

Broj 1523
Podgorica, 13 06 2017 god.

VIJEĆU PRIRODNO-MATEMATIČKOG FAKULTETA I SENATU UNIVERZITETA CRNE GORE U PODGORICI

PREDMET: Ocjena doktorske disertacije mr Gorana Popivode

Na sjednici Senata Univerziteta Crne Gore, održanoj 2. juna 2017. godine, imenovana je Komisija u sastavu: dr Pavle Mladenović (redovni profesor Matematičkog fakulteta u Beogradu), dr Siniša Stamatović (redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Podgorici), dr Žana Kovijanić-Vukićević (redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Podgorici), dr Svjetlana Terzić (redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Podgorici), dr Božidar Popović (docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Podgorici), čiji je zadatak da pregleda i ocijeni doktorsku disertaciju sa naslovom "Ekstremi uslovno-Gausovih procesa" kandidata mr Gorana Popivode.

Komisija je pregledala tekst disertacije i Vijeću i Senatu podnosi sljedeći

IZVJEŠTAJ

I Tema i cilj doktorske disertacije

Jedan od najstarijih, najznačajnijih i najtežih problema u teoriji slučajnih procesa je računanje vjerovatnoće

$$\mathbb{P} \left(\max_{t \in T} X(t) > u \right), \quad (1)$$

gdje je $X(t)$ slučajni proces ili slučajno polje. Ovaj problem je posebno atraktivan u slučaju Gausovih procesa i polja. Iako konačno dimenzionalne raspodjele Gausovog procesa imaju jednostavnu formu, ne postoji eksplicitna formula za vjerovatnoću (1) u opštem Gausovom slučaju. Zbog navedenog, centralni problem u teoriji ekstrema Gausovih procesa se pomjera ka traženju tačne asimptotike za (1), kada $u \rightarrow \infty$. Klasi Gausovih procesa pripadaju između ostalih: Vinerov proces, Braunov most, Ornštejn-Ulenbekov proces, fraktalno Braunovo kretanje. Klasi Gausovih polja pripadaju između ostalih: polje Viner-Čencova i Levijevo polje.

J. Pickands III je 1969. g. predložio elegantan i prirodan način za računanje tačne asimptotike vjerovatnoće (1) kada $u \rightarrow \infty$, gdje je $X(t)$ centriran stacionaran Gausov proces sa kovarijacionom funkcijom $r(t)$ za koju važi:

$$r(t) = 1 - |t|^\alpha + o(|t|^\alpha), \quad t \rightarrow 0$$

za neko $\alpha \in (0, 2]$ i

$$r(t) < 1, \quad t \neq 0.$$

Aproksimacija se bazira na primjeni Bonferonijeve nejednakosti, te je Pikandsov metod u literaturi poznat kao metod dvojne sume. Piterbarg je metodom dvojne sume dobio tačnu asimptotiku za (1) u nestacionarnom slučaju. Takođe, Piterbarg Pikandsov metod usavršava i primjenjuje u slučaju Gausovih polja. Geometriju polja bazira na korišćenju strukturnog modula. Teorija ekstrema Gausovih polja se hronološki razvija sljedećim redom: $X(t)$ iz (1) je homogeno Gausovo polje, zatim lokalno homogeno Gausovo polje i na kraju nehomogeno Gausovo polje.

Gausovi procesi se pojavljuju u mnogim oblastima: statistici, finansijama, aktuarskoj matematici, teoriji pouzdanosti, hidrologiji, klimatologiji, neuronskim mrežama. Teorija ekstrema Gausovih procesa se osim već pomenutog problema traženja asimptotike vjerovatnoće dostizanja visokog nivoa, bavi i sljedećim problemima: prognozom ekstrema, momentima broja presijecanja visokog nivoa, graničnim teoremama za broj tačaka presijecanja visokog nivoa. Najaktuelnije teme su teorija propasti sa Gausovim procesom kao inputom i ekstremi Gausovih procesa u slučajnom okruženju. Drugoj temi je posvećena predmetna disertacija.

