OCJENA PODOBNOSTI DOKTORSKE TEZE I KANDIDATA

OPŠTI PODACI O DOKTORANDU	
Titula, ime i prezime	MSc Milica Kankaraš
Fakultet	Prirodno-matematički fakultet, Podgorica
Studijski program	Matematika
Broj indeksa	01/2012
Podaci o magistarskom radu	(Stohastički dinamički sistemi: Modeli i simulacije, Primijenjena Matematika, Univerzitet Crne Gore, Prirodno-matematički fakultet, 2012, srednja ocjena (10))
NASLOV PREDLOŽENE TEME	
Na službenom jeziku	Reducibilnost u algebarskim hiperstrukturama
Na engleskom jeziku	*Reducibility in algebraic hyperstructures*
Datum prihvatanja teme i kandidata na sjednici Vijeća organizacione jedinice	09.07.2019.
Naučna oblast doktorske disertacije	Matematika (Algebra)
Za navedenu oblast matični su sljedeći fakulteti	
Prirodno-matematički fakultet, Podgorica	

A. IZVJEŠTAJ SA JAVNE ODBRANE POLAZNIH ISTRAŽIVANJA DOKTORSKE DISERTACIJE

U ponedjeljak, 17.juna u u 11h u sali 225 Prirodno-matematičkog fakulteta, doktorandkinja Milica Kankaraš je pristupila odbrani polaznih istraživanja doktorske teze pod nazivom „Reducibilnost u algebarskim hiperstrukturama" u prisustvu komisije u sastavu:

1. Dr Sanja Jančić Rašović, PMF UCG, redovni profesor (predsjednik komisije),
2. Dr Svjetlana Terzić, PMF UCG, redovni profesor
3. Dr Irina Elena Cristea, Univerzitet Nova Gorica, Slovenija, vanredni profesor, mentor.

Kandidatkinja je u dvadesetominutnom izlaganju dala motivaciju, izložila poznate rezultate na kojima su bazirana njena istraživanja, a zatim predstavila svoje rezultate do kojih je došla u toku svojih polaznih istraživanja. Dobijeni rezultati se odnose na fazi reducibilnost hipergrupa sa parcijalnim skalarnim identitetima. Kandidatkinja je pokazala da hipergrupa sa parcijalnim skalarnim identitetima nije fazi reducibilna u odnosu na fazi skup $\tilde{\mu}$. Nakon predstavljanja konkretnih rezultata, kandidatkinja je ukazala na dva značajna pravca u kojima je planirano njeno dalje istraživanje. Jedan od njih je ispitivanje reducibilnosti u fazi hipergrupama, a drugi ispitivanje reducibilnosti za tri tipa hiperprstena i to Krasnerov, multiplikativni i generalni hiperprsten.

Nakon izlaganja, komisija je pristupila ispitivanju kandidata. Pitanja su se odnosila na preciziranje pojmova i rezultata koji su navedeni u izlaganju, uz analizu mogućnosti njihove primjene u algebarskoj topologiji i daljeg razvoja u teoriji hipergrupa. Komisija smatra da je kandidatkinja detaljno i tačno predstavila, kako dosadašnje, tako i novodobijene rezultate iz ove oblasti i da je precizno odgovorila na postavljena pitanja. Samim tim, komisija je jednoglasno donijela odluku da je kandidatkinja uspješno odbranila polazna istraživanja za izradu doktorske disertacije.

Odbrana je završena u 12h.

B. OCJENA PODOBNOSTI TEME DOKTORSKE DISERTACIJE

B1. Obrazloženje teme

Algebarske hiperstrukture je 1934. godine uveo francuski matematičar F.Marty kada je definisao hipergrupu i prikazao neka njena svojstva, kao i primjene na algebarske funkcije, racionalne funkcije, nekomutativne grupe itd. Hiperstrukture istovremeno predstavljaju i nezavisni pravac istraživanja, kao i istraživački alat za druge oblasti kao što su: Geometrija, Grafovi i Hipergrafovi, Topologija, Kriptografija, Teorija kodova, Teorija automata, Vjerovatnoća, Teorija fazi skupova.

