

**UNIVERZITET CRNE GORE
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DOKTORSKE STUDIJE**

Crna Gora
UNIVERZITET CRNE GORE
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
Broj 3387/11
Podgorica, 21-12-2020 20__ god.

VIJEĆU PRIRODNO-MATEMATIČKOG FAKULTETA

Predmet: Ocjena podobnosti doktorske teze i kandidata

U skladu sa članom 35, stav 2, Pravila doktorskih studija, Komisija za ocjenu podobnosti doktorske teze i kandidata koju je imenovao Senat Univerziteta Crne Gore na sjednici održanoj 11-12. 12. 2020. godine, u sastavu

1. **Dr Oleg Obradović**, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore (naučna oblast: Parcijalne diferencijalne jednačine)
2. **Dr David Kaljaj**, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore (naučna oblast: Matematička analiza)
3. **Dr Darko Mitrović**, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore, mentor (naučna oblast: Parcijalne diferencijalne jednačine)

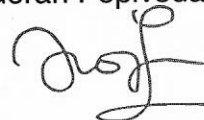
podnijela je Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta **Izvještaj sa javne odbrane polaznih istraživanja doktorske disertacije i Ocjenu podobnosti teme doktorske disertacije (Obrazac D1)** kandidata **mr Nikole Konatara**.

Komisija za doktorske studije PMF-a je na sjednici održanoj 21. 12. 2020. godine, zaključila da dostavljeni Izvještaj sadrži sve elemente propisane Pravilima doktorskih studija i Vodičem za doktorske studije i prosljeđuje ga na razmatranje Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta.

Podgorica, 21. 12. 2020. god.

ZA KOMISIJU ZA DOKTORSKE STUDIJE

Doc. dr Goran Popivoda





OCJENA PODOBNOSTI DOKTORSKE TEZE I KANDIDATA

OPŠTI PODACI O DOKTORANDU	
Titula, ime i prezime	MSc Nikola Konatar
Fakultet	Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore
Studijski program	Matematika
Broj indeksa	1/16
Podaci o magistarskom radu	Elementi teorije stabilnosti i bifurkacija i primjene u zadacima sinhronizacije nelinearnih oscilacija, Optimalno upravljanje, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, 2016, 10.00
NASLOV PREDLOŽENE TEME	
Na službenom jeziku	Zakoni održanja u okviru stohastičkih i determinističkih modela
Na engleskom jeziku	Conservation laws in the framework of stochastic and deterministic models
Datum prihvatanja teme i kandidata na sjednici Vijeća organizacione jedinice	03.11.2020.
Naučna oblast doktorske disertacije	Parcijalne diferencijalne jednačine
Za navedenu oblast matični su sljedeći fakulteti	
Prirodno-matematički fakultet	
A. IZVJEŠTAJ SA JAVNE ODBRANE POLAZNIH ISTRAŽIVANJA DOKTORSKE DISERTACIJE	
MSc Nikola Konatar, student doktorskih studija Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore, pristupio je, dana 21.12.2020, godine u 13:00h, odbrani sprovedenih polaznih istraživanja teme doktorske disertacije „Zakoni održanja u okviru stohastičkih i determinističkih modela“ pred Komisijom u sastavu: - Prof. dr Oleg Obradović, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore (predsjednik Komisije) - Prof. dr David Kaljaj, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore (član) - Prof. dr Darko Mitrović, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore (mentor) Komisija je imenovana na sjednici Vijeća Prirodno-matematičkog fakulteta, održanoj 03.11.2020. godine. Kandidat je precizno izložio osnovnu temu disertacije, kao i dosadašnje rezultate istraživanja u oblasti. Komisija je zaključila da ovo istraživanje predstavlja doprinos polju zakona održanja, determinističkih i stohastičkih, i da je struktura distertacije na zadovoljavajućem nivou. Komisija je, uzimajući u obzir kvalitet sprovedenih istraživanja i kvalitet odbrane, jednoglasno donijela odluku da je kandidat uspješno odbranio polazna istraživanja.	
B. OCJENA PODOBNOSTI TEME DOKTORSKE DISERTACIJE.	