Knjiški primjer primjene teorije ekstrema Gausovih procesa u statistici je iz oblasti testiranja koje se bazira na primjeni statistike tipa Kolmogorov-Smirnova. Ako raspodjela obilježja pripada parametarskoj familiji raspodjela $F(x; \theta)$ i ako je θ_N ocjena nepoznatog parametra θ dobijena metodom maksimalne vjerodostojnosti, tada empirijski proces

$$\zeta_N(x) = \sqrt{N}(F_N(x) - F_N(x, \theta_N))$$

slabo konvergira (uz uslove regularnosti) ka centriranom Gausovom procesu $\zeta(t)$. Problem nalaženja odgovarajuće kritične oblasti sada se rješava pomoću asimptotskih rezultata za $\mathbb{P}\left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \zeta(x) > u\right)$ i $\mathbb{P}\left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |\zeta(x)| > u\right)$ kada $u \rightarrow \infty$. Primjer primjene ekstrema Gausovih polja u statistici je testiranje homogenosti višedimenzionalnih uzoraka.

Neka je (X, Y) par slučajnih elemenata. Komponentu Y nazivamo slučajnim okruženjem, a komponentu X slučajnim elementom u slučajnom okruženju ako komponenta Y suštinski utiče na stohastička svojstva komponente X . Slučajno okruženje može da izmijeni svojstva pa čak i prirodu baznog modela X . Primjeri stohastičkih modela u slučajnom okruženju su: a) diferencijalne jednačine sa slučajnim koeficijentima i slučajnim graničnim uslovima; b) slučajna šetnja sa slučajnim vjerovatnoćama prelaza; b) perkolacioni procesi na slučajnim rešetkama.

Neka je $(X(t), Y)$, $t \in \mathbb{R}$, slučajni element, pri čemu je komponenta X slučajni proces koji uzima vrijednosti u $\mathbb{R}$, dok je komponenta Y neki drugi slučajni element. Za slučajni proces $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, kažemo da je *uslovno-Gausov* ako su uslovne raspodjele $X(\cdot) | Y$ Gausove. Za ovaj pojam se koristi i naziv *Gausov proces u slučajnom okruženju* Y .

Uslovno Gausovi procesi značajno proširuju klasu procesa čije ekstremne vrijednosti mogu biti proučavane tehnikama koje se koriste u teoriji ekstrema Gausovih procesa. Traženju tačne asimptotike za vjerovatnoću ekstrema uslovno-Gausovog procesa prethodi traženje asimptotike za Gausov

proces sa konstantnim, neslučajnim parametrom (ili parametrima), a zatim se vrši usrednjavanje po svim mogućim vrijednostima parametra (parametara). Izučavanje modela slučajnog elementa u slučajnom okruženju podrazumijeva upotrebu teorije uslovnog matematičkog očekivanja i uslovne vjerovatnoće. Kod "čisto" Gausovih procesa visine visokih maksimuma kao i momenti njihovih realizacija su asimptotski nezavisni. Zbog ove činjenice, visoki ekstremi kod Gausovih modela su nepogodni za prognoziranje. U slučaju uslovno-Gausovih procesa ekstremi postaju zavisni, a samim tim i pogodniji za prognoziranje.

Problem iz oblasti ekstrema uslovno-Gausovih procesa se po prvi put pojavljuje u radu Adler et al. [3]. U tom radu razmotren je proces $X(t) = A^{1/2} \cdot G(t)$, gdje je $G(t)$ stacionaran Gausov proces, dok je A stabilna slučajna promjenljiva nezavisna od $G(\cdot)$, a predmet istraživanja je očekivani broj prelazaka visokog nivoa u procesom X . Radovi Husler et al. [34] i Husler et al. [35] predstavljaju početke teorije ekstrema uslovno-Gausovih procesa. U pomenutim radovima razmatrani su Gausovi procesi sa slučajnom disperzijom za stacionarni i nestacionarni slučaj. Tehnikom koja naglašava korišćenje standardnih postupaka iz teorije ekstrema Gausovih procesa, dobijene su tačne asimptotike za vjerovatnoće dostizanja visokog nivoa navedenog uslovno-Gausovog procesa. U radu [34] autori navode neke od problema iz domena uslovno-Gausovih procesa kojima bi trebalo posvetiti pažnju. Naznačeni problemi i neki koji se prirodno nadovezuju predstavljaju srž disertacije mr Gorana Popivode.