Algebarske hipergrupe predstavljaju generalizaciju klasičnih grupa: binarna operacija grupe se proširuje na binarnu multivrijednosnu operaciju, nazvanu *hiperoperacija* ili *hiperproizvod.* Hiperoperacija paru elemenata pridružuje neprazni podskup. Prvi primjer hipergrupe je 1934. godine dao F. Marty, pri čemu je istovremeno dao motivaciju za uvođenje ovog pojma. Ako je G grupa, a H njena podgrupa; tada faktor struktura G/H ne mora biti grupa, ali uvijek jeste hipergrupa.

Skup H sa hiperoperacijom $\circ$ čini hipergrupu ako je zadovoljeno svojstvo asocijativnosti, tj. ako za sve $x, y, z \in H$ $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ i ukoliko važi aksioma reprodukcije, tj. za svako $a \in H, a \circ H = H \circ a$.
Fazi skupovi su skupovi čiji elementi imaju stepen pripadnosti. Pojam fazi skupa je uveo L.A.Zadeh (1965) u cilju proširenja klasičnog pojma skupa. U klasičnom skupu, pripadnost elementa skupu je binarna relacija; element pripada ili ne pripada skupu. Teorija fazi skupova uvodi funkciju pripadnosti koja skup slika u segment [0,1], tj. svakom elementu skupa dodjeljuje broj iz datog segmenta.

Vezu između fazi skupova i algebarskih struktura je prvi uspostavio A. Rosenfeld definisanjem pojma *fazi podgrupe grupe.* Nešto kasnije, B. Davvaz je proširio ovu definiciju na slučaj algebarskih hiperstruktura, uvodeći koncept *fazi podhipergrupe* (klasične) hipergrupe. Proučavanje fazi hiperstruktura je počelo 2008.godine, člankom o *fazi hipergrupama* [22]. Zatim su V. Leoreanu-Fotea i B. Davvaz 2009. godine uveli pojmove *fazi hiperprstena* i *fazi hipermodula* sa ciljem uopštenja uvedenih hiperstruktura.

Teorija hipergupa sa fazi skupovima predstavlja rastući i novi pravac istraživanja u proteklih 20 godina. Do sada se razlikuju tri osnovna pristupa: izučavanje novih klasičnih hiperoperacija pomoću sredina fazi skupova; izučavanje fazi podhipergrupa, kao i izučavanje fazi hipergrupa, tj. struktura sa fazi hiperoperacijama. Pregled ove teorije se može naći u monografiji *Fuzzy algebraic hyperstructures; an introduction* koju su napisali Davvaz i Cristea [7].

Veoma važnu ulogu u teoriji hiperstruktura imaju fundamentalne relacije. One mogu da se podijele u dvije grupe. Prvu grupu čine relacije ekvivalencije sa svojstvom da se faktorisanjem hiperstruktura ovim relacijama dobija klasična struktura sa sličnim svojstvima. Drugu grupu čine fundamentalne relacije koje je uveo Jantosciak [8] u cilju definisanja pojma *reducibilna hipergrupa.* Jantosciak je primijetio da se može se desiti da hiperproizvod na datom skupu "ne pravi razliku" između para elemenata u skupu ukoliko elementi igraju istu ulogu u odnosu na hiperoperaciju. Otuda se može definisati određena ekvivalencija u cilju identifikovanja elemenata sa istim svojstvima.

Dva elementa x, y u hipergrupi $(H,\circ)$ su:

- *operaciono ekvivalentna*, ako su njihovi hiperproizvodi sa svim elementima u H isti: $x \circ a = y \circ a$ i $a \circ x = a \circ y$, za svako a in H;
- *nerazdvojivi*, ako x pripada istim hiperproizvodima $a \circ b$ kao y , za sve a, b u H;
- *esencijalno nerazlikujući*, ako su operaciono ekvivalentni i nerazdvojivi.

