u Grazu, 2020, 9.8 • Specijalista(Spec. Sci.) Matematike,Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, 2016, 9.73 • Bachelor (BSc) Matematika i računarske nauke, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, 2015, 8.6
Radno iskustvo	• Saradnik u nastavi, Prirodno-matematičkom fakultetu, Univerzitet Crne Gore, od 2020. godine do danas • Saradnik u nastavi, Univerzitet Donja Gorica, od 2018 do 2020 • Big Data Analitičar, T-Mobile, Crna Gora, od 2018 do 2020 • Software Developer, Mbanq., Hrvatska, od 2017 do 2018 • Software developer, OTP bank, Crna Gora, 2016
Popis radova	• V.Ivanović, S.Terzić: Z_2-homology of the orbit space $G_{n,2}/T^n$, Proc. Steklov Inst. Math.(2024) • Cohomology of some GKM graphs, Magistarski rad(2020)
	NASLOV PREDLOŽENE TEME
Na službenom jeziku	Z_2-homologije prostora orbita za $G_{n,2}/T^n$
Na engleskom jeziku	Z_2-homology of the orbit space $G_{n,2}/T^n$

Obrazloženje teme

Grasmanove mnogostrukosti predstavljaju jedan od osnovnih objekata za izučavanje problema koji su na dodiru algebarske geometrije i algebarske topologije. Predmet izučavanja torusne geometrije su algebarske mnogostrukosti koje se dobijaju kao zatvorenje jedne orbite algebarskog torusa. Ekvivarijantna struktura ovih mnogostrukosti u odnosu na dejstvo maksimalnog kompaktnog torusa, koji je sadržan u algebarskom torusu, može biti efektivno opisana u pomoću kombinatorne strukture momentnog politopa i karakteristične funkcije. Pitanje koje se prirodno nameće u ovom kontekstu jeste proučavanje algebarskih mnogostrukosti sa dejstvom algebarskog torusa čija familija algebarskih torusnih orbita daje, na neki način, dobru stratifikaciju same mnogostrukosti. Prvi netrivijalni primjer jeste prostor orbita $X_n = G_{n,2}/T^n$ kompleksne Grasmanove mnogostrukosti $G_{n,2}$, koja predstavlja dvodimenzionalne kompleksne potprostore u C^n, u odnosu na kanonsko dejstvo kompaktnog torusa T^n. Iz rezultata Gelfanda i Serganove [11] slijedi da se struktura stratifikacije orbita algebarskog torusa, odnosno lijepljenje stratuma, u slučaju $G_{n,2}$ može eksplicitno opisati, s obzriom da se topološka granica svakog stratuma može predstaviti kao unija stratuma. Ovo ne važi u opštem slučaju, to jest za Grasmanove mnogostrukosti $G_{n,k}$, kada je $n \geq 7$, $k \geq 3$, kao što je pokazano na primjeru $G_{7,3}$ u [11], [3].

