

UNIVERZITET CRNE GORE
Prirodno-matematički fakultet Podgorica

Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta

IZVJEŠTAJ KOMISIJE O PREGLEDU I OCJENI MAGISTARSKOG RADA VLADIMIRA IVANOVIĆA

Vijeće Prirodno-matematičkog fakulteta na sjednici održanoj 24. 09. 2019-te godine imenovalo je Komisiju za pregled i ocjenu magistarskog rada pod nazivom "Kohomologije nekih GKM grafova", kandidata Vladimira Ivanovića, u sastavu dr Svjetlana Terzić, redovni profesor-mentor, dr Žana Kovijanić-Vukićević, redovni profesor-član i dr Vladimir Božović, vanredni profesor-član.

Kandidat Vladimir Ivanović predao je tekst magistarskog rada 09. 01. 2020-te godine na uvid javnosti i ocjenu.

Nakon uvida u podneseni tekst, a u vezi sa članom 29 Pravila studiranja na postdiplomskim studijama, podnosimo sledeći

IZVJEŠTAJ

Magistarski rad Vladimira Ivanovića, specijaliste matematike, pod nazivom "Kohomologije nekih GKM grafova" se sastoji od 48 strana originalnog teksta, uz dodatne strane koje se odnose na predgovor, sadržaj i spisak slika. Kandidat je izostavio da uključi u tekst izvod rada i izvod rada na engleskom jeziku, o čemu je informisan i oni će biti dodati u konačan tekst rada. Na taj način tekst će ispunjavati sve zahtjeve propisane članom 27 Pravila studiranja na postdiplomskim studijama.

Rad pripada oblasti matematike, odnosno uže specijalizovanoj oblasti algebarske topologije. Rad se sastoji iz tri poglavlja: Grafovi i aksijalne funkcije, Kohomološki prsten i Primjeri kohomoloških prstena. Svako od ovih poglavlja je podijeljeno na potpoglavlja u kojima se detaljno i nadovezano prikazuju pojmovi i tvrdjenja koja se razmatraju. U tom smislu je u drugoj glavi dokazan niz tvrdjenja na koja će se originalna izračunavanja u trećoj glavi direktno oslanjati. Sve ovo je uradjeno pozivajući se na odgovarajuću referentnu literaturu.

Postavljeni cilj rada je opis kohomoloških grupa i Betijevih brojeva nekih važnih GKM grafova. U prvom redu to se odnosi na grafove tipa S_n , G_2 i $G_{4,2}$ koji u pridruživanju Goresky-Kottwitz-MacPherson, odgovaraju kompletnim kompleksnim flagovim mnogostrukostima, zatim flagovim mnogostrukostima specijalne Lijeve grupe G_2 , kao i Grasmanovoj mnogostrukosti $G_{4,2}$.

U slučaju kada je na mnogostrukosti M dato dejstvo grupe G , a najčešće je ta grupa torus T , može se definisati ekvivarijantni kohomološki prsten $H_T^*(M)$. To je prsten koji predstavlja ekvivarijantnu homotopsku invarijantu mnogostrukosti i detektuje u izvjesnom smislu interakciju između topologije same mnogostrukosti i dejstva grupe G . U radu matematičara Goresky-Kottwitz-MacPherson je pokazano da se problem opisa ekvivarijantnog kohomološkog prstena T -dejstva na M , pod određenim dopunskim pretpostavkama, može formulisati na jeziku grafova. Dopunske pretpostavke su da je mnogostrukost M ekvivarijantno formalna, da T -dejstvo na M ima končan broj fiksni tačaka i da je prostor M_1 jednodimenzionih orbita ovog dejstva dvodimenzionalan. Mnogostrukosti koje zadovoljavaju ova svojstva nazivaju se GKM mnogostrukostima. Svako GKM mnogostrukosti može se pridružiti graf čija tjemena odgovaraju fiksni tačkama T -dejstva na M , a dva tjemena su povezana ivicom ako i samo ako odgovarajuće fiksne tačke pripadaju zatvorenju iste komponente povezanosti, koje su sfere, u M_1 . Ovako pridruženi graf je težinski, odnosno na njemu se može definisati aksijalna funkcija koja svakom paru (tjeme, susjedna ivica) $= (p, e)$ pridružuje težinski vektor, odnosno karakter reprezentacije torusa T u $T_p M$ za komponentu S^2 u M_1 kojoj odgovara ivica e . Grafovi sa ovim svojstvom pripadaju grupi GKM grafova, kojima se čisto kombinatornim metodama može pridružiti kohomološki prsten. Značajan rezultat rada Goresky-Kottwitz-MacPherson je da je kohomološki prsten ovako dobijenog GKM grafa izomorfan ekvivarijantnom kohomološkom prstenu $H_T^*(M)$.

Imajući u vidu opisanu korespondenciju, u radu se navodi detaljan prikaz teorije GKM grafova i njihovih kohomologija, a u tom smislu i metoda i tehnika razvijenih u literaturi u svrhu pristupa problemu računanja kohomoloških prstena ovih grafova. Zatim se primjenom ovih naprednih tehnika opisuju kohomološki prsteni nekih značajnih GKM grafova tipa A_n , eksplicitno A_3 , a zatim i GKM grafa tipa G_2 , kao i Betijevi brojevi grafa tipa $G_{4,2}$.

U radu se primjenjuju metode algebarske topologije, polinomijalne algebre i teorije grafova.

Detaljan pregled rada po poglavljima je sledeći.