Reducibilna hipergrupa za svaki element ima jednoelementnu klasu ekvivalencije u odnosu na gore definisanu relaciju. Koristeći ove fundamentalne relacije, izučavanje hipergrupa može da se podijeli u dvije grupe, izučavanje reducibilnih hipergrupa i izučavanje hipergrupa koje imaju istu reducibilnu formu (Reducibilna forma je faktor struktura koja se dobija kada se hipergrupa posiječe po relaciji esencijalno nerazlikovanje). Ova ideja će takođe biti unaprijeđena u tezi kandidatkinje u fazi slučaju u dva različita pravca: izučavanje relacije *esencijalno nerazlikujući* između elemenata fazi hipergrupe, ili između slika elemenata klasične hipergrupe sa fazi skupom.
Uvode se pojmovi *reducubilne fazi hipergrupe*, tj. fazi hipergrupe koja je reducibilna, kao i pojam *fazi reducibilne hipergrupe*, tj. hipergrupe sa fazi skupom koja je fazi reducibilna.
U tom cilju biće definisane i objašnjene nove relacije.

U hipergrupi $(H,\circ)$ sa zadatim fazi skupom μ, uvode se sljedeće ekvivalencije. Kažemo da su x i y:

- *fazi operaciono ekvivalentni*, ako su slike njihovih hiperproizvoda sa svim elementima u H iste: $\mu(x \circ a) = \mu(y \circ a)$ i $\mu(a \circ x) = \mu(a \circ y)$, za svako a in H;
- *fazi nerazdvojivi*: $\mu(x)$ pripada $\mu(a \circ b)$ akko $\mu(y)$ pripada $\mu(a \circ b)$, za sve a, b u H;
- *fazi esencijalno nerazlikujući*, ako su fazi operaciono ekvivalentni i fazi nerazdvojivi.

Klasična hipergrupa $(H,\circ)$ je fazi reducibilna ako je klasa ekvivalencije proizvoljnog elementa u odnosu na relaciju fazi esencijalno nerazlikovanje jednoelementna.

Fazi hiperoperaciju na skupu H je definisao M.K. Sen 2007.godine kao preslikavanje koje paru elemenata pridružuje neprazan fazi podskup, tj. $\circ: H \times H \longrightarrow \mathcal{F}(H)$. Ukoliko su zadovoljeni asocijativnost i teorema reprodukcije tada $(H,\circ)$ čini fazi hipergrupu.

Na fazi hipergrupi $(H,\circ)$ se definišu fundamentalne relacije na sljedeći način:

- x i y su *operaciono ekvivalentni* ako: $(x \circ a)(r) = (y \circ a)(r)$ i $(a \circ x)(r) = (a \circ y)(r)$ za svako a, r in H;
- x i y su *nerazdvojivi*, ako $(a \circ b)(x) \neq 0$ akko $(a \circ b)(y) \neq 0$, za sve a, b u H;
- x i y su *esencijalno nerazlikujući*, ako su fazi operaciono ekvivalentni i fazi nerazdvojivi.

Fazi hipergrupa je reducibilna fazi hipergrupa akko klasa ekvivalencije svakog elementa iz H u odnosu na gore definisanu relaciju sadrži tačno jedan element.

B2. Cilj i hipoteze

Predloženi cilj je proširenje klasičnog pojma reducibilne hipergrupe na fazi slučaj, definisanjem novih koncepata fazi reducibilne hipergrupe i reducibilne fazi hipergrupe. Osim kombinatornih svojstava pomenutih hipergrupa, istraživaće se moguće veze između ova dva nova koncepta i klasične reducibilnosti. Kandidatkinja predlaže inovativni metod fuzifikacije koncepta reducibilnosti u hipergrupi. Ovaj koncept se može razmatrati na fazi hipergrupi, ili na klasičnoj hipergrupi koja je obogaćena fazi skupom. U slučaju kada je na hipergrupi zadata fazi hiperoperacija, dobijaju se *reducibilne fazi hipergrupe*, tj. fazi hipergrupe koje su reducibilne. U drugom slučaju se definišu *fazi reducibilne hipergrupe*, tj. klasične hipergrupe koje su fazi reducibilne u odnosu na pridruženi fazi skup. .