Tema disertacije je dobijanje tačne asimptotike vjerovatnoće

$$\mathbb{P} \left(\max_{t \in T} X(t) > u \right),$$

kada $u \rightarrow \infty$, gdje je slučajna funkcija $X = \{X(t), t \in T\}$ realni slučajni proces ili polje u slučajnom okruženju, zadat na parametarskom skupu $T \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Razmatraju se procesi

$$X_1(t) := \xi(t) + \eta(t), \quad X_2(t) := \chi_n(t) + \eta(t), \quad X_3(t) := \eta(t)\xi(t) + \mu(t),$$

$t \in [0, T]$, $T > 0$, gdje je ξ centriran stacionaran Gausov proces sa kovarijacionom funkcijom $r(t) = 1 - |t|^\alpha + o(|t|^\alpha)$, $t \rightarrow 0$, za neko $\alpha \in (0, 2]$, i pretpostavlja se da je $r(t) < 1$ za svako $t \in [0, T]$. Proces χ_n je χ -proces sa n stepeni slobode generisan sa n nezavisnih kopija procesa ξ , dok su η i μ glatki slučajni procesi nezavisni od ξ . Neka je

$$\sigma = \sup\{x : \mathbb{P}(\eta(t) \leq x) < 1\}, \quad \text{za svako } t \in [0, T].$$

Pretpostavlja se da je za svako $t \in [0, T]$ rep funkcije raspodjele slučajne promjenljive $\eta(t)$, pravilno promjenljiva funkcija u tački σ .

Asimptotika vjerovatnoće dostizanja visokog nivoa poljima u disertaciji je razmatrana za sljedeća dva slučaja. Neka je $\{\xi(t), t \in T\}$ homogeno centrirano Gausovo polje sa kovarijacionom funkcijom (E, α) -tipa i neka je T zatvoreni Žordanov skup takav da $0 \in T$. Računaju se tačne asimptotike

za

$$\mathbb{P}\left(\max_{t \in T} \xi(t) \left(\lambda - \frac{1}{2} \zeta \|t\|^2\right) > u\right) \quad \text{i} \quad \mathbb{P}\left(\max_{t \in T} \left(\xi(t) + \lambda - \frac{1}{2} \zeta \|t\|^2\right) > u\right),$$

pri $u \rightarrow \infty$. Ovdje su λ i ζ pozitivne slučajne promjenljive nezavisne od $\xi(\cdot)$, pri čemu je rep funkcije raspodjele za λ pravilno promjenljiva funkcija u tački

$$\sigma := \sup\{x : \mathbb{P}(\lambda \leq x) < 1\}.$$

II Struktura i rezultati disertacije

Disertacija je napisana na 89 stranica i sastoji se od Uvoda i još tri glave. U uvodnoj glavi je dat pregled pojmova i klasičnih rezultata na koje se doktorand poziva prilikom formulisanja i dokazivanja originalnih rezultata. Teme obrađene u Uvodu su: Gausove slučajne promjenljive i vektori; Gausove slučajne funkcije; teorija ekstrema Gausovih procesa i polja sa naglaskom na metod dvojne sume; pravilno promjenljive funkcije. Materijal je izložen pregledno, koncizno i lijepo korelira sa tekstom koji slijedi.

