

OCJENA PODOBNOSTI DOKTORSKE TEZE I KANDIDATA

OPŠTI PODACI O DOKTORANDU	
Titula, ime i prezime	MSc Jelena Dakić
Fakultet	Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore
Studijski program	Matematika
Broj indeksa	2/13
Podaci o magistarskom radu	Naziv magistarskog rada: "Hopfova bifurkacija u sistemima reakcije difuzije" , Naučna oblast : Matematika i Primijenjene matematika Institucija na kojoj je odbranjen magistarski rad: Prirodno-matematički fakultet, UCG, Podgorica Godina odbrane: 2013, Prosječna ocjena: A (deset).
NASLOV PREDLOŽENE TEME	
Na službenom jeziku	"Iterativni metodi i neuronske mreže za izračunavanje generalisanih inverza matrica"
Na engleskom jeziku	"Iterative methods and neural networks for the computation of matrix generalized inverses"
Datum prihvatanja teme i kandidata na sjednici Vijeća organizacione jedinice	09. 07. 2019. g.
Naučna oblast doktorske disertacije	Numerička analiza
Za navedenu oblast matični su sljedeći fakulteti	
Prirodno-matematički fakultet, UCG.	
A. IZVJEŠTAJ SA JAVNE ODBRANE POLAZNIH ISTRAŽIVANJA DOKTORSKE DISERTACIJE	
U srijedu, 26. juna 2019.godine, u 13 časova u sali 210 na Prirodno-matematičkom fakultetu u Podgorici, doktorandkinja Jelena Dakić je pristupila odbrani polaznih istraživanja doktorske teze pod nazivom "Iterativni metodi i neuronske mreže za izračunavanje generalisanih inverza matrica" pred Komisijom u sastavu: 1. dr Milenko Mosurović, redovni profesor, PMF UCG, Crna Gora, predsjednik Komisije, 2. dr Milan Martinović, redovni profesor, PMF UCG, Crne Gora, član, 3. dr Marko Petković, redovni profesor, PMF, Niš, Srbija, mentor. Predsjednik Komisije prof. dr Milenko Mosurović, upoznao je kandidata i članove Komisije sa procedurom odbrane i dao riječ kandidatkinji da obrazloži ciljeve i očekivane rezultate, odnosno izloži istraživački program sa uslovima za uspješan završetak teze. U izlaganju od 25 minuta kandidatkinja je obrazložila temu, uz kratak pregled poznatih rezultata iz ove oblasti i iznijela dosadašnje rezultate svojih polaznih istraživanja. Jasno su izložene nove predložene metode iz oblasti iterativnih metoda za izračunavanje generalisanih inverza matrica i upoređene sa već poznatim rezultatima. Takođe, dat je plan daljeg istraživanja koji obuhvata	

precizne dokaze konvergencije pomenutih metoda kao i obučavanje i testiranje novih neuronskih mreža diskretnog tipa koje su predložene za numerička izračunavanja generalisanih inverza. Nakon završenog izlaganja uslijedila je kratka diskusija i pitanja članova Komisije, nakon kojih je kandidatkinja dala dodatna objašnjenja i moguće pravce u kojima bi istraživanje moglo dati rezultate.

Komisija je uzimajući u obzir kvalitet izlaganja i odbrane polaznih istraživanja, kao i podobnost teme koja je relevantna za nekoliko matematičkih disciplina, jednoglasno donijela odluku da je kandidatkinja uspješno odbranila temu, tj. polazna istraživanja.

Odbrana polaznih istraživanja završena je u 14 časova.

