

OCJENA PODOBNOSTI DOKTORSKE TEZE I KANDIDATA

OPŠTI PODACI O DOKTORANDU	
Titula, ime i prezime	Master Edin Liđan
Fakultet	Prirodno-matematički fakultet Univerziteta Crne Gore
Studijski program	Doktorske studije matematike
Broj indeksa	1/15
Podaci o magistarskom radu	Kriptosistemi s javnim ključem u funkciji rješavanja problema autentifikacije i nepobitnosti, teorija brojeva i kriptografija, Filozofski fakultet Univerzitet u Zenici, Bosna i Hercegovina, 15.03.2013, srednja ocena (8,86)
NASLOV PREDLOŽENE TEME	
Na službenom jeziku	Topološke karakteristike popločavanja generalisanim poliominima
Na engleskom jeziku	Topological characteristics of tillings with generalized polyominoes
Datum prihvatanja teme i kandidata na sjednici Vijeća organizacione jedinice	21.12.2018
Naučna oblast doktorske disertacije	kombinatorika
Za navedenu oblast matični su sljedeći fakulteti	
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta Crne Gore	
A. IZVJEŠTAJ SA JAVNE ODBRANE POLAZNIH ISTRAŽIVANJA DOKTORSKE DISERTACIJE	
U ponedjeljak 10.12.2018, u 12 časova u Sali 210 na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta Crne Gore, doktorand Edin Liđan je pristupio odbrani polaznih istraživanja doktorske teze „Topološke karakteristike popločavanja generalisanim poliominima“ u prisustvu sva tri člana komisije u sastavu: dr Svjetlana Terzić, PMF UCG, Crna Gora (predsednik komisije), dr Žana Kovijanić-Vukićević, PMF UCG, Crna Gora i dr Đorđe Baralić, MI SANU, Srbija (mentor). U 25 minutnom izlaganju kandidat je predstavio osnove probleme, najznačajnije rezultate Conway-a, Lagarias-a i Reid-a na koje se njegovo istraživanje prirodno nastavlja, objasnio metode grupe homologija popločavanja i simplicijalne komplekse asociirane sa poliominima popločavanjima čija se kombinatorika i topologija žele proučavati u disertaciji. Kandidat je prezentovao dokaze nekoliko originalnih rezultata koji će ući u doktorsku disertaciju i uspešno oslikao dva glavna toka istraživanja. Pored prezentacije, kandidat je za članove komisije pripremio pisani materijal od 40 strana koji je sublimat njegovih dosadašnjih rezultata i koji šire objašnjava ono što je do sada u istraživanju urađeno, kao i literaturu koja je korišćenja u dosadašnjim istraživanjima. Posle izlaganja komisije je pristupila diskusiji i postavljanju pitanja kandidatu o dosadašnjim rezultatima, hipotezama i potencijalno novim pravcima istraživanja. Odgovarajući na pitanja	

kandidat je dao dodatna objašnjenja i probleme koje treba prevazići u dobijanju novih rezultata. Objasnio je topološke i kombinatorne razlike u odnosu na slučaj u ravni. U diskusiji sa komisijom je potvrđeno da predložena tema ima naučnu relevantnost za nekoliko matematičkih disciplina.

Komisija je jednoglasno utvrdila da je kandidat uspešno odbranio polazna istraživanja.

B. OCJENA PODOBNOSTI TEME DOKTORSKE DISERTACIJE

B1. Obrazloženje teme

Problemi popločavanja su tradicionalno proučavani u kombinatorici. Iako promišljanja i istraživanja ovih problema sežu još u daleku prošlost, zbog njihove važnosti za arhitekturu, umjetnost, kompjutersku grafiku, optimizaciju i druge primjene aktuelni su i danas. U ovoj disertaciji se nastavlja pravac istraživanja započet u matematici prije 30 godina čija je osnovna ideja primjena algebarske topologije na ove probleme. U tezi će se razvijati novi metodi dodeljivanja topoloških invarijanti problemu popločavanja nekih površi ili mnogostrukosti sa singularitetima, mnogostrukost sa granicom, sa geometrijskim oblicima čija kombinatorna struktura zadržava većinu osobina poliomino oblika. Pored proučavanja i generalizacije postojećih klasa primjera u kojem se saznanja o poliomino popločavanjima dobijaju iz određenih homoloških grupa, u ovom istraživanju razmatrat će se i novi topološki prostori asocirani sa teselacijama i određivati njihove topološke karakteristike koje će pored novih saznanja otvoriti i novi pravac istraživanja u ovoj oblasti.