U prvoj glavi se navode osnovne definicije koje se odnose na graf, aksijalnu funkciju na grafu, orijentaciju grafa, kao i osnovni pojmovi algebarskih struktura koje se koriste u radu.

U drugoj glavi se definiše kohomološki prsten grafa sa aksijalnom funkcijom. Zatim se navode primjeri značajnih GKM grafova i opisuju njihove aksijalne funkcije, a za neke predstavlja i izračunavanje kohomoloških prstena bazirano na odgovarajućoj literaturi. U tom smislu naveden je kompletan graf K_n , multigraf S_2^3 i graf tipa $S_2 \times S_2$, za koje dat i opis odgovarajućih kohomoloških prstena. Navedeni su i pojmovi Keljijevog grafa S_N , grafa tipa $G_{4,2}$ i grafa tipa G_2 , i opisane njihove aksijalne funkcije, dok će se njihove kohomologije razmatrati kasnije u radu.

Direktno opisati kohomološki prsten grafa je, osim u slučajevima jednostavnih grafova, složen problem. Usled toga se u drugom dijelu ovog poglavlja predstavlja teorija raslojenja grafova koja se razvila i kao jedna od metoda za određivanje kohomološkog prstena grafa. U slučaju prisustva aksijalne funkcije ova teorija se prenosi na GKM grafove, pri čemu se dobijaju GKM raslojenja, što je i prikazano u radu. U ovom kontekstu su u radu definisani i pojmovi holonomijalne grupe sloja Γ_p grafa Γ za raslojenje grafova $\pi : \Gamma \rightarrow B$, kao i pojam karakterističnog grafa F za graf Γ . Takodje su definisani i (kombinatorni) Betijevi brojevi grafa i ukazano na njihovu vezu sa dimenzijom kohomoloških grupa grafa. Dalje su detaljno analizirani primjeri raslojenja za grafove tipa S_n , G_2 i $G_{4,2}$. Na kraju ovog poglavlja je prikazan dokaz iz literature teoreme o kohomologijama GKM raslojenja kojom se daje opis modula kohomologija grafa Γ ako su poznate kohomologije baznog grafa B i specijalno definisanog skupa kohomoloških klasa grafa Γ za raslojenje $\pi : \Gamma \rightarrow B$.

U trećem poglavlju se primenjuje prethodna teorema o opisu modula kohomologija grafa preko raslojenja grafova i eksplicitno opisuje modul kohomologija ranije pomenutih značajnih grafova. U tu svrhu se prvo definiše pojam Weyl-ove grupe W , a zatim i GKM graf Weyl-ove podgrupe Weyl-ove grupe. Prikazuje se, koristeći literaturu, dokaz teoreme da je za Weyl-ove podgrupe $W_1 \subset W_2 \subset W$ projekcija $\pi : W/W_1 \rightarrow W/W_2$ GKM raslojenje sa karakterističnim slojem W_2/W_1 . Dalje je za ovakva raslojenja opisana holonomijalna grupa i baza invarijantnih klasa.

U ovom poglavlju su rezultati o GKM raslojenju Weyl-ovih podgrupa Weyl-ovih grupa primijenjeni na grafove tipa S_n i tipa G_2 . Detaljno je pokazano da raslojenja $\pi : S_n \rightarrow K_n$ i $G_2 \rightarrow S_2^3$ odgovaraju raslojenjima Weyl-ovih grupa tipa A_n i tipa G_2 . Primjenjujući prethodno, kao eksplicitan rezultat rada opisan je modul kohomologija grafa tipa S_3 i grafa tipa G_2 . U ovom poglavlju su takodje, kao

rezultat rada, određeni eksplicitno (kombinatorni) Betijevi brojevi grafa tipa $G_{4,2}$.

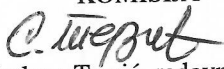
Zaključak i predlog

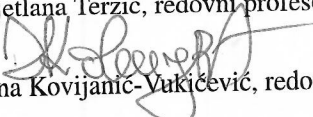
Na osnovu prethodno izloženog smatramo da je magistarski rad kandidata Vladimira Ivanovića napisan jasno, da su svi pojmovi i tvrdjenja koja se koriste tačno i detaljno prikazani i da su dobijeni rezultati koji se tiču opisa modula kohomologija grafova tipa S_3 i G_2 , kao i Betijevih brojeva grafa tipa $G_{4,2}$ izvedeni detaljno i jasno. Na osnovu toga smatramo da rad ispunjava sve uslove predviđene Pravilima studiranja na postdiplomskim studijama. Kandidat je kroz izradu ovog rada ovladao jednom od savremenih matematičkih teorija i uspješno je primijenio sa ciljem dobijanja eksplicitnih rezultata. Smatramo da je na taj način kandidat u potpunosti realizovao postavljene ciljeve. U skladu sa tim, Komisija pozitivno ocjenjuje magistarski rad "Kohomologije nekih GKM grafova" kandidata Vladimira Ivanovića.

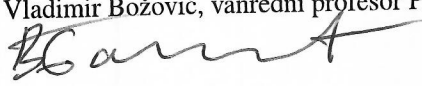
Komisija predlaže Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta da rad pod naslovom "Kohomologije nekih GKM grafova" kandidata Vladimira Ivanovića prihvati kao magistarski rad i odobri njegovu javnu usmenu odbranu.

U Podgorici, 07. 02. 2020.

KOMISIJA


dr Sveltana Terzić, redovni profesor PMF-a – mentor


dr Žana Kovijanić-Vukićević, redovni profesor PMF-a – član


dr Vladimir Božović, vanredni profesor PMF-a – član