

**UNIVERZITET CRNE GORE
VIJEĆU PRIRODNO-MATEMATIČKOG FAKULTETA**

Predmet: Izvještaj komisije o podobnosti teme za izradu magistarskog rada pod nazivom „Konveksne i univalentne harmonijske funkcije u kompleksnoj ravni i njihova geometrija“ kandidata Antona Đokaja.

Vijeće Prirodno-matematičkog fakulteta na sjednici održanoj 04.12.2018. godine imenovalo je mentora i Komisiju za ocjenu teme magistarskog rada pod nazivom „Konveksne i univalentne harmonijske funkcije u kompleksnoj ravni i njihova geometrija“ kandidata Antona Đokaja.

Nakon uvida u podneseni materijal, a u vezi sa članom 24 Pravila studiranja na postdiplomskim studijama, podnosimo sljedeći

IZVJEŠTAJ

1) Podaci o kandidatu

Anton Đokaj rođen je 13. juna 1994. godine u Podgorici. Osnovnu i srednju školu završio je u Tuzima. Za ostvareni uspjeh tokom osnovnog i srednjeg obrazovanja dobio je diplomu „Luča“ i proglašavan je za đaka generacije.

Tokom ovog perioda učestvovao je na Državnim takmičenjima iz matematike i biologije i ostvario zapažene rezultate. Predstavljao je Crnu Goru na Balkanskim i Internacionalnim (međunarodnim) Olimpijadama iz Matematike. Studijske 2013/14 godine upisao je Prirodno-matematički fakultet Univerziteta Crne Gore, odsjek matematika. Osnovne studije (Bachelor) završio je u roku sa prosječnom ocjenom A (10.00).

Aktivno je učestvovao na seminaru „Measures of Noncompactness and Applications“, Priština 2014, pod pokroviteljstvom DAAD-a i na seminaru „Optima“ pod organizacijom CANU-a u septembru 2016. godine. Aktivno učestvuje i u pripremama učenika osnovnih i srednjih škola za državna takmičenja iz matematike.

Studijske 2016/17 godine upisao je specijalističke studije, odsjek Teorijska matematika, na PMF-u i završio sa prosjekom 10 i uspješno odbranio specijalistički rad „Konformna preslikavanja između jednostruko i dvostruko povezanih oblasti“.

Od studijske godine 2017/18 je angažovan kao saradnik u nastavi pri Prirodno-matematičkom fakultetu. Studijske 2017/18 godine upisao je magistarske studije i položio je sve ispite iz prvog semestra sa ocjenom 10.

Za postignute rezultate u toku studiranja dobio je Studentsku nagradu Univerziteta Crne Gore za najboljeg studenta PMF-a (2015/16), Plaketu Univerziteta (2017), stipendiju CANU (2017) i Studentsku nagradu Gradske opštine Tuzi.

2) Obrazloženje teme

- **Naučna oblast**

Predložena tema pripada oblasti kompleksne analize, konkretno teoriji harmonijskih i analitičkih preslikavanja kompleksne ravni.

- **Predmet rada**

Ako je data konveksna oblast u kompleksnoj ravni i homeomorfizam sa jedinične kružnice u granicu te oblasti onda harmonijska funkcija koja se dobija kao rješenje odgovarajućeg Dirihleovog problema za jedinični disk je univalentna. Međutim, uslov da funkcija na granici bude homeomorfizam nije neophodan, štaviše ni uslov konveksnosti. U ovom radu će biti pokazano da teorema važi i pod slabijim uslovima.

Klasu S analitičkih funkcija čine sve univalentne analitičke funkcije iz jediničnog diska D , sa svojstvima $f(0) = 0$ i $f'(0) = 1$. Prirodno se nameće posmatranje klase S_H^0 , harmonijskih univalentnih funkcija $h + \bar{g}$ iz jediničnog diska koje čuvaju orijentaciju sa svojstvima $h(0) = g(0) = 0$, $h'(0) = 1$, $g'(0) = 0$. Ova familija je normalna i kompaktna što je čini idealnom za uopštenje familije S , naročito u vidu Koebe $\frac{1}{4}$ teoreme.