B2. Cilj i hipoteze

Cilj disertacije je da generalizuje rezultate vezane za homološke grupe popločavanja poliomino oblicima u ravni u slučaju kada je neka topološka površ sa dozvoljenim singularitetima i granicom podjeljena na „ćelije“ na način da se može postaviti pitanje egzistencije popločavanja oblicima čiji je kombinatorni karakter isti kao i kod poliomina. Hipoteza je da netrivialnost homoloških grupa predstavlja opstrukciju za postojanje popločavanja i u ovom slučaju i u generalizacijama na više dimenzije. Proučava će se i topološke invarijante kao što su Bettijevi brojevi, homotopski tip i kategorija simplicijalnih kompleksa koji se mogu asocirati popločavanju i pokazati da se iz njih mogu dobiti saznanja i o nepotpunim popločavanjima sa poliomina. Hipoteza je da simplicijalni kompleksi asocirani sa domino popločavanjima imaju homotopski tip vedža sfera, ali da nisu šelabilni kompleksi.

B3. Metode i plan istraživanja

Centralna tema disertacije je problem popločavanje topološke površi sa izolovanim singularitetima i granicom, koja je podeljena na poligonalne ćelije tako da se ćelije mogu seći samo po zajedničkoj ivici ili zajedničkom tjemenu. Ovu strukturu nazivamo ćelijska mreža. Skup geometrijskih objekata kojima popločavamo površ su generalisani poliomino oblici koji se sastoje od povezanih poligonalnih ćelija po principu ivica za ivicu kao i kod klasičnih poliomina. U ovom problemu koji posmatramo nije nam bitna geometrija i metrika na površi, jer postavljanje poliomina shvatamo topološki, tj. kao utapanje poliomina na ćelijsku mrežu tako da se ćelija određenog oblika slika homeomorfizmom na ćeliju istog oblika u mreži. U odnosu na klasični slučaj razmatrat ćemo i mreže koje mogu da se sastoje i od različitih vrsta poligona i poliomine oblike koje povezuju različite poligone.

U ovom istraživanju relevantne su kombinatorne veze između ćelija mreže i samih poliomina. Polazna je opeservacija da se homološka grupa popločavanja može definisati isto

kao i u radu M. Reida i da netrivialnost ove homološke grupe predstavlja opstrukciju za postojanje popločavanja. Osnovni model sa kojim radimo je veliki poligon u ravni izdjeljen na ćelije, dok su ivice ovog poligona identifikovane tako da njihovim lepljenjem dobijamo površ sa singularitetima. U ovom modelu neke ćelije mogu biti „isečene“, ali propisanim lepljenjem dobija se odgovarajuća ćelija mreže.

U monografiji kod Stilwella pokazano je da se sve toploške površi dobijaju iz ovakvih modela. Posebno su zanimljivi slučajevi orjentisanih 2 – mnogostrukosti (sa granicom) popločavani klasičnim poliominima kao što su domina, trimini, tetramini, pentonimi, heksamini itd. Ideja je da računajući homološku grupu generišemo kombinatorne dokaze pomoću bojenja. Razvijaće se metod homologije i u slučajevima viših dimenzija gde su nam ćelije politopalnog oblika. U slučaju dimenzije 3 radi se o generalizaciji poliomina u prostoru koji je takođe dosta proučavan u matematici. Cilj nam je da otkrijemo klase primera koji uopštavaju metod lepljenja ivica poligona razvijen kod R. Kocha, tako što su nam bazni objekti mnogostrukosti sa singularitetima nastale iz lepljenja odgovarajućih pljosni poliedra.

