

UNIVERZITET CRNE GORE

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET, PODGORICA

Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore

Predmet: Izvještaj komisije o pregledu i ocjeni master rada Luke Bulatovića

Vijeće Prirodno-matematičkog fakulteta na sjednici održanoj 23. aprila 2024. godine, imenovalo je Komisiju za pregled i ocjenu master rada pod nazivom „Wiener-ov indeks“, kandidata Luke Bulatovića, u sastavu:

dr Goran Popivoda, vanredni professor – član,

dr Igor Jovančević, docent – član,

dr Žana Kovijanić Vukićević, redovni professor – mentor.

Master rad je stavljen na uvid javnosti 10. aprila 2025. godine. Na navedeni rad nije bilo primjedbi u predviđenom roku.

Nakon uvida u podneseni materijal, a u vezi sa članom 22 Pravila studiranja na master studijama, podnosimo sljedeći

IZVJEŠTAJ

Master rad Luke Bulatovića, specijaliste računarskih nauka, pod nazivom „Wiener-ov indeks“ se sastoji od 78 strana originalnog teksta, uz dodatne strane koje se odnose na opšte informacije, sadržaj, izvod rada i izvod rada na engleskom jeziku. Tekst ispunjava sve zahtjeve propisane članom 20 Pravila studiranja na master studijama.

Rad pripada oblasti Diskretne matematike odnosno, uže specijalizovano, oblasti Teorije grafova. Sastoji se iz pet poglavlja: Uvod, Wiener-ov indeks nekih klasa grafova, Odnos između Wiener-ovog i drugih indeksa, Softverski alat za rad sa grafovima i izračunavanje indeksa i Zaključak. Prvo poglavlje je podijeljeno na četiri potpoglavlja, drugo na šest (od kojih se treće i četvrto sastoji od po pet nezavisnih razdjela), treće na pet i četvrto na tri potpoglavlja (drugo od ova tri potpoglavlja čini sedam razdjela).

Predmet istraživanja ovog rada je Wiener-ov indeks, koji se definiše kao suma udaljenosti između svih neuređenih parova čvorova grafa. Inicijalna primjena ove numeričke karakteristike grafa vezuje se za oblast hemije, a grafovi kojima se modeliraju molekuli nazivaju se hemijskim ili molekularnim. Atomi molekula su predstavljeni čvorovima, a hemijske veze između atoma granama grafa. Wiener-ov indeks je dobio ime po austrijsko-

američkom hemičaru H. Wiener-u koji je 1947. godine publikovao rad u kome je dao formulu za približno računanje tačke ključanja parafina: $b_p = \alpha W_e + \beta P + \gamma$, gdje su α , β i γ empirijski utvrđene konstante, W_e je Wiener-ov indeks grafa pridruženog tom alkanu, dok je P broj parova atoma ugljenika čije je rastojanje jednako 3. U analiziranom master radu navedene su i brojne kasnije primjene ovog numeričkog deskriptora grafa.

Detaljan pregled rada po poglavljima je sljedeći:

U prvoj, uvodnoj glavi (četiri potpoglavlja), detaljno je opisana motivacija, cilj rada i njegova organizacija. U potpoglavlju 1.3 dati su osnovni pojmovi, definicije i tvrđenja teorije grafova koji će se dalje koristiti.

Druga glava se sastoji od pet poglavlja: Definicija Wiener-ovog indeksa, Praktične primjene Wiener-ovog indeksa, Wiener-ov indeks stabla, Ekstremne vrijednosti Wiener-ovog indeksa, Inverzni problem za Wiener-ov indeks i Wiener-ov indeks grafa grana. U ovom poglavlju dato je više ekvivalentnih definicija Wiener-ovog indeksa $W(G)$, predstavljene klase problema koji se bave ovim numeričkim deskriptorom i navedene njegove primjene. Dati su dokazi jednakosti kojima se izražavaju Wiener-ovi indeksi nekih specijalnih klasa grafova kao i Dekartovog proizvoda dva proizvoljna grafa, u funkciji od broja čvorova i indeksa grafova koji obrazuju ovaj proizvod. Potpoglavlje 2.5 bavi se takozvanim inverznim problemom za Wiener-ov indeks: Da li za zadati prirodan broj w postoji graf G takav da je $W(G) = w$? Ako postoji, konstruisati takav graf. Opšti slučaj, za proste povezane grafove, riješen je 2000. godine. Dokazano je tvrđenje koje na gornje pitanje daje pozitivan odgovor za $w \notin \{2, 5\}$. U radu je precizno izložen ovaj dokaz.

U trećem poglavlju *Odnos između Wiener-ovog i nekih drugih indeksa* definisani su još neki grafovski indeksi od kojih ovdje ističemo varijabilni Wiener-ov i varijabilni Szeged-ov indeks, u oznakama $W^\alpha(G)$ i $Sz^\alpha(G)$. U potpoglavlju 3.2 detaljno je izložen dokaz tvrđenja: Za svaki graf G koji nije potpun i za svaki realan broj $\alpha > 1$, važi nejednakost $Sz^\alpha(G) > W^\alpha(G)$, što je rezultat naučnog rada publikovanog 2022. godine u časopisu Discrete Appl. Math. na kome je kandidat koutor sa svojim mentorom.

Poglavlje četiri predstavlja praktični originalan doprinos kandidata - razvijen je softverski alat koji omogućava generisanje, vizuelizaciju i analizu grafova uz izračunavanje njihovog Wiener-ovog indeksa. Softver je dizajniran sa fokusom na intuitivnost korisničkog interfejsa i fleksibilnost za različite istraživačke potrebe. Omogućava unos grafa, kao ulaznog podatka, na tri načina: ručno crtanje (korisnici mogu kreirati grafove koristeći ugrađeni alat za crtanje), pomoću generatora slučajnih grafova i uvozom (import) grafova. U sklopu softvera, implementirano je nekoliko generatora za slučajne grafove. Dostupne klase su: povezani, unicyklični, bipartitni grafovi i stabla sa fiksnim dijametrom, ali se relativno lako, uz izmjene koda, softver može dopuniti generatorima za druge klase grafova. Ključna funkcionalnost softvera je automatsko izračunavanje sljedećih osobina ulaznog grafa: Wiener-ov indeks, broj čvorova, broj grana, dijametar, radijus, količnik veličine i reda, minimalni i maksimalni stepen čvora, pripadnost osnovnim klasama. Skupovi osobina se, kao i klase, mogu relativno lako proširiti naknadnim izmjenama koda. Kod projekta je javno dostupan na *GitHub*-u, na adresi <https://github.com/Luka-Bulatovic/graph-algorithms>.

U glavi Zaključak sumirani se rezultati predstavljeni u radu, ukazano na potencijalnu primjenu razvijenog softvera u identifikaciji ekstremalnih grafova, što bi olakšalo validaciju teorijskih hipoteza i navedene mogućnosti proširenja na druge indekse

Zaključak: Rad „Wiener-ov indeks“ je dobro strukturiran, naučni rezultati su jasno predstavljeni. Komisija zaključuje da isti ispinjava sve konceptualne uslove i kriterijume predviđene Pravilima studiranja na master studijama, te sugeriše Vijeću PMF-a da prihvati ovaj pozitivan izvještaj i odobri dalju proceduru.

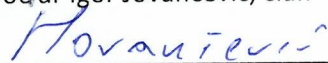
U Podgorici 06. 05. 2025. godine

Komisija:

Prof. dr Goran Popivoda, član



Doc. dr Igor Jovančević, član



Prof. dr Žana Kovijanić Vukićević, mentor

