UNIVERZITET CRNE GORE
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
Broj 2025/01-980/1
Podgorica, 06.05. 2025 god.

KOMISIJI ZA DOKTORSKE STUDIJE PRIRODNO-MATEMATIČKOG FAKULTETA

Predlažem Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta da imenuje Komisiju za ocjenu prijave teme doktorske disertacije pod nazivom "Internalnost usrednjenih Gaussovskih i NAG kvadratura za neke težinske funkcije" kandidata Velimira Ćorovića u sastavu

1. dr Miodrag Spalević, redovni profesor, mentor
   Mašinski fakultet, Univerzitet u Beogradu

2. dr Dušan Đukić, vanredni profesor, član
   Mašinski fakultet, Univerzitet u Beogradu

3. dr Marijan Marković, vanredni profesor, član
   Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore

U Podgorici, 6. 5. 2025. god.

Prof. dr Miodrag Spalević

M. Спалевић

Crna Gora
UNIVERZITET CRNE GORE
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
Broj 2025/01-980
Podgorica, 06.05. 2025 god.

UCG

UNIVERZITET CRNE GORE
Obrazac PD: Prijava teme doktorske disertacije

PRIJAVA TEME DOKTORSKE DISERTACIJE

OPŠTI PODACI O DOKTORANDU	
Titula, ime i prezime	MSc Velimir Ćorović
Fakultet	Prirodno matematički fakultet
Studijski program	Matematika
Broj indeksa	1/2022
Ime i prezime roditelja	Predrag Ćorović
Datum i mjesto rođenja	31.08.1997. godine, Nikšić
Adresa prebivališta	Krsta Kostića bb, Nikšić
Telefon	+382 67 113 699
E-mail	velimirc@ucg.ac.me ; velimir.corovic14@gmail.com
BIOGRAFIJA I BIBLIOGRAFIJA	
Obrazovanje	-Magistar (MSc) matematike, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, 2022 (prosjek 10.00) -Spec. Sci. Matematike i računarskih nauka, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, 2020 (prosjek 10.00) -Bachelor (BSc) Matematika i računarske nauke, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, 2019 (prosjek 9.57)
Radno iskustvo	-Saradnik u nastavi na Prirodno-matematičkom fakultetu, od 2020. do danas -Ispomoć u poslovima aktuara, Osiguravajuće društvo „Uniqa" (jun 2019- septembar 2019)
Popis radova	
NASLOV PREDLOŽENE TEME	
Na službenom jeziku	Internalnost usrednjenih Gaussovskih i NAG kvadratura za neke težinske funkcije
Na engleskom jeziku	Internality of averaged Gaussian and NAG quadrature for certain weight functions

Obrazloženje teme

Gaussove kvadraturne formule predstavljaju temeljni alat numeričke analize za aproksimaciju određenih integrala sa maksimalnim algebarskim stepenom tačnosti. U primjenama je, međutim, ključno procijeniti grešku i u slučaju kada je integrand proizvoljna realna funkcija, a ne samo polinom. U tu svrhu često se koriste Gauss-Kronrodove formule, koje su ekstenzija standardne Gaussove kvadraturne formule. Ipak, za mnoge težinske funkcije čvorovi Gauss-Kronrodove kvadrature nijesu realni i leže izvan intervala integracije, štaviše oni mogu biti kompleksni brojevi, što ograničava njihovu upotrebu. Kao alternativa, u istraživanjima iz poslednjih 30-tak godina razvijene su usrednjene Gaussove i NAG kvadrature, koje uvijek imaju realne čvorove.

Ipak ove formule obavezno ne posjeduju osobinu internalnosti, pa nisu primjenljive na funkcije definisane isključivo na intervalu integracije. Proučavanje internalnosti usrednjenih Gaussovih i NAG kvadratura za različite težinske funkcije (npr. Jacobijeve, Chebyshevljeve i njihove modifikacije) ima praktičan značaj, posebno u slučajevima kada su integrandi definisani samo na intervalu ili sadrže singularitete van njega.

