

UNIVERZITET CRNE GORE
VIJEĆU PRIRODNO-MATEMATIČKOG FAKULTETA

Predmet: Izvještaj komisije o pregledu i ocjeni magistarskog rada kandidata **Antona Đokaja**, diplomiranog matematičara

Vijeće Prirodno-matematičkog fakulteta u Podgorici na sjednici održanoj 21.12.2018. godine donijelo je odluku o imenovanju Komisije za ocjenu i odbranu magistarske teze pod nazivom **"Konveksna i univalentna harmonijska preslikavanja u kompleksnoj ravni i njihova geometrija"** kandidata Antona Đokaja, diplomiranog matematičara, u sljedećem sastavu:

- Prof. dr David Kalaj, mentor
- Prof. dr Žarko Pavićević, član
- Doc. dr Marijan Marković, član

Na osnovu uvida u dostavljeni materijal i uslova utvrđenih Zakonom o visokom školstvu i Statutom Univerziteta Crne Gore, Komisija podnosi sljedeći

IZVJEŠTAJ

Magistarski rad kandidata Antona Đokaja, diplomiranog matematičara pod nazivom **"Konveksne i univalentne harmonijske funkcije u kompleksnoj ravni i njihova geometrija"**, izložen je na 69 strana, A4 formata i sadrži 11 slika, 11 navoda literature. Rad sadrži sljedeća poglavlja: Uvod, Uvod u kompleksna harmonijska preslikavanja, Geometrija kompleksnih harmonijskih preslikavanja, Univalentna harmonijska preslikavanja iz jediničnog diska, Zaključak, Literatura. Predmet istraživanja magistarske teze Antona Đokaja pripada oblasti kompleksne analize.

Postavljeni ciljevi rada su:

- Detaljno prikazivanje osnovnih tvrđenja harmonijskih preslikavanja u kompleksnoj ravni i kontraprimjeri,
- Oslabljenje uslova kod Rado-Knesner-Choquet teoreme,
- Konstruisanje univalentnih harmonijskih preslikavanja istezanjem univalentnih analitičkih preslikavanja,

- Analogni Koebe $\frac{1}{4}$ teorema za k -kvazikonformna preslikavanja u S_H^0 i posljedice i Koebe $\frac{1}{4}$ teorema za familiju S_k kao njen specijalan slučaj.

U nastavku detaljni pregled poglavlja.

U uvodu rada dat je kratak osvrt na istorijat vezan za razvoj harmonijskih preslikavanja u kompleksnoj ravni i njihovu aktuelnost u svijetu matematike. Takođe, detaljno je izložen plan istraživanja i sadržaj poglavlja.

U prvom poglavlju su date osnovne teoreme u familiji harmonijskih preslikavanja: princip maksimuma, princip argumenta sa posljedicama, rješenje Dirihleovog zadatka za jedinični disk i slična tvrdjenja. Neka od tih tvrdjenja se dobijaju kao direktna posljedica odgovarajućih tvrdjenja u familiji analitičkih preslikavanja. U slučaju kad neka tvrdjenja nemaju svoje uopštenje u familiji harmonijskih preslikavanja dati su odgovarajući kontraprimjeri. Slično, i u slučaju kada se posmatraju harmonijska preslikavanja u R^n .

Drugo poglavlje je posvećeno lokalno univalentnim i univalentnim harmonijskim preslikavanjima kao generalizacija konformnih preslikavanja (analitičkih preslikavanja sa nenultim izvodom). Centralno mjesto ima teorema Radó-Kneser-Choquet sa svojim posljedicama i uopštenjima u vidu konveksnosti oblasti i date funkcije na granici jediničnog diska. Detaljno su proučena svojstva ove teoreme i oslabljeni su uslovi konveksnosti oblasti i neprekidnosti funkcije na granici, a da navedena teorema i dalje važi u cijelosti. U ovom poglavlju se detaljno izučavao i metod konstrukcije univalentnih harmonijskih preslikavanja istezanjem analitičkih funkcija. Navedeni metod je primijenjen u nekoliko primjera, između ostalog i u konstruisanju Koebe harmonijske funkcije, dok je prikazana i slika jediničnog diska pri početnom analitičkom preslikavanju i pri dobijenom harmonijskom preslikavanju, što dodatno ilustruje svojstvo istezanja. Za potrebe crtanja ovakvih slika je korišćen alat Mathematica 11 i GeoGebra.

Treće poglavlje počinje sa izloženjem teorije ekstremne dužine kao konformne invarijante familije krivih. Posebna pažnja je posvećena mogućnosti odredjivanja modula nedegenerisane dvostruko povezane oblasti preko ekstremne dužine familije krivih koje spajaju komponente povezanosti granice te oblasti.