Pregled istraživanja

Istraživanje prostora orbita X_n zajedno sa kanonskim preslikavanjem momenta $\hat{\mu}: X_n \to \Delta_{n,2}$ gdje $\Delta_{n,2}$ označava hipersimpleks, motivisano je idejom da se prošire metode torusne topologije na dejstvo torusa pozitivne složenosti u smislu rezultata radova Goresky i MacPherson [12], Gelfand i Serganova [11], Buchstaber i Terzić [3], te Ajzenberg i Masuda u [1]. Rezultati ovih radova sugerišu da slučaj $k = 2$ treba proučavati uzimajući u obzir specifičnosti prostora $G_{n,2}$.
Kapranov je u [14] povezao dejstvo grupe T^n na $G_{n,2}$ sa pojmom Čauovog (Chow) količnika iz algebarske geometrije. Kapranov je pokazao da je Čauov količnik je izomorfan Grotendik-Knudsonovom prostoru modula $\mathcal{M}_{0,n}$, koji predstavlja stabilne racionalne krive roda nula sa n fiksiranih uređenih tačaka. Ovi radovi privukli su veliku pažnju, što je rezultiralo nizom radova na srodne teme [3], [11], [1], itd.
Kompleksni projektivni prostor $CP^{n-1} = G_{n,1}$ sa standardnim dejstvom algebarskog torusa $(\mathbb{C}^*)^n$ i indukovanim dejstvom kompaktnog torusa $T^n \subset (C^*)^n$ ključni je objekat torusne geometrije i torusne topologije, vidi [3]. Dobro je poznato da se prostor orbita $G_{n,1}/T^n$ može identifikovati sa simpleksom Δ^{n-1}, koji predstavlja standardan primjer glatke mnogostrukosti sa uglovima.
U novijim radovima [5] i [19], prostori orbita $X_4 = G_{4,2}/T^4$ i $X_5 = G_{5,2}/T^5$ su eksplicitno opisani, dok je opsežno istraživanje dejstva torusa T^n na $G_{n,k}$ za $k \geq 2$ urađeno u radovima [3] i [1] u kontekstu teorije $(2n, k)$-mnogostrukosti.
U radu [6] je dokazano da je prostor X_4 homeomorfan sferi S^5. Prema S. Smale [25], sfera S^5 ima jedinstvenu glatku strukturu. Ipak, prostor X_4 je samo topološka sfera, odnosno nije moguće uvesti glatku strukturu na X_4, tako da prirodna projekcija $G_{4,2} \to G_{4,2}/T^4$ bude glatko preslikavanje. Prostor X_5 nije mnogostrukost, s obzirim da je u radu Süess-a [19], vidi takođe [7] izračunato da netrivijalne homološke grupe za X_5 imaju vrijednost Z u dimenzijama 0 i 8, dok je u dimenziji 5 homološka grupa Z_2, pa nije zadovoljena Poenkareova dualnost.
Opštiji rezultat je dokazan u [15], odnosno dokazano je da je prostor orbita Hamiltonovog torusnog dejstva složenosti jedan u opštem položaju homeomorfan sferi. Ovaj rezultat je poboljšan u radu [1], gdje je pokazano da je prostor orbita mnogostrukosti M^{2n} u odnosu na torusno dejstvo složenosti 1 u opštem položaju i sa konačnim nepraznim skupom fiksnih tačaka, homološka $(n + 1)$-sfera, ukoliko su neparne homologije za M^{2n} trivijalne. U radu [1] ovaj rezultat je dalje razvijen uvođenjem pojma j-opštosti težina za dejstvo torusa T^k na

M^{2n} . Tačnije, dokazano je da, ako je M^{2n} ekvivarijantno formalna i dejstvo ima izolovane fiksne tačke, tada j -opštost težina implicira $(j+1)$-acikličnost prostora orbita M^{2n}/T^k.

Cilj i hipoteze

Glavni ciljevi disertacije su:

1) Izračunavanje homoloških grupa sa Z_2 koeficijentima za X_5 metodom različitom od [7] i [19],
2) Izračunavanje homoloških grupa sa Z_2 koeficijentima za X_6,
3) Induktivno opis strukture homoloških grupa sa Z_2 koeficijentima za opšti slučaj X_n.
4) Opisati strukturu mreže, odnosno rešetke aranžmana hiperravni $\mathcal{G}(n,2)$.

Materijali, metode i plan istraživanja

Proučavamo homologije prostor orbita X_n sa Z_2-koeficijentima. Polazimo od modela (U_n, p_n) za $G_{n,2}/T^n$ koji je konstruisan u [2], gdje je $U_n = \Delta_n \times \mathcal{F}_n$ za glatku mnogostrukost $\mathcal{F}_n$, koja se naziva univerzalni prostor parametara, i $p_n: U_n \to X_n$ je neprekidna projekcija. Prostor X_n je količniki prostor za U_n definisan preslikavanjem p_n.