Pregled istraživanja

Priča o Gaussovim kvadraturama započinje s Newtonom i Cotesom. Newton je 1676. godine prvi predložio opšti metod za približno određivanje integrala. Nezavisno od njega, Cotes je razvio slične metode, koje je kasnije po formi uobličio nakon što je upoznat s Newtonovim idejama. Danas su te formule poznate pod imenom Newton-Cotesove formule. Godine 1814. Gauss koristi njihove rezultate kao polaznu tačku, kombinujući ih sa sopstvenim istraživanjem hipergeometrijskih redovima, čime razvija novu metodu numeričke integracije koja značajno unapređuje tadašnje pristupe. Njegov rad je kasnije pojednostavio i formalno uobličio Jacobi, dok su ga tokom druge polovine 19. vijeka dalje razvijali Mehler, Christoffel i drugi. Na kraju se formira koherentna teorija kvadraturnih formula, koju je prvi put sistematski izložio Christoffel (1877), pa zatim Radau (1880) i Heine (1881) u svojim radovima o sfernim funkcijama.

Christoffel je Gaussovu i Jacobijevu teoriju uopštio na slučaj težinske integrala tipa

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, w(x)\, dx$$

gdje je $w(x)$ nenegativna, integrabilna funkcija, a $[a, b]$ konačan interval. Kasnije su uslijedile dodatne generalizacije na proizvoljne pozitivne mjere $d\lambda(t)$ kako na konačnim, tako i na beskonačnim intervalima – što je doprinos Stieltjesa sa samog kraja 19. vijeka. Ovi pionirski radovi postavili su temelje za razvoj brojnih varijanti kvadraturnih formula tokom 20. vijeka i dalje, sve do savremenih istraživanja.

Među svim kvadraturnim formulama sa n čvorova koje se koriste za aproksimaciju integrala $\int_a^b f(x)\, w(x)\, dx$ Gaussova kvadraturna formula $\mathcal{G}_n(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(\tau_i)$ ima najveći algebraski stepen tačnosti. Čvorovi τ_i se biraju da budu nule odgovarajućeg ortogonalnog polinoma P_n, dok su w_i pozitivne težine [16, 17]. Ortgonalni polinomi $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ zadovoljavaju dobro poznatu tročlanu rekurzivnu relaciju

$$P_{k+1}(x) = (x - \alpha_k)P_k(x) - \beta_k P_{k-1}(x), k \geq 0.$$

Primjenom Golub-Welsh-ovog algoritma [15] čvorove i težine Gaussove kvadraturne formule se mogu efikasno izračunati koristeći $O(n^2)$ aritmetičkih operacija. Budući da je relativno efikasno moguće odrediti čvorove i težine formule $\mathcal{G}_n(f)$ preostaje važan problem određivanja magnitude greške $|I(f) - \mathcal{G}_n(f)|$. Određivanje greške omogućava određivanje broja čvorova n koji je potreban za izračunavanje vrednosti integrala sa željenom tačnošću. Preveliki broj čvorova n dovodi do bespotrebnih izračunavanja vrednosti funkcije f što može biti računski skupo. Popularan pristup sastoji se u računanju nove kvadraturne formule $\mathcal{Q}_s(f)$, gde je $s > n$, sa većim stepenom tačnosti, te procjeni greške formulom $|\mathcal{Q}_s(f) - \mathcal{G}_n(f)|$.

Klasičan izbor za Q_s je Gauss-Kronrod-ova formula [7], koja predstavlja ekstenziju Gaussove kvadrature jer ima dodatnih $n+1$ čvorova i algebarski stepen tačnosti bar $3n+1$. Međutim, dodatni čvorovi Gauss-Kronrod-ove kvadrature za mnoge težinske funkcije ne pripadaju intervalu integracije, tj. te formule imaju kompleksne čvorove ili čvorove koji leže izvan intervala integracije.

Kao alternativu, D. Laurie [5] i M. Spalević [6] razvijaju usrednjene i generalizovane usrednjene kvadrature, koje postoje u slučajevima kad Gauss-Kronrod-ove formule ne postoje. Još jedna prednost novopredloženih metoda u odnosu na Gauss-Kronrod-ove formule ogleda se u jednostavnijoj konstrukciji koja je data u radovima [5] i [6]. Osim njih, nedavno je najnovija verzija usrednjenih kvadratura, u literaturi nazvana NAG formule (kvadraturne formule bazirane na dvema težinskim funkcijama), predložena u radu [14].