B. OCJENA PODOBNOSTI TEME DOKTORSKE DISERTACIJE

B1. Obrazloženje teme

Pojam generalisanih inverza matrica prvi put uveo je Eliakim Hasting Moore 1920, koji je definisao jedinstveni generalisani inverz kao sredinu projekcija matrica. Tema je posebno postala aktuelna od sredine 1950. sa otkrićem svojstva najmanjih kvadrata izvjesnih generalisanih inverza i njihove veze sa rješenjima sistemima linearnih jednačina. R. Penrose je 1955. pokazao da je Moore-ov inverz jedinstvena matrica koja zadovoljava četiri matrične jednačine i to:

$$1. AXA = A, \quad 2. XAX = X, \quad 3. (AX)^* = AX, \quad 4. (XA)^* = XA,$$

gdje je $A \in C^{m \times n}$ matrica čiji se inverz računa a $X \in C^{n \times m}$ generalisani (uopšteni, pseudo) inverz. Teorija, primjene i metodi izračunavanja generalisanih inverza rapidno su se razvili u posljednjih pedeset godina zbog svoje široke primjene u statistici, nauci, inženjerstvu kao i matematičkim modelima sa aproksimacijama najmanjih kvadrata, diferencijalnim i diferencnim jednačinama, Markovljevim lancima, loše uslovljenim problemima, itd. U literaturi je dostupan veliki broj različitih metoda za izračunavanje generalisanih inverza, koji se u najopštijem slučaju dijele na direktne (SVD algoritam, QR faktorizacija [1], Gausova eliminacija [2, 3]) i iterativne metode. Iterativni metodi oslanjaju se na odgovarajuća uopštenja dobro poznatog Šulcovog metoda i više-stepenih metoda (hyper-power metoda).

Neuronske mreže su u novije vrijeme dobile poseban značaj u izračunavanju generalisanih inverza matrica koje se u vremenu mijenjaju. Brojni poznati numerički algoritmi nisu dovoljno efikasni u rješavanju problema matrične inverzije u slučaju vremenski zavisnih matrica, jer ne koriste podatke iz prethodne iteracije. Rekurentne neuronske mreže (RNN) i modeli Gradijentne Neuronske mreže (GNN) i Žangove Neuronske mreže (ZNN) su danas postale veoma moćan alat, blisko povezan sa numeričkim algoritmima, za računanje generalisanih inverza u realnom vremenu.

B2. Cilj i hipoteze

Cilj istraživanja i doktorske disertacije je analiza i implementacija novih algoritama i neuronskih mreža u problemima određivanja generalisanih inverza. Dosadašnji generalisani Schultz-ovi iterativni metodi oblika $X_{k+1} = X_k p(AX_k)$ uglavnom podrazumijevaju da su koeficijenti polinoma $p(x)$ konstantni. **Hipoteza** koja se postavlja je da ukoliko se na pogodan način variraju ovi koeficijenti, dobijeni metodi biće značajno brži od postojećih sa konstantnim koeficijentima. Izbor koeficijenata omogućiće da se u svakoj iteraciji računa generalisani inverz ulazne matrice sa što manje matričnih množenja i ukupno manje iteacija do dobijanja rezultata određene tačnosti. Drugi glavni **cilj** je konstrukcija novih i efikasnijih neuronskih mreža za izračunavanje generalisanih inverza, kao i proučavanje odgovarajućih diskretizacija. **Hipoteza** koja se postavlja je da će nove diskretne šeme (multi-step metodi sa diskretizacijom pomoću

konačnih razlika) dati jednako brze ili bolje neuronske mreže za računanje generalisanih inverza vremenski promjenljivih matrica. Novi predloženi metodi biće upoređeni sa već postojećim algoritimima i jasno istaknute njihova poboljšanja u efikasnosti izvršavanja i brzini konvergencije.

B3. Metode i plan istraživanja

Generalisani inverz se definiše kao uopštenje običnog matičnog inverza za neinvertibilne i za nekvadratne matrice. U slučaju da matrica ima uobičajeni inverz, on se poklapa sa generalisanim inverzom. Pretpostavlja se da je $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ data matrica i T i S linearni potprostori prostora $\mathbb{C}^n$ i $\mathbb{C}^m$, redom. Jedan od najopštijih generalisanih inverza je $A_{T,S}^{(2)}$. Pod uslovom da je $AT \oplus S = \mathbb{C}^m$, postoji jedinstvena matrica $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$ koja zadovoljava:

$$XAX = X$$

$$\mathfrak{R}(X) = T$$

$$\mathfrak{N}(X) = S$$

gdje su $\mathfrak{R}(X)$ i $\mathfrak{N}(X)$ slika i jezgro matrice X . U ovom slučaju kaže se da je matrica X spoljni inverz sa unaprijed zadatom slikom i jezgrom. Ako je $T = \mathfrak{R}(G)$ i $S = \mathfrak{N}(G)$ za matricu $G \in \mathbb{C}^{n \times m}$ kaže se da je X odgovarajući inverz za matricu G , i naziva se G -inverzom. Za različite izbore matrice G , X se svodi na različite tipove generalisanih inverza [4]. Neki od tih inverza su Moore-Penrose inverz (MP inverz) ($G = A^*$), Težisni MP inverz, Drazinov inverz ($G = A^k, k \geq \text{ind}(A)$), grupni inverz itd.

Uopšteni matični iterativni metod za računanje spoljnog inverza za datu matricu A je oblika $X_{k+1} = X_k p(AX_k)$ gdje je $p(x)$ proizvoljan polinom određenog stepena. Ovi metodi su u literaturi poznati kao uopšteni (generalisani) Schultz-ovi metodi i primenljivi su na širok spektar generalisanih inverza. Poznat je veći broj metoda ovog tipa, čija konvergencija je dokazana pod određenim uslovima, u literaturi. Najčešće upoređivanje efikasnosti metoda vrši se u odnosu na kubni više-stepeni metod oblika $X_{k+1} = X_k(I + R_k + R_k^2), R_k = I - AX_k$.

Neuronske mreže za izračunavanje inverza i generalisanih inverza matrica predstavljaju dinamičke sisteme oblika $\dot{V}(t) = F(t, A(t), V(t))$ gdje je $A(t)$ data matrica čiji se (generalisani) inverz računa a $V(t)$ matrica stanja koja konvergira ka inverzu. Ovi dinamički sistemi predstavljaju modele za konstrukciju analognih računara i mikrokontrolera koji omogućavaju računanje inverza i rešavanje odgovarajućih sistema linearnih jednačina u realnom vremenu. Ovaj pristup je naročito pogodan u automatici, konkretno za upravljanje pokretnim djelovima robota odnosno rešavanje problema inverzne kinematike.

Zadaci i problemi koji se postavljaju i rešavaju u disertaciji relevantni su za oblasti numeričke linearne algebre, matične analize i djelimično teorije dinamičkih sistema.

U prvom dijelu rada biće izložene poznate generalisane Shultzove iterativne metode za izračunavanje generalisanih inverza. Razmotriće se nekoliko različitih generalizacija ovih metoda, kod kojih se koeficijenti polinoma $p(x)$ mijenjaju kroz iteracije.

Jedan od novih predloženih metod koji je formulisan dat je sistemom:

$$X_{k+1} = X_k(a_k I + b_k R_k)$$

$$R_{k+1} = I - AX_{k+1},$$

gdje se koeficijenti a_k i b_k biraju tako da minimizuju Frobenijusovu normu matrice R_{k+1} . Ovakav izbor koeficijenata ne povećava složenost metoda, a njihovo eksplicitno računanje u svakoj iteraciji ne zahtijeva dodatna matična množenja. Nova predložena šema, koja je nazvana

Uopšteni Njutnov (Newton) metod prvog reda, zahtijeva ukupno dva matrična množenja po jednoj iteraciji. Testiranja za običan i MP inverz pokazala su da je novi metod bolji od do sada poznatih metoda i to u smislu prosječnog broja matričnih množenja po iteraciji kao i prosječnog vremena neophodnog za računanje inverza do unaprijed zadate tačnosti. Za ovu, ali i ostale predložene generalizacije najprije se ispituje konvergencija, a onda se upoređuju sa poznatim metodima kroz odgovarajuće numeričke primjere. Rezultati testiranja pokazaće da li i u kojoj mjeri ima poboljšanja ukoliko se dopusti da koeficijenti polinoma $p(x)$ budu promjenljivi. Testiranja čiji su rezultati izloženi u polaznim istraživanjima, vršena su na kvadratnim matricama dimenzija $600 \times 600, 700 \times 700, \dots, 1200 \times 1200$ potpunog (za običan inverz) i nepotpunog ranga (za MP inverz) koje su generisane na odgovarajući način u korišćenim matematičkim softverima.