Osnovni rezultat iz konstrukcije ovog modela, koja je data u radu Buchstaber-Terzić [2], a koji koristimo u našem istraživanju sastoji se u tome da se X_n može predstaviti kao disjunktna unija prostora $\{C_\omega \times F_\omega\}$. Ovdje su C_ω komore hipersimpleksa $\Delta_{n,2}$, koje odgovaraju njegovoj dekompoziciji datoj svim mogućim presjecima matroida, tj. dopustivih politopa. Prostori F_ω su prostori orbita za $\widehat{\mu^{-1}}(C_\omega)$ u odnosu na kanonsko dejstvo algebarskog torusa $(C^*)^n$, gde je $\hat{\mu}: G_{n,2}/T^n \to \Delta_{n,2}$ preslikavanje indukovano standardnim preslikavanjem momenta $\mu: G_{n,2} \to \Delta_{n,2}$. Odgovarajuća ćelijska dekompozicija prostora X_n je data ćelijskom dekompozicijom svakog prostora F_ω . Karakteristična preslikavanja su data karakterističnim preslikavanjima ćelijske dekompozicije $\Delta_{n,2}$ na komore C_ω , karakterističnim preslikavanjima ćelijske dekompozicije F_ω i preslikavanjima koja definišu zatvorenje strata u $G_{n,2}$. Naime, u [11] je pokazano da je zatvorenje bilo kojeg stratuma W_σ unija strata $W_{\sigma'}$ za neko $\sigma' \subset \sigma$. S druge strane, iz [5] slijedi da je $\mu(W_\sigma) = \mathrm{int}(P_\sigma)$, što je relativna unutrašnjost politopa $P_\sigma \subset \Delta_{n,2}$, nazvanog dopustivi politop. Konkretno, ako je $P_{\overline{\sigma}}$ strana maksimalne dimenzije dopustivog politopa P_σ , tada stratum $W_{\overline{\sigma}}$, za koji važi $\mu(W_{\overline{\sigma}}) = \mathrm{int}(P_{\overline{\sigma}})$, pripada granici stratuma W_σ . Pored toga, dokazano je u [3] da postoji neprekidna sirjekcija $\eta_{\sigma,\overline{\sigma}}: F_\sigma \to F_{\overline{\sigma}}$. Ako C_ω ima stranu maksimalne dimenzije $C_{\overline{\omega}}$, tada važi $C_{\overline{\omega}} = \cap P_{\overline{\sigma}}$ za strane maksimalne dimenzije $P_{\overline{\sigma}}$ politopa P_σ , gde je $\sigma \in \omega$. Posljedično ćemo pokazati da neprekidna sirjekcija $\eta_{\sigma,\overline{\sigma}}$ daje neprekidnu sirjekciju $\eta_{\omega,\overline{\omega}}: F_\omega \to F_{\overline{\omega}}$.

Univerzalni prostor parametara $\mathcal{F}_n$ definisan je u [3] za dejstvo torusa T^k na glatku mnogostrukost M^{2n} , a detaljno izučen za dejstvo torusa T^n na $G_{n,2}$ u [6], [2] i [7]. Konkretno, u [7] je dokazano da je $\mathcal{F}_n$ glatka mnogostrukost, difeomorfna prostoru modula $\mathcal{M}_{0,n}$ stabilnih glatkih krivih roda nula sa n fiksiranih različitih tačaka. Štaviše, u [2] je dokazano da postoji neprekidna sirjekcija $p_\omega: \mathcal{F}_n \to F_\omega$ za svako ω . Ovo preslikavanje indukuje relacije na generatorima homoloških grupa prostora F_ω sa relacija na generatorima homoloških grupa prostora $\mathcal{F}_n$. Generatori homoloških grupa za $\mathcal{F}_n$, kao i njihove relacije, određeni su u radu Keel-a [16], a njegovi rezultati su dalje generalizovani u [18] i [8].

Složenost proučavanja prostora orbita M^{2n}/T^k i njihove homološke strukture prati složenost dejstva torusa. Homologija kvazitorusnih mnogostrukosti M^{2n}/T^n, koje pripadaju klasi mnogostrukosti sa torusnim dejstvom složenosti nula, određena je kombinatorikom momentnog politopa P^k. Integralne homologije prostora orbita X_4, koji predstavlja primjer dejstva torusa složenosti 1, su izračunate u [4]. Integralne homologije prostora orbita X_5, koji predstavlja primjer dejstva torusa složenosti 2, izračunata je u [7] i [19].