Ipak, pomenute formule nisu internalne za neke težinske funkcije, što ograničava njihovu upotrebu u slučaju kada je integrand f definisan samo na intervalu integracije ili ima singularitete izvan njega. Problem internalnosti pomenutih formula postao je predmet većeg interesovanja u posljednjoj deceniji. Osobina internalnosti ovih formula ispitivana je za razne težinske funkcije u radovima [1, 2, 3, 4, 8, 9, 14, 19].

U radu [5] M. Spalević daje neophodan i dovoljan uslov za internalnost usrednjenih i generalizovanih usrednjenih kvadratura za Jakobijeve težinske funkcije. Osim toga, u radovima [1, 2] razmatra se internalnost ovih formula, kao i njihovih „skraćenih" (truncated) varijanti za slučaj modifikovanih Chebyshevljevih težina prvog, trećeg i četvrtog reda. Isti problem, za slučaj Jakobijevih težina modifikovanih linearnim faktorom i linearnim divizorom, razmatran je u radu [9]. Međutim, pitanje internalnosti za slučaj Jakobijevih i Chebyshevljevih težina modifikovanih kvadratnim faktorom i divizorom ostaje otvoreno.

Cilj i hipoteze

Glavni ciljevi disertacije su:

1) Ispitivanje internalnosti usrednjenih i generalizovanih usrednjenih Gaussovih kvadratura kao i skraćenih varijanti za slučaj Jakobijevih težinskih funkcija modifikovanih kvadratnim faktorom
2) Ispitivanje internalnosti usrednjenih i generalizovanih usrednjenih Gaussovih kvadratura kao i skraćenih varijanti za slučaj Jakobijevih težinskih funkcija modifikovanih kvadratnim divizorom
3) Ispitivanje internalnosti NAG kvadratura za slučaj Jakobijevih težinskih funkcija modifikovanih kvadratnim divizorom
4) Sprovođenje odgovarajućih eksperimenata u programskom okruženju Matlab kojima će se potvrđivati teorijski rezultati

Napomena: Jacobijeve težinske funkcije kao svoje specijalne slučajeve uključuju Chebyshevljeve težine I, II, III i IV tipa.

Materijali, metode i plan istraživanja

Proučavamo internalnost i performanse više varijanti usrednjenih kvadratura Gaussovog tipa. Polazimo od radova Lauria [6] i Spalevića [5] u kojima su uvedene i analizirane usrednjene Gaussove kvadrature $G_{2n+1}^{L}(f)$ i optimalne usrednjene Gaussove kvadrature $G_{2n+1}^{S}(f)$, kao i od novijih nedavno predstavljenih usrednjenih kvadratura $G_{2n+1}^{N}(f)$ poznatih pod nazivom NAG kvadrature [14]. Poznato je da čvorovi formula $G_{2n+1}^{L}(f)$ i $G_{2n+1}^{S}(f)$ čine nadskup skupa čvorova polazne Gausove kvadrature $G_n(f)$ i da njihovih dodatnih $n+1$ čvorova prepliću (separišu) postojeće čvorove Gaussove kvadrature, kao i da su težinski koeficijenti w_i pozitivni, što je poželjna osobina kod svih kvadratura. Osim toga poznato je da se dodatni čvorovi formula $G_{2n+1}^L(f)$ i $G_{2n+1}^S(f)$ mogu odrediti kao nule polinoma

$$P^* = P_{n+1} - \beta^* P_{n-1}$$

gdje je $\beta^* = \beta_n$ ($\beta^* = \beta_{n+1}$). Spalević je u [15] pokazao da se te formule mogu predstaviti trodijagonlanom simetričnom matricom čija je glavna dijagonala određena vektorom $[\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_0]$ dok su elementi gornje i donje sporedne dijagonale $[\sqrt{\beta_1}, \sqrt{\beta_2}, \ldots, \sqrt{\beta_n}, \sqrt{\beta^*}, \sqrt{\beta_{n-1}}, \ldots, \sqrt{\beta_1}]$. Kao što je navedeno ranije, za razliku od Gauss-Kronrodovih formula, čvorovi formula $G_{2n+1}^L(f)$ i $G_{2n+1}^S(f)$ uvijek postoje, realni su i prepliću (separišu) čvorove G_n. Iz svojstva preplitanja slijedi da su pomenute formule internalne ako i samo ako najmanji i najveći čvor leže u intervalu intergacije , pa se svojstvo internalnosti tih formula svodi na nejednakosti

$$\frac{P_{n+1}(a)}{P_{n-1}(a)} \geq \beta^*, \qquad \frac{P_{n+1}(b)}{P_{n-1}(b)} \geq \beta^* \quad (**)$$

