

Crna Gora
UNIVERZITET CRNE GORE
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
Broj 2221
Podgorica, 20. 07. 2018.

UNIVERZITET CRNE GORE
VIJEĆU PRIRODNO-MATEMATIČKOG FAKULTETA
PODGORICA

Predmet: Izvještaj Komisije o pregledu i ocjeni magistarskog rada kandidata **Đura Jaredića**, diplomiranog matematičara

Vijeće Prirodno-matematičkog fakulteta u Podgorici, održanoj 12.06. 2018.godine donijelo je odluku o imenovanju Komisije za ocjenu i odbranu magistarske teze pod nazivom „**Ocjena Gausove krivine za minimalne površi metodom kompleksne analize.**“

kandidata **Đura Jaredića**, diplomiranog matematičara, u sljedećem sastavu:

Dr David Kalaj, redovni profesor PMF-a, mentor

Dr Svjetlana Terzić, redovni profesor PMF-a, član

Dr Marijan Marković, docent PMF-a, član

Na osnovu uvida u dostavljeni materijal i uslova utvrđenih Zakonom o visokom školstvu i Statutom Univerziteta Crne Gore, Komisija podnosi sljedeći

IZVJEŠTAJ

Magistarski rad kandidata **Đura Jaredića**, diplomiranog matematičara, pod nazivom: „**Ocjena Gausove krivine za minimalne površi metodom kompleksne analize**“, izložen je na 68 strana strana, A4 formata i sadrži 10 slika, 4 grafikona, 20 navoda literature. Rad sadrži sljedeća poglavlja: Predgovor, Izvod rada, Abstract, Sadržaj, Uvod, Osnovni pojmovi, Minimalne površi, Ocjena Gausove krivine, Izoperimetrijska nejednakost, Zaključak, Reference. Predmet istraživanja

magistarske teze **Đura Jaredića**, pripada oblasti kompleksne analize i diferencijalne geometrije.

Postavljeni ciljevi rada su:

- Primjena teorije harmonijskih funkcija u ravni i ograničenja vezanih za koeficijente ravanskih harmonijskih funkcija prilikom ocjene Gausove krivine minimalnih površi.
- Osvrt na moguća poboljšanja ocjene Gausove krivine minimalnih površi uz pomoć adekvatnih harmonijskih funkcija
- Geometrijska interpretacija svojstva minimalnih površi, kao i harmonijskih površi, kroz dokaz izoperimetrijske nejednakosti za iste.

U **Uvodu** rada na 2 strane, dat je kratak osvrt na istorijat vezan za minimalne površi. Dato je obrazloženje navedena tema priblaži veliki broj istraživača u njenom razvoju. Takođe, detaljno je izložen plan istraživanja kao i šta pojedina poglavlja sadrže. Uopšteno je naglašena veza između harmonijskih funkcija i minimalnih površi kroz Vajerštras-Eneperovu parametrizaciju. Istaknuto je da se ocjena Gausove krivine postiže pomoću Heincove leme, tačnije njenog uopštenja. Napomenuto je i da će izoperimetrijska nejednakost biti dokazana ne samo za minimalne nego i za harmonijske površi koje se posmatraju kao njihovo najprirodnije uopštenje.

U poglavlju **Osnovni pojmovi** na 13 strana, dati su osnovni pojmovi i teoreme vezane za harmonijske funkcije, funkcije ograničene varijacije, analitičke funkcije. Od pojmova iz oblasti diferencijalne geometrije izloženi su pojmovi krive u prostori kao i površi, Gausova i srednja krivina i Freneov pokretni reper. Naveden je jedan primjer koji daje jednostavan dokaz određene nejednakosti primjenom Lagranžovih množitelja, tačnije uslovnih ekstremuma i primjer za razvoj jedne funkcije u Furijeov red po kosinusima primjenom dobro poznatih formula. Rečeno je da su to bitni primjeri za dalji tok istraživanja što opravdava njihovo navođenje u radu.

U poglavlju **Minimalne površi** na 10 strana je izloženo prirodno uvođenje definicije minimalnih površi. Izvedena je diferencijalna jednačina koju površ mora da ispunjava da bi bila minimalna a iz toga je lako zaključeno da je sama definicija minimalnih površi ekvivalentna sa nultim srednjim zakrivljenjem. Dato je 8 slika sa

primjerima minimalnih površi sa napomenom da je to upravo kako su one istorijski otkrivane. Data su i dva grafikona koja rasvjetljavaju pojam izotermalne parametrizacije kao parametrizacije koja čuva uglove između krivih. Formulisu se veoma bitne teoreme Vajerstas-Eneperove parametrizacije kao i njene posljedice. Dat je i primjer kojim se Vajerstras-Eneperova parametrizacija minimalne površi lako ilustruje. Takođe, navedeni su osnovni pojmovi vezani za harmonijske površi i dati su uslovi na osnovu kojih se data harmonijska površ može predstaviti pomoću funkcija ograničene varijacije. Formulisana je i teorema koja obrazlaže mogućnost neprekidne ekstenzije na granicu oblasti.