Pored osnovnog pitanja da li je popločavanje uopšte moguće, u slučaju kada ono postoji, postavlja se i pitanje broja različitih načina da se to učini. Poznato je da se mnogi interesantni nizovi brojevi kao što su Fibonačijev i Lukasov niz mogu prepoznati kao broj načina da se određenim skupom oblika poploča neka klasa figura u ravni. Ovaj problem je u slučaju površi još zanimljiviji, jer i sama topologija utiče na broj mogućnosti da pravilno postavimo poliomine. Očekujemo da zanimljive nove rezultate u ovom pravcu dobijemo koristeći poznate kombinatorne metode i kombinujući toploške principe lepljenja poligona. Podsetimo, ovi problemi su specijalni slučajevi razbijanja grafa na podgrafove izomorfne sa unapred zadatim skupom grafova. Ovo istraživanje blisko je sa klasičnim pitanjima postojanja ulaganja grafa u površ i određivanja roda grafa. Posebno ćemo razmatrati broj različitih domino popločavanja kvadratne mreže na torusu i mreža na torusu sa ručkom nastale iz identifikacija ivica astečkog dijamanta sa dominama da bi uopštili klasične rezultate o popločavanju pravougaonika i astečkog dijamanta u ravni sa dominama.

Važan pravac ovog istraživanja je i razvijanje novih ideja da se algebarska topologija primenjuje na probleme poliomino popločavanja. U praksi se može desiti i da se ne može potpuno pokriti mreža sa poliominima, ali da nas zanima najbolja moguća aproksimacija ili minimalna opstrukcija popločavanja. Napomenimo da ova dva pojma, iako su intuitivno jasna, nemaju preciznu matematičku definiciju. Polazna ideja je da konstruišemo simplicijalni kompleks koji će nam na dobar način apstrahovati topologiju, kombinatoriku mreže ćelija i kombinatoriku poliomino oblika sa kojima popločavamo. Simpleksi ovakvog kompleksa su pravilna postavljanja nekoliko poliomina u mrežu. Cilj nam je da proučavamo topološke i kombinatorne osobine ovih (i) njima sličnih kompleksa i da iz njih izvlačimo zaključke vezane za sama popločavanja.

U izučavanju ovih simplicijalnih kompleksa dodeljenih parcijalnim tesalacijama koristiće se brojne tehnike koje pruža algebarska topologija. Od interesa su nam poznavanje Bettijevih brojeva i homologija. Jasno je da su kompleksi koje studiramo složeni i imaju veliki broj simpleksa pa je ideja da ih uprostimo i zamjenimo sa homotopskim ekvivalentnim CW-kompleksima pomoću diskretne teorije Morsa koju je uveo Robin Forman. Naime, prva istraživanja nam ukazuju da za određene klase problema popločavanja njima asocirani simplicijalni kompleksi imaju homotopski tip vedža konačnog broja sfera. Ovi rezultati su od posebnog interesa u topološkoj i geometrijskoj kombinatorici u kojima se javlja klasa

šelabilnih simplicijalnih kompleksa koji takođe imaju ovakvo svojstvo.

Takođe, od značaja su nam i kombinatorne informacije o ovim kompleksima kao što je f -vektor. Pored homologije izučava će se i fundamentalna grupu ovih kompleksa i ispitivati postojanje veze sa fundamentalnom grupom površi od koje se polazi. Očekujemo da iz CW-kompleksa primenom Van-Kampenove teoreme eksplicitno odredimo fundamentalnu grupu za neke specifične primere. Određivanje Lusternik - Shnirelman kategorije koje bi nam omogućilo da bolje razumemo topološke karakteristike popločavanja.

B4. Naučni doprinos

Rezultati ovog istraživanja otvori će jedan novi pravac u pogledu matematičkog istraživanja kombinatornih problema na toploškim površima. Da će se dokazi ne postojanja popločavanja za čitave klase mreža na topološkim površima sa granicom. Istraživanje će omogućiti generalizaciju klasičnih rezultata o poliomnima u radu. Odredit će se topološke karakteristike simplicijalnih kompleksa asociiranih sa popločavanjima iz kojih će se dobiti novi rezultati interesantni za primjene u matematici i drugim naučnim disciplinama. Zbog same prirode i kompleksnosti problema koji se razmatraju za mnoga se izračunavanja mogu iskoristiti mogućnosti računarske tehnologije. Očekujemo se da rezultati doprinesu razvoju računarske i primjenjene algebarske topologije, kao jako mladih i jako perspektivnih novih matematičkih disciplina.