Plan rada se sastoji od induktivnog opisivanja strukture ciklova za opšti slučaj X_n i izučavanje načina za izračunavanje homoloških grupa za X_n sa Z_2 -koeficijentima. Plan je i da se dobijeni rezultati primijene za izračunavanje homoloških grupa sa Z_2-koeficijentima prostora X_5, koristeći gore pomenute generatore za prostore F_ω i na njima indukovane relacije iz homoloških grupa prostora $\mathcal{F}_5$. Ovaj pristup se razlikuje od pristupa korišćenih u [7] i [19]. Pored toga, izračunaćemo homološke grupe sa Z_2 -koeficijentima za X_6, koje su do sada nijesu bile poznate. Prostor X_6 je primjer torusnog dejstva složenosti 3.

U radu [2] je dobijen i kombinatorni opis dopustivih politopa hipersimpleksa $\Delta_{n,2}$ preko aranžmana hiperravni $\mathcal{G}(n,2)$. U okviru toga je pokazano da rešetka $L(\mathcal{G}(n,2))$ ovog aranžmana daje dekompoziciju za $\Delta_{n,2}$ koja je nazvana dekompozicija na komore i svaki elemenat ovakve dekompozicije se naziva komora C_ω. Kako se prostor X_n može predstaviti kao disjunktna unija prostora $\{C_\omega \times F_\omega\}$, rezulati o strukturi ove rešetke imaju direktan uticaj na bolje razumijevanje topologije našeg prostora X_n. Mi ćemo raditi na izučavanje ovakve rešetke uz pomoć opštih metoda enumerativne kombinatorike, koji se mogu naći na primjer u radovima [21],[22] i [23].

Očekivani naučni doprinos	

Prvi doprinos sastoji se u opisu ciklova u slučaju opšteg X_n, koje bi vodili do uspješne primjene predstavljene metode za eksplicitno izračunavanje homoloških grupa za X_n sa Z_2 -koeficijentima. U tom smislu očekujemo da eksplicitno odredimo Z_2-homologije za slučajeve X_5 i X_6. Osim toga, očekujemo da opis rešetke $L(\mathcal{G}(n,2))$ pruži dodatne kombinatorne rezultate koji će omogućiti dalje izučavanje topologije prostora X_n.

Spisak objavljenih radova kandidata	

- V.Ivanović, S.Terzić: Z_2-homology of the orbit space $G_{n,2}/T^n$, Proc. Steklov Inst. Math.(2024)

Popis literature	

[1] Anton Ayzenberg and Mikiya Masuda. "Orbit spaces of equivariantly formal torus actions of complexity one". In: Transformation Groups (2023), pp. 1–34.
[2] Victor M. Buchstaber and Svjetlana Terzic. "A resolution of singularities for the orbit spaces $G_{n,2}/T^n$". In: Trudy Mat. Inst. Steklova 317 (2022), pp. 27–63.
[3] Victor M Buchstaber and Svjetlana Terzić. "The foundations of (2n, k)-manifolds". In: Sbornik: Mathematics 210.4 (2019), pp. 41–86.
[4] Victor M Buchstaber and Svjetlana Terzić. "Topology and geometry of the canonical action of T^4 on the complex Grassmannian $G_{4,2}$ and the complex projective space $\mathbf{CP}^5$". In: Mosc.Math. J. 16.2 (2016), pp. 237–273.