Kao i u klasičnom slučaju, definisane su fundamentalne relacije koje je uveo Jantosciak: operacionalna ekvivalencija, nerazdvojivost i esencijalno nerazlikovanje, pri čemu je prilikom definisanja neophodno voditi računa o svojstvima fazi skupova. Fazi hipergrupa H će biti nazvana *reducibilnom fazi hipergrupom* ako i samo ako je klasa ekvivalencije svakog elementa u odnosu na esencijalno nerazlikovanje jednoelementna. Slično, klasična hipergrupa H će biti nazvana *fazi reducibilna hipergrupa* ako je klasa ekvivalencije svakog elementa u H u odnosu na fazi esencijalno nerazlikujuću relaciju jednoelementna.

Jedan od ciljeva istraživanja je povezivanje ova dva fazi pristupa sa klasičnim slučajem, što će biti tema prvog dijela disertacije.

U okviru teze istraživaće se i svojstva gore navedenih relacija i tražiti značajni primjeri klasičnih hipergrupa i fazi hipergrupa koje su (fazi)reducibilne. U teoriji je poznato da je hipergrupa sa parcijalnim skalarnim identitetima uvijek reducibilna. Kandidatkinja u svom istraživanju fazi reducibilnosti posmatra fazi set $\tilde{\mu}$ koji je definisao Korsini ("grade fuzzy set") [1].
Rezultat polaznih istraživanja je da hipergrupa sa parcijalnim skalarnim identitetima nije fazi reducibilna u odnosu na fazi skup $\tilde{\mu}$. Motivisana konkretnim primjerima, doktorandkinja postavlja hipotezu da kompletne hipergrupe nisu reducibilne, niti fazi reducibilne u odnosu na fazi skup $\tilde{\mu}$.

U drugom dijelu teze doktorandkinja namjerava da proširi koncept reducibilnosti na prstene u oba slučaja: u klasičnom i fazi slučaju. Cilj je dati definiciju pojma (fazi)reducibilnosti na hiperprstenu. Pretpostavka je da će se u slučaju Krasnerovog i multiplikativnog hiperprstena, relacija *esencijalno nerazlikovanje* definisana pomoću operacije svesti na jednakost (na datim prstenima su zadate operacija i hiperoperacija) pa će se proučavanje reducibilnosti pomenuta dva tipa hiperprstena svesti na reducibilnost hipergrupa (hipergrupoida). U slučaju generalnog hiperprstena, cilj je definisati dvije relacije pomoću hiperoperacija zadatih na hiperprstenu. Pretpostavlja se da svojstvo reducibilnosti neće imati svi tipovi hiperprstena, pa je cilj napraviti klasifikaciju (ne)reducibilnih hiperprstena. U fazi slučaju, očekuje se promjena ponašanja hiperprstena u zavisnosti od definicije fazi skupova.

B3. Metode i plan istraživanja

Zadaci/problemi iz teze odgovaraju trenutnim trendovima u Algebri. Fazi modeli postaju sve korisniji zbog njihove mogućnosti da povežu klasične kombinatorne probleme i simboličke modele u formalnim sistemima.

Teza će biti podijeljena u dvije cjeline. Prva cjelina će sadržati pregled fundamentalnih relacija u hiperstrukturama i njihovom primjenljivošću na koncept reducibilnosti hipergrupa. Nakon toga će biti uveden pojam fazi reducibilne hipergrupe i biće izučavan za više klasa poznatih hipergrupa: kompletne hipergrupe, hipergrupe sa parcijalnim skalarnim identitetima, nekompletne 1-hipergrupe, ciklične hipergrupe. Ovaj dio teze će pratiti studija reducibilnosti fazi hipergrupa sa namjerom da se uspostavi njena veza sa klasičnom reducibilnošću. Druga cjelina će sadržati izučavanje aspekta reducibilnosti hiperprstena (razmatraćemo više tipova hiperprstena). Ovdje će takođe biti razmatrana i klasična i fazi reducibilnost.