B5. Finansijska i organizaciona izvodljivost istraživanja

Finansijski i organizaciono istraživanje je optimalno programirano te ne iziskuje značajna finansijska sredstva i moguće ga je sprovesti u skladu sa predloženim vremenskim rokom. Komisija je mišljenja da Prirodno-matematički fakultet može obezbediti finansijsko-organizacione uslove za realizaciju istraživanja neophodnog za izradu ove doktorske disertacije.

Mišljenje i prijedlog komisije

Komisija je jednoglasno odlučila da je kandidat odbranio polazna istraživanja i pokazao da je predložena tema aktuelna istraživačka tema u međunarodnim naučnim krugovima. Dosadašnji rezultati i predložene metode omogućavaju da se nastavkom istraživanja dođe do novih originalnih doprinosa u oblasti poliomina koji su definitivno vredni pažnje šire naučne oblasti jer povezuju nekoliko značajnih disciplina matematike kao što su topologija, algebra i kombinatorika. Predlog komisije je da kandidat nastavi sa istraživanjem prema predloženom planu istraživanja i da dobijene rezultate pripremi za publikovanje u referentnom naučnom časopisu.

Prijedlog izmjene naslova

/

Prijedlog promjene mentora i/ili imenovanje drugog mentora

/

Planirana odbrana doktorske disertacije

Treća godina doktorskih studija u VI semestru

Izdvojeno mišljenje

/		
Napomena		
/		
ZAKLJUČAK		
Predložena tema po svom sadržaju odgovara nivou doktorskih studija.	DA	NE
Tema je originalan naučno-istraživački rad koji odgovara međunarodnim kriterijumima kvaliteta disertacije.	DA	NE
Kandidat može na osnovu sopstvenog akademskog kvaliteta i stečenog znanja da uz adekvatno mentorsko vođenje realizuje postavljeni cilj i dokaže hipoteze.	DA	NE
Komisija za ocjenu podobnosti teme i kandidata		
Redovni profesor dr Sveltana Terzić, PMF UCG, Crna Gora, predsednik komisije	<i>C. Terzić</i>	
Redovni profesor dr Žana Kovijanić-Vukićević, PMF UCG, Crna Gora	<i>Ž. Kovijanić-Vukićević</i>	
Naučni saradnik dr Đorđe Baralić, MI SANU, Srbija	<i>Đ. Baralić</i>	
U Podgorici 22.12.2018.		
MP		DEKAN

PRILOG

PITANJA KOMISIJE ZA OCJENU PODOBNOSTI DOKTORSKE TEZE I KANDIDATA	
Predsjednik komisije: redovni profesor dr Svjetlana Terzić, PMF UCG, Cma Gora	1. Postojanje grupa homotopije za popločavanja poliomina i njihova veza sa grupom homologije popločavanja?
	2. Ojlerova karakteristika površi kao opstrukcija za postojanje pravilnih kvadratnih mreža?
	3. Homotopski tipovi „domino“ simplicijalnih kompleksa?
Član komisije: redovni profesor dr Žana Kovijanić-Vukićević, PMF UCG, Cma Gora	1. Definicija Poliomina i poliomini sa rupama?
	2. Dobijanje dokaza argumentima „bojenja“ iz grupe homologija popločavanja?
	3. Dokazivanje kombinatornih identiteta pomoću f-vektora „domino“ simplicijalnih kompleksa?
Član komisije (mentor): naučni saradnik dr Đorđe Baralić, MI SANU, Srbija	1. Betijevi brojevi „domino“ simplicijalnih kompleksa?
	2. Tor-algebre „domino“ simplicijalnih kompleksa?
	3. Dokazi pomoću diskretne teorije Morsa.
PITANJA PUBLIKE DATA U PISANOJ FORMI	
(Ime i prezime)	
(Ime i prezime)	
(Ime i prezime)	
ZNAČAJNI KOMENTARI	