[5] Victor M. Buchstaber and Svjetlana Terzić. Toric topology of Grasmannians and moduli spaces of weighted pointed stable curves. 2024. eprint: preprint (math.AT).
[6] Victor M. Buchstaber and Svjetlana Terzić. "Toric topology of the complex Grassmann manifolds". In: Mosc. Math. J. 19.3 (2019), pp. 397–463.
[7] Victor M. Buchstaber and Svjetlana Terzić. "The orbit spaces $G_{n,2}/T^n$ and the Chow quotients $G_{n,2}//(\mathbf{C}^*)^n$ of the Grassmann manifolds $G_{n,2}$". In: Sbornik: Mathematics 214.12(2023), pp. 46–75.
[8] Ozgur Ceyhan. "Chow groups of the moduli spaces of weighted pointed stable curves of genus zero". In: Advances in Mathematics 221.6 (2009), pp. 1964–1978.
[9] William Fulton and Robert MacPherson. "A compactification of configuration spaces". In: Annals of Mathematics 139.1 (1994), pp. 183–225.
[10] Izrail M. Gel'fand and Robert D MacPherson. "Geometry in Grassmannians and a generalization of the dilogarithm". In: Advances in mathematics 44.3 (1982), pp. 279–312.
[11] Izrail M. Gel'fand and Vera V Serganova. "Combinatorial geometries and torus strata on homogeneous compact manifolds". In: Russian Mathematical Surveys 42.2 (1987), p. 133.
[12] Mark Goresky and Robert MacPherson. "On the topology of algebraic torus actions". In:Algebraic Groups Utrecht 1986: Proceedings of a Symposium in Honour of TA Springer. Springer. 2006, pp. 73–90.
[13] Brendan Hassett. "Moduli spaces of weighted pointed stable curves". In: Advances in Mathematics 173.2 (2003), pp. 316–352.
[14] M Kapranov. "Chow quotients of Grassmannians. I". In: ADVSOV (1993), pp. 29–110.
[15] Yael Karshon and Susan Tolman. "Topology of complexity one quotients". In: Pacific Journal of Mathematics 308.2 (2020), pp. 333–346.
[16] Sean Keel. "Intersection theory of moduli space of stable n-pointed curves of genus zero".
In: Transactions of the American Mathematical Society 330.2 (1992), pp. 545–574.
[17] Andrey Losev and Yuri Manin. "New moduli spaces of pointed curves and pencils of flat connections." In: Michigan Mathematical Journal 48.1 (2000), pp. 443–472.
[18] Yuri Manin. "Moduli stacks Lg,S". In: Mosc. Math. J. 311.1 (2004), pp. 181–198.
[19] Hendrik Suess. "Toric Topology of the Grassmannian of Planes in $\mathbf{C}^5$ and the Del Pezzo Surface of Degree 5". In: Moscow Mathematical Journal (2020).
[20] Mehdi Tavakol. "The Chow ring of the moduli space of curves of genus zero". In: Journal of Pure and Applied Algebra 221.4 (2017), pp. 757–772.
[21] Gunter M Ziegler. Lectures on polytopes. Vol. 152. Springer Science & Business Media, 2012.
[22] Stanley, Richard P. "An introduction to hyperplane arrangements." *Geometric combinatorics* 13.389-496 (2004): 24.
[23] Schenck, Hal. "Hyperplane arrangements: computations and conjectures." *Arrangements of hyperplanes—Sapporo* 62 (2009): 323-358.
[24] Orlik, Peter, and Hiroaki Terao. *Arrangements of hyperplanes.* Vol. 300. Springer Science & Business Media, 2013.
[25] S. Smale, Generalized Poincares conjecture in dimensions greater than four,
Ann. Math. 74, (1961), 391406, Bull. Amer. Math. Soc. 66, (1960),373375.
(do 30 referenci)

SAGLASNOST PREDLOŽENOG/IH MENTORA I DOKTORANDA SA PRIJAVOM

Prvi mentor	Prof. dr Svjetlana Terzić	С. Терзић (Potpis)
Drugi mentor	(Ime i prezime)	(Potpis)
Doktorand	MSc Vladimir Ivanović	V. Ivanović (Potpis)

IZJAVA

Odgovorno izjavljujem da doktorsku disertaciju sa istom temom nisam prijavio/la ni na jednom drugom fakultetu.

U Podgorici,
(navesti datum)
29.10.2024

Ime i prezime doktoranda
Vladimir Ivanović