U drugom dijelu razmatraće se novi dinamički sistemi (neuronske mreže) za računanje generalisanih inverza konstantnih i (vremenski) promjenljivih matrica. Ideja je da se neke od postojećih neuronskih mreža uopšte na izračunavanje znatno šire klase uopštenih inverza, kao i da se konstruišu nove uz pogodan odabir funkcije greške. Predviđena konstrukcija novih neuronskih mreža sa novim tipovima diskretizacije koje će se detaljno proučavati i porediti sa postojećim, biće centralna tema drugog dijela disertacije. Takođe, vršiće se i poređenje sa iterativnim metodama i jasno navesti razlike i slučajevi kada je i zašto pogodnije koristiti pomenute metode, a sve će biti potvrđeno testiranjima na konkretnim primjerima. Rezultati testiranja pokazaće koje to vrijednosti parametara mreže daju sve skupa brže vrijeme izračunavanja u odnosu na sukcesivnu primjenu odgovarajućih iterativnih metoda.

Za svaki predloženi metod biće jasno prikazana osnovna ideja, postupak izvođenja kao i dokaz konvergencije pod odgovarajućim uslovima i za odgovarajuću klasu matrica. Pored toga, svi novi metodi biće implementirani i testirani na pogodno odabranim numeričkim primjerima. Za potrebe implementacije i testiranja korišćiće se odgovarajući matematički softveri. Rezultati testiranja bi trebalo da pokažu koliko su zapravo novi metodi bolji u praksi od postojećih.

B4. Naučni doprinos

Očekuje se da će biti predložene nove iterativne metode i neuronske mreže za izračunavanje generalisanih inverza koje, u nekim slučajevima, mogu biti poboljšanja nekih već poznatih metoda ili sasvim novi algoritmi.

Svi novi dobijeni rezultati, biće izloženi u naučnim časopisima i zbornicima radova koji su od značaja za nauku.

Očekuje se da nove predložene metode nađu konkretne primjene u oblastima primijenjene matematike i robotike (neuronske mreže).

Očekuje se da rezultati doprinesu razvoju računarskih nuaka kao i novih numeričkih metoda u oblasti Matematike, posebno numeričke analize, i da daju dobru matematičku platformu za dalje naučno istraživanje u ovoj i sličnim oblastima.

B5. Finansijska i organizaciona izvodljivost istraživanja

Predstavljeno istraživanje zasnovano je na teorijskim razmatranjima uz aktivno korišćenje matematičkih softvera za šta je kandidatkinji potrebna odgovarajuća literatura i lični računar (kompjuter). Stoga ovo naučno istraživanje ne zahtijeva velike materijalne i tehničke resurse. Rezultati istraživanja biće predstavljeni na međunarodnim naučnim konferencijama o trošku kandidatkinje ili Prirodno-matematičkog fakulteta na kome je zaposlena ili Ministarstva Nauka

Crne Gore koje finansira ovakve aktivnosti.

Imajući u vidu da će se samo istraživanje izvoditi pojedinačno ili u malim grupama matematičara vremenski je adekvatno isplanirano i finansijski realno sprovodljivo.

Navedena literature i reference:

- 1] V. N. Katsikis, D. Pappas, A. Petralias, An improved method for computation of the Moore-Penrose inverse matrix, Appl. Math. Comput. 217 (2011) 9828-9834
- [2] X. Sheng, G. Chen, Full-rank representation of generalized inverse $A_{T,S}^{(2)}$ and its applications, Comput. Math. Appl. 54(2007) 1422-1430
- [3] P. S. Stanimirović, M. D. Petković, Gauss-Jordan elimination method for computing outer inverses, Appl. Math. Comput. 219 (9) (2013) 4667-4679
- [4] A. Ben-Israel, T.N.E. Greville, Generalized Inverses, Theory and Application, second ed., Springer, 2003
- [5] M. D. Petković, P. Stanimirović, V. Katsikis, Modified discrete iterations for computing the inverse and pseudoinverse of the time-varying matrix, Neurocomputing 289 (2018), 155-165.
- [6] P. Stanimirović, M. D. Petković, Gradient neural dynamics for solving matrix equations and their applications, Neurocomputing 306 (2018), 200-212.
- [7] P. Stanimirović, M. D. Petković, D. Gerontitis, Gradient neural network with nonlinear activation for computing inner inverses and the Drazin inverse, Neural Processing Letters 48:1 (2018), 109-133.
- [8] M. D. Petković, P. Stanimirović, Two improvements of the iterative method for computing Moore-Penrose inverse based on Penrose equations, Journal of Computational and Applied Mathematics 267 (2014), 61-71.
- [9] M. D. Petković, Generalized Schultz iterative methods for the computation of outer inverses, Computers & Mathematics with Applications 67:10 (2014), 1837-1847.
- [10] M. D. Petković, M. S. Petković, Hyper-power methods for the computation of outer inverses, Journal of Computational and Applied Mathematics 278 (2015), 110-118.

Mišljenje i prijedlog komisije

Komisija je jednoglasno odlučila da je kandidatkinja odbranila polazna istraživanja i pokazala da je predložena tema pod nazivom "Iterativni metodi i neuronske mreže za izračunavanje generalisanih inverza matrica" aktuelna istraživačka tema u međunarodnim naučnim krugovima. Dosadašnji rezultati i predložene metode omogućavaju da se nastavkom istraživanja dođe do novih originalnih doprinosa u oblasti numeričkih iterativnih metoda i neuronskih mreža koje dobro povezuju teorijsku matematiku sa primijenjenom kao i sa računarskim naukama i primjenama u drugim tehničkim naukama. Predlog Komisije je da kandidatkinja nastavi sa istraživanjem prema predloženom planu istraživanja i da dobijene rezultate pripremi za publikovanje u referentnim naučnim časopisima.

Prijedlog izmjene naslova

Prijedlog promjene mentora i/ili imenovanje drugog mentora

Planirana odbrana doktorske disertacije

Treća godina doktorskih studija, VI semestar

Izdvojeno mišljenje

(popuniti ukoliko neki član komisije ima izdvojeno mišljenje)

Ime i prezime



ObrazacD1: Ocjena podobnosti doktorske teze i kandidata

Abstract D1: Ocena pedagoški doktorske teze i kandidata

PRILOG

PITANJA KOMISIJE ZA OCJENU PODOBNOSTI DOKTORSKE TEZE I KANDIDATA	
dr Milenko Mosurović, redovni profesor, predsjednik Komisije	1. Da li Vam je potrebna posebna računarska oprema (npr. paralelni računari) za implementaciju algoritama i testiranje ili je dovoljan personalni računar? 2. Što se tiče vremenske složenosti u jednoj iteraciji dominira operacija množenja matrica, pa se pokušava smanjiti broj takvih množenja praveći odgovarajuće linearne kombinacije. Da li smanjenje broja množenja matrica u jednoj iteraciji može dovesti do povećanja ukupnog broja iteracija da bi se postigao zadati kriterijum?
dr Milan Martinović, redovni profesor, član	1. Vi upravljate uzastopnim aproksimacijama X_k po smanjenju norme ostatka R_k. Da li se mogu dobiti izrazi za uzastopne aproksimacije po kriterijumu minimizacije kakvi su u metodi konačnih elemenata (Ritz i drugo) ili gradijentnih postupaka minimizacije funkcije (najbrži spust)? 2. U slučaju generalizovane Newtonove metode, da li se zapažaju razlike u tempu aproksimacije kada je riječ o matrici A koja je invertibilna, odnosno u MP slučaju, odnosno u slučaju Drazinovog inverza? 3. Uporedite količinu potrebnog računarskog vremena da se dođe do aproksimacije A^{-1} po Vašoj generalizovanoj Newtonovoj metodi sa onom primjenom standardnih postupaka inverzije date matrice.
PITANJA PUBLIKE DATA U PISANOJ FORMI	
	Nije bilo pitanja publike.
ZNAČAJNI KOMENTARI	