B4. Naučni doprinos

Očekuje se da će novi rezultati dobijeni u tezi biti publikovani u referentnim naučnim časopisima. Istraživanje fazi skupova i fazi struktura je vrlo aktuelno danas, a posebno je značajno što se istraživanje fazi skupova može vršiti sa različitih aspekata, kao što su kombinatorni, statistički i algebarski.

B5. Finansijska i organizaciona izvodljivost istraživanja

Predstavljeno istraživanje ne iziskuje značajna finansijska sredstva i izvjesno je da će ono biti završeno u vremenskom roku predloženom za završetak disertacije. Istraživanje se ocjenjuje izvodljivim. Očekuje se da kandidatkinja bude uključena u projekte u okviru kojih će dobiti dio finansija potrebnih za uspostavljanje bliske saradnje sa istraživačima koji se bave istom oblašću algebre.

Literatura:

[1] Corsini, P., *Prelogomena of Hyperstructure Theory*, Aviani Edittore, 1993

[2]Rosenfeld, A. *Fuzzy Groups.* Journal of Mathematical Analysis and Application, 35(1971), 512-517

[3]F. Marty, *Sur uni generalization de la notion de group*, in: 8.th Congress Math. Scandenaves, Stockholm, 1934, pp. 45-49

[4]P. Corsini, I. Cristea, *Fuzzy grade of i.p.s. hypergroups of order less than or equal to 6,* Pure Math. Appl., Ser. A, 14(2003), 275-288.

[5]P. Corsini, V. Leoreanu, *Applications of hyperstructure theory*, in: Advances in Mathematics Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

[6]I. Cristea, *Reducibility in hypergroups- the crisp and fuzzy cases,* 2th AHA Congress, At Democritus University of Thrace, Xanthi, Greece, September,2014

[7]B. Davvaz and I. Cristea, *Fuzzy algebraic hyperstructures: an introduction*, (Studies in fuzziness and soft computing, vol. 321). Springer, 2015.

[8]J. Jantosciak, Reduced hypergroups, *Algebraic Hyperstructures and Applications* (Xanthi, 1990), World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1991,119-122.

[9]Corsini, P. *Sugli ipergruppi canonici finiti con identità parziali scalari*, Rend. Circolo Mat. di Palermo, Serie II, Tomo XXXVI (1987).

[10]Corsini, P., (i.p.s.) *Ipergruppi di ordine 6*, Ann. Sc. de l'Univ. Blaise Pascal, Clermont-Ferrand II (1987).

[11]Corsini, P., (i.p.s.) *Ipergruppi di ordine 7*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, XXXIV(1985--1986).

[12]Corsini, P., *Join spaces, power sets, fuzzy sets*, in: Proc. Fifth Int. Congress on A.H.A., 1993, Hadronic Press, Romania, 1994, 45-52.

[13]Corsini, P., *On the hypergroups associated with binary relations*, Multi.Val. Logic, 5(2000), 407-419.

[14]Corsini, P., *A new connection between hypergroups and fuzzy sets*, Southeast Asian Bull. Math., 27(2003), no.2, 221-229.

[15]Cristea, I., Ştefănescu, M., *Binary relations and reduced hypergroups*, Discrete Math. 308(2008), 3537-3544.

[16]Cristea, I., *Several aspects on the hypergroups associated with n-ary relations*, An. Ştiinţ. Univ. Ovidius Constanţa Ser. Mat., 17(2009), no.3, 99-110.

[17] Cristea, I., Ştefănescu, M., *Hypergroups and n-ary relations*, European J. Combin. 31(2010), 780-789.