- **Naučni cilj rada**

U klasi S analitičkih funkcija bitnu ulogu igra Koebe $\frac{1}{4}$ teorema. Ime je dobila upravo po samom sadržaju. Naime, svaka funkcija iz klase S sadrži u svom rangu disk $|w| < \frac{1}{4}$. Koebe-ova funkcija $\frac{z}{(1-z)^2}$, koja slika jedinični disk u kompleksnu ravan bez dijela realne ose od $-\infty$ do tačke $z_0 = -\frac{1}{4}$, pokazuje da je disk poluprečnika $1/4$ najveći disk koji je sadržan u rangu svih funkcija iz S .

U radu će se izložiti analogna teorema za familiju S_H^0 , koja u sebi sadrži klasu S . Tim rezultatom se tvrdi da svaka funkcija iz klase S_H^0 sadrži disk $|w| < \frac{1}{16}$. Ostaje otvoreno pitanje da li je disk poluprečnika $\frac{1}{16}$ najveći disk koji je sadržan u rangu svih funkcija iz klase S_H^0 . Harmonijska Koebe funkcija sugerise da bi se konstantna $\frac{1}{16}$ mogla poboljšati do $\frac{1}{6}$.

Poslije dokaza teoreme za familiju S_H^0 , analogne Koebe-ovoj $\frac{1}{4}$ teoremi za familiju S , u radu rezultat će biti poboljšán za podfamiliju k -kvazikonformnih preslikavanja unutar familije S_H^0 . Puštanjem da $k \rightarrow 0$ će se dobiti familija analitičkih funkcija unutar klase S_H^0 , odnosno familija S . Interesantno je da dobijeni rezultat, kao specijalan slučaj navedene teoreme, predstavlja upravo Koebe $\frac{1}{4}$ teoremu za klasu S .

• Naučne metode

U ovom radu će se koristiti standardne metode kompleksne analize.

U centralnom dijelu rada biće korišćena i teorija ekstremne dužine familije krivih. Ekstremna dužina kao konformna invarijanta daje način da se odredi (ili barem procijeni) modul proizvoljne dvostruko povezane oblasti.

Za konstrukciju harmonijskih preslikavanja koja su konveksna po određenom pravcu biće korišćen metod "Shear construction".

• Aktuelnost problematike

Harmonijska preslikavanja su se godinama izučavala prvenstveno kao dio diferencijalne geometrije, naročito zbog veze sa parametrizacijom sa minimalnim površima. Međutim, zbog veze sa univalentnim analitičkim preslikavanjima, odnosno otkrivanjem mogućnosti da se uopštavaju određeni rezultati iz klase konformnih preslikavanja i u klasu univalentnih harmonijskih funkcija, one su postale objekat intenzivnih istraživanja i u kompleksnoj analizi. U tom pravcu bitnu ulogu je igrao izvrsni rad poznatih svjetskih matematičara James Clunie-a i Terry Sheil-Small-a.

I uprkos brzom razvoju ove oblasti, brojni problemi su ostali otvoreni i neriješeni. Zato, iako u većini slučajeva analitičke funkcije služe kao modeli za generalizaciju rezultata nad harmonijskim preslikavanjima, postoje slučajevi kada je pitanje uopštenja rezultata i dalje otvoreno, a i slučajevi kada se ispostavi da je neko svojstvo specifično samo za analitičke funkcije.

3) Zaključak

Uvidom u podnesenu dokumentaciju, Komisija je utvrdila da predložena tema kandidata Antona Đokaja ima jasno definisane ciljeve i metode istraživanja i očekivane rezultate.

Predlažemo Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta da odobri izradu magistarskog rada „Konveksne i univalentne harmonijske funkcije u kompleksnoj ravni i njihova geometrija“.

U Podgorici, 17. decembra 2018. godine

KOMISIJA

Prof. dr David Kalaj, mentor



Prof. dr Žarko Pavićević, član



Doc. dr Marijan Marković, član