U poglavlju **Ocjena Gausove krivine** na 20 strana izložene su formule za računanje Gausove krivine a neke od njih su i izvedene povezivanjem sa teoremama iz prethodnog poglavlja. Obrazloženo je zašto je neophodno ocijeniti izraz $|f_z(0)|^2 + |f_{\bar{z}}(0)|^2$ i naglašava da će ocjena biti izvedena za minimalne površi iznad jediničnog diska u koordinatnom početku. Detaljno se dokazuju teoreme koje u dokazu koriste Parselvalovu jednakost koje povezuju funkciju $\Lambda(t)$ sa koeficijentima funkcije f . Hronološki se prikazuju svojstva funkcije $\Lambda(t)$ i kroz konačnu teoremu iskorišćena su sva svojstva u dokazu ocjene Gausove krivine. Prikazan je grafikon funkcija kojim se ocjena može dostići i pokazuje da je gornja ocjena za sumu $|f_z(0)|^2 + |f_{\bar{z}}(0)|^2$ konstanta $\frac{27}{4\pi^2}$ (harmonijska funkcija koja slika jedinični disk u unutrašnjost jednakostraninog trougla) ali i da ocjena za Gausovu krivinu $\frac{16\pi^2}{27}$ nije najbolja ocjena iz razloga što dilatacija dobijene funkcije nije kvadrat analitičke funkcije. Pretpostavlja se ocjena za Gausovu krivinu da je $\frac{\pi^2}{2}$ sa predlogom funkcije kojom bi se ta ocjena mogla dostići.

U poglavlju **Izoperimetrijska nejednakost** na 16 strana, dokazuje se izoperimetrijska nejednakost prvo za ravanske krive kao najprostijeg primjera minimalne površi. Izložen je dokaz koji koristi Wirtinger-ovu nejednakost. Zatim se dokazuje izoperimetrijska nejednakost za minimalne površi korišćenjem metoda diferencijalne geometrije, a djelimično i metoda linearne algebre i diferencijalnih jednačina. Zaključeno je da mora postojati regularnost na granici oblasti što sužava klasu površi koja ispunjavaju izoperimetrijsku nejednakost. U posljednjem dijelu poglavlja je dokazana izoperimetrijska nejednakost za harmonijske površi koje ne moraju imati regularnost na granici. Dokaz se izvodi korišćenjem teorema za predstavljanje harmonijskih površi i osobinom da one imaju nepozitivnu

Gausovu krivinu u slučaju regularnih harmoniskih površi. Na kraju, napravi se niz regularnih harmonijskih površi koje konvergiraju datoj neregularnoj površi dok se konvergencija potvrđuje formulacijom adekvatnih teorema.

Zaključci ove magistarske teze su izloženi na 1 strani i prikazuju sažet prikaz dobijenih rezultata kao i mogućnost ekstenzije dobijenih rezultata na širu klasu površi u slučaju izoperimetrijske nejednakosti, a u slučaju ocjene Gausove krivine dato je podsjećanje na pretpostavku najbolje ocjene sa naznakom da za sada nema dokaza kojom bi se potvrdila pretpostavljena gornja ocjena.

U skladu sa zadatim ciljevima ovog magistarskog rada kandidat je zaključio, da budući istraživači moraju izučavati moraju uzeti u obzir svojstva harmonijskih funkcija u ravni prilikom izučavanja minimalnih površi i metoda kompleksne analize. Gausova krivina, kao bitna osobina minimalnih površi, najbolje se može ocijeniti primjenom izloženih metoda. U dobijanju ideja, za dalje proučavanje, dobro je vidjeti minimalne površi kao filmove od sapunice što olakšava vizuelnu interpretaciju.

Zaključak i predlog Komisije

Na osnovu svega gore navedenog, Komisija konstatuje da je kandidat **Đuro Jaredić** u potpunosti realizovao predviđeni plan i obim istraživanja pod naslovom: „**Ocjena Gausove krivine za minimalne površi primjenom metoda kompleksne analize**“. Rezultati dobijeni ovim istraživanjem predstavljaju dobro koncipirane naučne rezultate, koji predstavljaju dobru osnovu za buduća istraživanja.

Komisija predlaže Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta u Podgorici, da rad kandidata **Đura Jaredića**, diplomiranog matematičara, pod naslovom: „**Ocjena Gausove krivine za minimalne površi primjenom metoda kompleksne analize**“ prihvati kao uspješan magistarski rad i odobri njegovu javnu usmenu odbranu.

Podgorica

Komisija

20.07.2018.

Dr David Kalaj, redovni profesor PMF-a u Podgorici, mentor



Dr Svjetlana Terzić, redovni profesor PMF-a u Podgorici, član



Dr Marijan Marković, docent PMF-a u Podgorici, član