[18]Cristea, I., Jafarpour, M., Mousavi, S., Soleymani, A., *Enumeration of Rosenberg hypergroups*, Comput. Math. Appl., 60(2010), 2753-2763.

[19]Cristea, I., Ştefănescu, M., Angheluta, C., About the fundamental relations defined on the hypergroupoids associated with binary relations, European J. Combin., 32(2011), 72-81.

[20]Jantosciak, J., *Reduced hypergroups*, in: T. Vougiouklis, (Ed.), Algebraic Hyperstructures and Applications Proceedings of 4th International Congress, Xanthi, Greece, 1990, World Scientific, Singapore, 1991, 119-122.

[21]Rosenberg, I.G., *Hypergroups and join spaces determined by relations*, Ital. J. Pure Appl. Math., 4(1998), 93-101.

[22]Sen, M.K., Ameri, R., Chowdhury, G., *Fuzzy hypersemigroups*, Soft Comput., 12(2008), 891-900.

Mišljenje i prijedlog komisije

Komisija smatra da je predmet istraživanja kandidatkinje matematički sadržajan i perspektivan i da prezentovani novi rezultati predstavljaju doprinos u izučavanju hipergrupa i hiperprstena. Očekujemo da ovaj stav bude potvrđen publikovanjem dobijenih rezultata u referentnim naučnim časopisima. Komisija smatra da je kandidatkinja Milica Kankaraš uspješno odbranila polazna istraživanja svoje doktorske disertacije.

Prijedlog izmjene naslova

Prijedlog promjene mentora i/ili imenovanje drugog mentora

Planirana odbrana doktorske disertacije

Zimski semestar 2020. godine ili ljetnji semestar 2021. godine

Izdvojeno mišljenje

Ime i prezime

____

Napomena

ZAKLJUČAK		
Predložena tema po svom sadržaju **odgovara** nivou doktorskih studija.	DA	
Tema **je** originalan naučno-istraživački rad koji odgovara međunarodnim kriterijumima kvaliteta disertacije.	DA	
Kandidat **može** na osnovu sopstvenog akademskog kvaliteta i stečenog znanja da uz adekvatno mentorsko vođenje realizuje postavljeni cilj i dokaže hipoteze.	DA	

Komisija za ocjenu podobnosti teme i kandidata	
Prof. dr Sanja Jančić Rašović, Univerzitet Crne Gore, Crna Gora	S. Jančić Rašović
Prof. dr Irina Elena Cristea, Univerzitet Nova Gorica, Slovenija	ICristea
Prof. dr Svjetlana Terzić, Univerzitet Crne Gore, Crna Gora	С. Терзић

U Podgorici,
08.07.2019.

DEKAN

MP

PRILOG

PITANJA KOMISIJE ZA OCJENU PODOBNOSTI DOKTORSKE TEZE I KANDIDATA	
Prof. dr Sanja Jančić-Rašović	1. Na koji način namjeravate da nastavite izučavanje reducibilnosti hiperprstena?
	2. Koje tipove hiperprstena ćete razmatrati?
	3. Da li znate neke druge tipove fundamentalnih relacija na hiperstrukturama?
Prof. dr Irina Elena Cristea	1. Šta podrazumijevate pod „totalnom hipergrupom"?
	2. Objasniti značenje izučavanja fundamentalnih relacija na grupama.
	3. Da li znate neke primjene „grade fuzzy" skupa?
Prof. dr Svjetlana Terzić	1. Kako može da se definiše reducibilnost na fazi hiperstrukturama?
	2. Objasniti značenje pojma kompletne hipergrupe.
	3. Objasniti bolje (dajući primjere) značenje fazi skupa.
(Titula, ime i prezime člana komisije)	
(Titula, ime i prezime člana komisije)	
PITANJA PUBLIKE DATA U PISANOJ FORMI	
(Ime i prezime)	
(Ime i prezime)	
(Ime i prezime)	
ZNAČAJNI KOMENTARI	