Tema druge i treće glave su ekstremi Gausovih slučajnih procesa u slučajnom okruženju. Druga glava je posvećena ekstremima Gausovih slučajnih procesa sa slučajnim trendom (očekivanjem). Slučajna funkcija oblika $\{X(t) + m(t), t \in T\}$, $T \subset \mathbb{R}^n$, gdje je X slučajni proces ili polje, naziva se *slučajni proces* ili *polje sa trendom*, a funkcija m koja nije identički jednaka nuli se naziva *trend*. Ekstremi Gausovih slučajnih procesa sa trendom su razmatrani samo u nekim specijalnim slučajevima, imamo u vidu ponašanje funkcije $m(t)$ u okolini tačke u kojoj disperzija Gausovog procesa dostiže maksimum.

Neka je $\xi = \{\xi(t), t \in [0, T]\}$, $T > 0$, centriran stacionaran Gausov proces i neka je $\eta = \{\eta(t), t \in [0, T]\}$ slučajni proces nezavisan od ξ . Ako je $X(t) := \xi(t) + \eta(t)$, tada je proces $X = \{X(t), t \in [0, T]\}$ uslovno-Gausov i važi

$$\mathbb{E}(\xi(t) + \eta(t) | \eta(t)) = \eta(t).$$

Doktorand motivisan svojstvima procesa η , proces X naziva *Gausov proces sa glatkim slučajnim trendom*. Takođe, razmatran je i slučaj u kojem se na mjestu procesa $\xi(t)$ pojavljuje proces

$$\chi_n(t) = (\xi_1^2(t) + \xi_2^2(t) + \dots + \xi_n^2(t))^{1/2},$$

gdje su ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, nezavisne kopije centriranog stacionarnog Gausovog procesa

$$\xi = \{\xi(t), t \in [0, T]\}$$

dok je $\eta = \{\eta(t), t \in [0, T]\}$ proces nezavisan od ξ_i za svako $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

U drugoj glavi je dobijena tačna asimptotika za vjerovatnoću dostizanja visokog nivoa za procese $\xi(t) + \eta(t)$ i $\chi_n(t) + \eta(t)$. U prvom paragrafu su formulisane i dokazane dvije tehničke leme uz pomoć kojih autor značajno proširuje klasu procesa $\eta(t)$ za koje važe rezultati iz rada [34] i disertacije Rumyantseva [69]. Uslovi koji se nameću na proces $\eta(t)$, $t \in [0, T]$ podrazumijevaju njegovu glatkost u okolinama tačaka u kojima proces dostiže visoke ekstreme (ekstreme bliske σ tj. esencijalnom supremumu procesa) i pravilnu promjenljivost repa funkcije raspodjele siječenja $\eta(t)$ za $x = \sigma$, $t \in [0, T]$. Asimptotika je dobijena nakon iscrpne i precizne analize sa mnogo tehničkih detalja. U osnovi dokaza je metod dvojne sume, a koriste se Pikandsova teorema, Kempbelova formula i Borelova teorema. Na početku dokaza je proces $\eta(t)$ u okolinama tačaka dostizanja visokih ekstrema aproksimiran parabolama, autor ih naziva "šeširima". Na asimptotiku esencijalni uticaj ima samo ponašanje procesa $\eta(t)$ u uskoj traci $(\sigma, \sigma - \epsilon)$, a u toj traci proces je aproksimiran pomenutim "šeširima". Ključno mjesto u dokazu je primjena Kempbelove formule na tačkasti proces lokalnih maksimuma $\{(t, \eta(t), \eta''(t)), t \in \mathcal{M}(\epsilon(u))\}$, proces je zadat na $[-\delta(u), T + \delta(u)] \times [\sigma - \epsilon(u), \sigma] \times [-c, -\kappa]$. Parametri c i κ su dobijeni kroz aproksimaciju procesa $\eta''(t)$ dok su $\delta(u)$ i $\epsilon(u)$ dobijeni kroz postupak formiranja trake sa "šeširima". Na ovom mjestu se fokusira specifičnost zadatka traženja ekstrema za uslovno-Gausove procese. Skup tačaka u kojima se dostižu visoki ekstremi je slučajan i Kempbelova formula se koristi na mjestu kome je prethodila primjena klasičnih metoda i rezultata iz teorije ekstrema Gausovih procesa. Dokaz je koncipiran tako da se istovremeno sprovodi za slučaj uslovno-Gausovog procesa sa trendom i χ_n procesa sa trendom. Najznačajnije radove iz domena ekstrema χ procesa su objavili Albin [6] i Piterbarg [56]. χ proces je norma Gausovog vektorskog procesa i asimptotika se dobija tehnikom traženja ekstrema Gausovih polja na mnogostрукостima.