Sličnim rezonovanjem internalnost skraćenih kvadratura (truncated quadrature rule) se svodi na dvije nejednakosti. Budući da su ti problemi riješeni za slučaj Jakobijevih težina (koje uključuju Chebyshevljeve težine I,II,III i IV reda) kao i njihove modifikacije linearnim faktorima i divizorima, plan je da se u ovoj disertaciji problem ispita i za slučaj kad su pomenute težine modifikovane kvadratnim faktorom i kvadaratnim divizorom tj. slučaj težina oblika

$$w(x) = \frac{(1-x)^a(1+x)^b}{(z-x)(\bar{z}-x)}, \qquad w(x) = (z-x)(\bar{z}-x)(1-x)^a(1+x)^b, \qquad x \in [-1,1].$$

gdje je $a, b > 1$, $z = x + iy, x \in R,\ y > 0$. Plan je da se problemu pristupi na način predstavljen u radu [9] koji uključuje primjenu algoritama modifikacije navednih u Gautschijevoj knjizi [18]. Koristeći taj algoritam uslov internalnosti (**) će se svesti na nejednakost u kojoj figurišu poznati Jacobijevi ortogonalni polinomi i koeficijenti α_k, β_k iz njihove tročlane rekurzije. U slučaju skraćenih formula, internalnost će se takođe svesti na nejednakosti sličnog tipa. Planirano je i ispitivanje internalnosti novoustanovljenih usrednjenih kvadratura NAG iz rada [14], za koje autori navode da su internalne u nekim slučajevima kada formule $G_{2n+1}^L(f)$, $G_{2n+1}^S(f)$ nijesu. Međutim, čvorovi NAG kvadratura nijesu nadskup Gaussovih čvorova što ne predstavlja veliki problem ako određivanje vrijednosti podintegralne funkcije nije računski skupo.

Cilj svih pomenutih formula jeste procjena magnitude greške Gaussove kvadraturne formule G_n. Stoga je planirano implementiranje algoritama za njihovo izračunavanje, kao i sprovođenje više numeričkih eksperimenata radi dobijanja uvida u kvalitet procjene greške, raspored čvorova i osobinu internalnosti u nekim specijalnim slučajevima.

Očekivani naučni doprinos

Očekivani naučni doprinos ove disertacije ogleda se u ispitivanju internalnosti više varijanti usrednjenih Gaussovih kvadratura koje se koriste za procjenu greške Gaussove kvadraturne formule $\mathcal{G}_n$. To je jedno interesantno pitanje, koje konačno sa pitanjem usrednjenih kvadratura dobija rešenje u vidu praktičnih i jednostavnih ocena greške u Gaussovoj kvadraturnoj formuli $\mathcal{G}_n$, koja je najefikasnija kvadraturna formula koju je čovek uveo. Ovo pitanje ima poseban značaj ne samo za unapređenje teorije numeričke analize, već i za primjenu u inžinjerskim naukama gdje se numerička integracija široko koristi. Pored teorijskog doprinosa, očekuje se i razvoj softverskog alata u Matlab okruženju koji će omogućiti efikasniju i precizniju primjenu kvadratura u slučajevima kada težinska funkcija ima odgovarajući oblik.

Spisak objavljenih radova kandidata

-

Popis literature

[1] Djukić, D. Lj., Mutavdžić Djukić, R. M., Reichel, L., Spalević, M.M. Internality of generalized averaged Gauss quadrature rules and truncated variants for modified Chebyshev measures of the first kind, J.Comput. Appl. Math., V.398, 2021, Art.113696.

[2] Djukić, D. Lj., Mutavdžić Djukić, R. M., Reichel, L., Spalević, M.M. Internality of generalized averaged Gauss quadrature rules and truncated variants for modified Chebyshev measures of the third and fourth kinds, Numer. Algorithms, V.92, 2022, pp.523-544.

[3] Djukić, D. Lj., Mutavdžić Djukić, R. M., Reichel, L., Spalević, M. M. Weighted averaged Gaussian quadrature rules for modified Chebyshev measures, Appl. Numer. Math., 2023.

[4] Djukić, R. M., Reichel, L., Spalević, M.M Truncated generalized averaged Gauss quadrature rules, J. Comput. Appl. Math., V.308, 2016, pp.408-418.