Dalje, definisane su familije S_H^0 i S_H . Koristeći Montelevu teoremu za harmonijska preslikavanja dokazano je da se radi o normalnim familijama. Štaviše, dokazano da je familija S_H^0 je i kompaktna, što ne važi za familiju S_H . Ovo posljednje je

utvrđen konkretnim prilično lakim primjerom niz harmonijskih preslikavanja iz te familije koje jete lokalno univalentne funkcije koje ne pripadaju familiji.

U cilju dodatnog obrazloženja da je familija S_H^0 pogodnija za generalizaciju familije S analitičkih univalentnih funkcija iz jediničnog diska, u odnosu na S_H , detaljno je riješen jedan ekstremalni problem. Radi se u pronalaženju funkcije iz S_H^0 čija slika ima najmanju površinu. Pokazuje se da postoji funkcija u kojoj se "dostiže" najmanja površina koja iznosi $\frac{\pi}{2}$. Analogno tvđenje ne važi za familiju S_H . Štaviše pokazuje se da postoji niz funkcija iz te familije tako da površina slike jediničnog diska teži ka nuli ali se, jasno, ne dostiže.

U posljednjem dijelu trećeg poglavlja, koristeći metod ekstremne dužine, dokazana je analogna Koebe $\frac{1}{4}$ teorema za k -kvazikonformna preslikavanja u S_H^0 . Naime, Koebe $\frac{1}{4}$ teorema tvrdi da svaka funkcija iz klase S sadrži u svom rangu disk $|w| < \frac{1}{4}$. Koebe-ova funkcija $\frac{z}{(1-z)^2}$, koja slika jedinični disk u kompleksnu ravan bez dijela realne ose od $-\infty$ do tačke $z_0 = -\frac{1}{4}$, pokazuje da je disk poluprečnika $1/4$ najveći disk koji je sadržan u rangu svih funkcija iz S . Navedenim tvrdjenjem za k -kvazikonformna preslikavanja se posljedično dobija da svaka takva funkcija iz familije S_H^0 sadrži u svom rangu disk $|w| < \frac{1}{4(1+k)^2}$. U nastavku su razmatrane posebne vrijednosti k . Naime, za $k = 1$ se dobija familija S_H^0 , i tvđenje da svaka funkcija iz te familije u svom rangu sadrži disk $|w| < \frac{1}{16}$. I dalje je otvoreno pitanje da li je to najveći disk. Koebe harmonijska funkcija koja je konstruisana u drugom poglavlju ovog rada sugerise da je taj poluprečnik $\frac{1}{6}$.

Od posebnog značaja je slučaj kada $k \rightarrow 0$. Tada će se dobiti familija analitičkih funkcija unutar klase S_H^0 , odnosno familija S . Interesantno je da dobijeni rezultat, kao specijalan slučaj navedene teoreme, predstavlja upravo Koebe $\frac{1}{4}$ teoremu za klasu S . Time se istovremeno i dobija jedan drugačiji dokaz ove teoreme, različit od klasičnog.

Zaključci ove magistarske teze su izloženi na 2 strane i prikazuju kratak prikaz glavnih dobijenih rezultata rada. Takođe je razmatran prirodan nastavak problematike, naročito u vezi sa posljednjim zaključcima i otvorenim pitanjima iz trećeg poglavlja.

Upoređujući rezultat Koebe $\frac{1}{4}$ teoreme i način dokaza prirodno se nameće potreba za dokazivanjem analogne Bieberbachove konjektуре. Navedena hipoteza je dokazana samo za neke posebne podfamilije familije S_H^0 , pa i navedeni problem ostaje i dalje otvoren.

Zaključak i predlog Komisije

Na osnovu gore navedenog, smatramo da je rad napisan jasno i konstatujemo da je kandidat Anton Đokaj u potpunosti realizovao predviđeni plan i obim istraživanja. Rezultati dobijeni ovim istraživanjem predstavljaju dobro koncipirane naučne rezultate, koji predstavljaju dobru osnovu za buduća istraživanja.

Komisija predlaže Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta u Podgorici da rad kandidata **Antona Đokaja** pod naslovom **"Konveksna i univalentna harmonijska preslikavanja u kompleksnoj ravni i njihova geometrija"** prihvati kao uspješan magistarski rad i odobri njegovu javnu usmenu odbranu.

Podgorica,
07.02.2019.

Komisija



Dr David Kalaj, redovni profesor PMF-a u Podgorici, mentor



Dr Žarko Pavićević, redovan profesor PMF-a u Podgorici, član



Dr Marijan Marković, docent PMF-a u Podgorici, član