U trećoj glavi ustanovljena je tačna asimptotika vjerovatnoće dostizanja visokog nivoa procesom $X(t) := \eta(t)\xi(t) + \mu(t)$, $t \in [0, T]$ gdje je $\xi = \{\xi(t), t \in \mathbf{R}\}$, centriran stacionaran Gausov proces sa $\text{Var}(\xi(t)) = 1$, dok su $\eta = \{\eta(t), t \in \mathbf{R}\}$, $\mu = \{\mu(t), t \in \mathbf{R}\}$ slučajni procesi nezavisni od procesa ξ . Proces $X(t)$ je uslovno-Gausov jer su konačno-dimenzionalne raspodjele za $X(\cdot)$ pod uslovom (η, μ) , Gausove. Jednostavno se ustanovljava da proces $X(t)$ ima slučajni trend (očekivanje) i slučajnu disperziju. U disertaciji se razmatraju slučajevi u kojima su procesi $\eta(t)$ i $\mu(t)$ a) nezavisni; b) zavisni. Metodom dvojne sume uz tehniku svojstvenu proučavanju ekstrema uslovno-Gausovih procesa, a prokomentarisano u prikazu rezultata druge glave, dobijena je tačna asimptotika. Dobijeni rezultat predstavlja prirodan završetak istraživanja započetih u radovima [34] i Piterbarg et al. [57].

U četvrtoj glavi se razmatraju polja $X_1(t) := \xi(t)\eta(t)$ i $X_2(t) := \xi(t) + \eta(t)$, gdje je $\{\xi(t), t \in T\}$ homogeno centrirano Gausovo slučajno polje dok je η slučajno polje *paraboloid*-tipa, nezavisno od ξ . Određenije, $T \subset \mathbf{R}^n$ je zatvoren Žordanov skup takav da $0 \in T$, a polje $\xi(t)$ ima kovarijacionu funkciju $r(t)$ za koju važi

$$r(t) = 1 - |t|_{(E, \alpha)} + o(|t|_{(E, \alpha)}), \text{ kada } t \rightarrow 0,$$

za neku strukturu (E, α) , $E = (e_1, \dots, e_k)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ i $r(t) < 1$, $t \neq 0$.

Paraboloid-polje je zadato sa

$$\eta(t) := \lambda - \frac{1}{2}\zeta \|t\|^2, \quad t \in T,$$

gdje su λ i ζ slučajne promjenljive nezavisne od $\xi(\cdot)$. Pretpostavlja se da je $\lambda \geq \varepsilon$ za neko $\varepsilon > 0$ i da je ζ skoro izvjesno pozitivna. Takođe, pretpostavlja se da su vrijednosti $\sigma(\lambda)$, $\sigma(\zeta)$, $\sigma\left(\frac{\zeta}{\lambda}\right)$ konačne, a rep raspodjele slučajne promjenljive λ je pravilno promjenljiva funkcija u tački $\sigma(\lambda)$. Budući da je

$$\text{Var}(X_1(t) | \eta(t)) = \eta^2(t),$$

autor motivisan geometrijom polja $\eta(t)$, polje $X_1(t)$ naziva *Gausovo polje sa glatkom slučajnom disperzijom*. Budući da je

$$\mathbb{E}(X_2(t) | \eta(t)) = \eta(t),$$

autor polje $X_2(t)$ naziva *Gausovo polje sa glatkim slučajnim očekivanjem (trendom)*.