[5] Spalević, M. M. On generalized averaged Gaussian formulas, Math. Comp., V.76, 2007, pp.1483-1492.

[6] D. P. Laurie, Anti-Gaussian quadrature formulas, Math. Comp. 65 (1996) 739–747.

[7] Notaris, S. Gauss-Kronrod quadrature formulae - a survey of fifty years of research, Electron. Trans. Numer. Anal., V.45, 2016, pp.371-404.

[8] Djukić, D. Lj., Reichel, L., Spalević, M.M., Tomanović, J.D. Internality of generalized averaged Gaussian quadrature rules and truncated variants for modified Chebyshev measures of the second kind, J. Comput. Appl. Math., V.345, 2019, pp.70-85.

[9] Djukić, D. Lj., Mutavdžić Djukić, R.M., Reichel, L., Spalević, M.M Internality of averaged Gauss quadrature rules for certain modification of Jacobi measures, Applied and Computational Mathematics, 2023, 22, 4, 426-442.

[10] W. Gautschi, "A survey of Gauss-Christoffel quadrature formulae", in: P. L. Butzer and F. Fehér (eds.), E. B. Christoffel: The influence of his work on mathematics and the physical sciences, Birkhäuser Basel, pp. 72–147, 1981.

[11] L. Reichel, M. M. Spalević, A new representation of generalized averaged Gauss quadrature rules, Appl. Numer. Math. 165 (2021) 614–619.

[12] M. M. Spalević, On generalized averaged Gaussian formulas II, Math. Comp. 86 (2017) 1877–1885.

[13] M. M. Spalević, A note on generalized averaged Gaussian formulas for a class of weight functions, Numer. Algorithms 85 (2020) 977–993.

[14] Aleksandar V. Pejčev, Lothar Reichel, Miodrag M. Spalević, Stefan M. Spalević, A new class of quadrature rules for estimating the error in Gauss quadrature, Applied Numerical Mathematics, 2024, Volume 204, 2024, Pages 206-221, ISSN 0168-9274.

[15] Golub, G.H., Welsch, J.H. Calculation of Gauss quadrature rules, Math. Comp., V.23, 1969, pp.221-230.

[16] Gautschi, W. Orthogonal Polynomials: Computation and Approximation, Oxford University Press, 2004.

[17] Szego, G. Orthogonal Polynomials, 4th ed., Amer. Math. Soc., 1975.

[18] W. Gautschi, A historical note on Gauss-Kronrod quadrature, Numer. Math. 100 (2005) 483–484.

[19] D. Lj. Djukić, L. Reichel, M. M. Spalević, J. D. Tomanović, Internality of generalized averaged Gauss rules and their truncations for Bernstein Szego weights, Electron. Trans. Numer. Anal. 45 (2016) 405–419.

[20] Dušan Lj. Djukić, Lothar Reichel, Miodrag M. Spalević, Internality of generalized averaged Gaussian quadrature rules and truncated variants for measures induced by Chebyshev polynomials, Applied Numerical Mathematics, Volume 142, 2019, Pages 190-205, ISSN 0168-9274.
[21] Laurie, D.P. Stratified sequence of nested quadrature formulas, Quaest. Math., V.15, 1992, pp.365-384.
[22] Patterson, T.N.L. Stratified, nested, and related quadrature rules, J. Comput. Appl. Math., V.112, 1999, pp.243-251.
[23] Ehrich, S. On stratified extension of Gauss-Laguerre and Gauss-Hermite quadrature formulas, J. Comput. Appl. Math., V.140, N.1-2, 2002, pp.291-299.
[24] A. S. Kronrod, Integration with control of accuracy, Soviet Phys. Dokl. 9 (1964) 17–19.

Saglasnost mentora i doktoranda sa prijavom		
Odgovorno potvrđujem da sam saglasan sa temom koja se prijavljuje.		
Prvi mentor	Prof. dr Miodrag Spalević	М. Спалевић
Drugi mentor	-	-
Doktorand	MSc Velimir Ćorović	Велимир Ћоровић

IZJAVA

Odgovorno izjavljujem da doktorsku disertaciju sa istom temom nisam prijavio/la ni na jednom drugom fakultetu.

U Podgorici,
6.5.2025. год.

Ime i prezime doktoranda

Велимир Ћоровић