U četvrtoj glavi su dobijene tačne asimptotike za

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in T} X_i(t) > u\right), \quad u \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2.$$

Dobijeni rezultati su pionirski u oblasti ekstrema uslovno-Gausovih polja.

III Mišljenje i predlog

Mr Goran Popivoda se u disertaciji uspješno bavio problemima ekstrema uslovno-Gausovih procesa i polja. Riječ je o teoriji koja pripada aktuelnoj oblasti slučajnih procesa u slučajnom okruženju.

U prvoj glavi disertacije je prezentovana teorija ekstrema Gausovih procesa i polja. Materijal je izložen matematički korektno, pismeno, zanimljivo i sa istančanim osjećajem za suštinske teme teorije. Prva glava je odličan prikaz dostignuća u teoriji ekstrema Gausovih procesa i polja.

Drugi dio disertacije je izložen u tri glave i u njemu su prezentovani originalni rezultati. Na početku svake glave su date definicije pojmova koji se u tekstu pojavljuju. Formulacije tvrđenja su jasne i pregledne. Dokazi su sprovedeni detaljno, čitljivo i matematički pismeno. U dokazima ima mnogo zahtjevnih tehničkih detalja koji su od autora tražili originalna rješenja te maksimalnu koncentraciju i preciznost.

U disertaciji je dobijena tačna asimptotika za vjerovatnoću dostizanja visokog nivoa za: a) Gausove procese sa slučajnim trendom; b) χ_n procese sa slučajnim trendom; c) Gausove procese sa slučajnim trendom i slučajnom disperzijom; d) Gausova polja sa slučajnom disperzijom paraboloidnog tipa e) Gausova polja sa slučajnim trendom paraboloidnog tipa. Rezultati koji se odnose na a), c) i d) su izloženi redom u radovima [57], Piterbarg et al. [58] i Popivoda and

Stamatović [65]. Žurnali u kojima su radovi publikovani se nalaze na SCI listi.

Disertacija Mr Gorana Popivode je kvalitetno napisana. Doktorand je u disertaciji riješio nekoliko problema iz teorije ekstreme uslovno-Gausovih procesa i time dao doprinos u ovoj zahtjevnoj stohastičkoj disciplini.

Komisija predlaže Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta i Senatu Univerziteta Crne Gore da prihvati pozitivnu ocjenu ponuđenog teksta i odobre javnu odbranu disertacije kandidatu

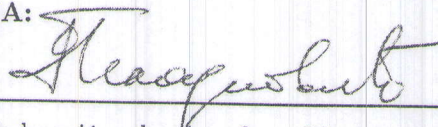
mr Goranu Popivodi

pod naslovom

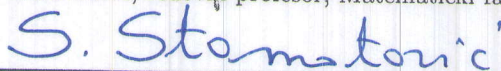
"Ekstremi uslovno-Gausovih procesa"

Podgorica, 12. jun 2017.

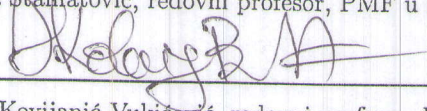
KOMISIJA:



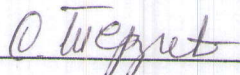
Dr Pavle Mladenović, redovni profesor, Matematički fakultet u Beogradu



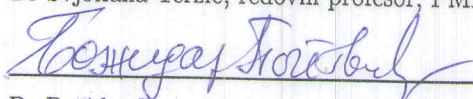
Dr Siniša Stamatović, redovni profesor, PMF u Podgorici



Dr Žana Kovijanić Vukičević, redovni profesor, PMF u Podgorici



Dr Svjetlana Terzić, redovni profesor, PMF u Podgorici



Dr Božidar Popović, docent, PMF u Podgorici