B1. Obrazloženje teme

Trenutno, raste interesovanje za istraživanja u polju stohastičkih parcijalnih diferencijalnih jednačina, a posebno stohastičkih zakona održanja. Ovo je motivisano mnogobrojnim primjenama u biologiji, finansijama, istraživanju poroznih sredina, i, u opštem, u svim situacijama kada ne možemo parametre koji upravljaju procesima odrediti precizno, odnosno u sistemima koji mogu biti pod uticajem slučajnog šuma (random noise). U mnogim slučajevima njegovo prisustvo može dovesti do novih fenomena. Kandidat će se za početak baviti dinamikom interakcije između dvije tečnosti u poroznoj sredini, u trodimenzionom slučaju. Poznato je da dinamikom interfejsa između dvije nesmješljive tečnosti različitih gustina u poroznoj sredini upravljaju Darsijev zakon, zakon održanja mase i nesmješljivost. U dvodimenzionom slučaju, ovo ponašanje je istraženo (sa matematičke tačke gledišta), ali, pošto metod za istraživanje ovog ponašanja u dvodimenzionom slučaju koristi funkciju toka, koja ne postoji u dimenzijama većim od dva, potrebno je razviti novi metod kako bi opisali ponašanje u trodimenzionom slučaju. Nakon toga, kandidat će ispitivati postojanje rješenja skalarnih zakona održanja sa fluksom koji nije neprekidan. Za razliku od slučaja u kome je fluks neprekidan, pitanja egzistencije i jedinstvenosti rješenja kao i egzistencije tragova entropijskih rješenja su još uvijek otvorena u slučaju kada fluks ima prekide, pa mi tražimo uslove pod kojima skalarni zakon održanja sa prekidnim fluksom dozvoljava bar jedno slabo rješenje. Na kraju, kandidat će razmatrati problem postojanja i jedinstvenosti rješenja jedne klase stohastičkih zakona održanja na Rimanovim mnogostrukostima. Problemi egzistencije i jedinstvenosti rješenja stohastičkih zakona održanja su do sada razmatrani iz raznih uglova, ali se metodi koji su korišteni ne mogu direktno primijeniti na ovaj zadatak, zbog strukture same mnogostrukosti na kojoj tražimo rješenje. Zbog toga, potrebno je razviti novi metod za dokazivanje egzistencije i jedinstvenosti rješenja naše klase jednačina na mnogostrukosti.

B2. Cilj i hipoteze

U ovoj doktorskoj disertaciji razmatraće se zakoni održanja i njihove primjene. Za početak, kandidat istražuje dinamiku kretanja fluida u poroznoj sredini, u trodimenzionalnom slučaju. Hipoteza je da će se vrh granice interakcije između dvije tečnosti kretati nadolje ako je teži fluid iznad lakšeg i obratno. Cilj je dobiti metod kojim će se rigorozno dokazati ovo svojstvo. Nakon toga, kandidat će se baviti se skalarnim zakonima održanja sa fluksom koji ima prekide. Razmatra skalarni zakon održanja

$$\partial u + \operatorname{div}_x f(x, u) = 0,$$

gdje je $f \in BV(R^d; C(R^d))$, i važi $\max_{\lambda \in [-M, M]} |f(x, \lambda)| \in L_{loc}^{1+\sigma}(R^d)$ i $f(x, \lambda) = 0$ za $\lambda \notin (a, b)$ za neko $a, b \in R$. Hipoteza je da ova jednačina, uz dodatne uslove nedeģenerisanosti i sa početnim uslovom u_0 ima bar jedno slabo rješenje. Cilj istraživanja je naći te dodatne uslove koji moraju biti zadovoljeni kako bi bar jedno slabo rješenje postojalo, kao i dobiti novi metod za dokazivanje egzistencije rješenja korišćenjem modifikacije H -mjera i kinetičke formulacije.

Za kraj, kandidat razmatram skalarni zakon održanja sa stohastičkim upravljanjem

$$du + \operatorname{div}_g f(x, u) dt = \Phi(x, u) dW_t, x \in M, t \geq 0,$$

sa početnim uslovom u_0 na glatkoj, kompaktnoj Rimanovoj mnogostrukosti (M, g) , gdje je W_t Vinerov proces, a $x \rightarrow f(x, \xi)$ vektorsko polje na M za svako ξ iz skupa realnih brojeva, a Φ funkcija iz prostora $C_0^1(M, R)$. Hipoteza je da rješenje ove jednačine na zadatoj mnogostrukosti pod zadatim uslovima postoji i da je jedinstveno. Cilj istraživanja je naći uslove postojanja rješenja, izvesti kinetičku formulaciju problema i dokazati da je pod

dobijenim uslovima rješenje jedinstveno.

B3. Metode i plan istraživanja

Kandidat razmatra ponašanje interfejsa između dvije nesmješljive tečnosti različitih gustina, kojim upravljaju Darsijev zakon, zakon održanja mase i nesmješljivost. Metod ispitivanja ponašanja ovog interfejsa će se zasnivati na praćenju kretanja tačaka sa interfejsa. Kretanje interfejsa je opisano transportnim jednačinama i tačke se kreću duž karakteristika. Pošto je brzina kojim se tačke sa interfejsa kreću nepoznata, metod će ih zamijeniti odgovarajućim funkcijama Grinovog tipa. Važno svojstvo metoda koji kandidat predlaže je što izbjegava korišćenje funkcije toka, koja ne postoji u dimenzijama većim od dva.

U drugom dijelu rada kandidat će se baviti se zakonima održanja sa prekidnim fluksom. Kandidat želi naći uslove pod kojima ranije opisana jednačina ima bar jedno slabo rješenje. Metod koji kandidat koristi će se zasnivati na metodi nestajuće viskoznosti, i zatim dokazivanju da je dobijena familija aproksimativnih rješenja jako L^1_{loc} prekompaktna. Glavni alat pri dokazu konvergencije će biti dobijanje kinetičke formulacije problema, a zatim primjena H -mjera i H -distribucija kako bi dobili prekompaktnost familije aproksimativnih rješenja.

Na kraju, kandidat se bavi stohastičkim zakonima održanja na glatkim, kompaktnim mnogostrukostima. Pošto je jednačina koju razmatra nelinearna hiperbolička jednačina, u opštem slučaju rješenje ne mora biti neprekidno. Zbog toga mora razmatrati slaba rješenja jednačine, što može biti problematično sa stanovišta jedinstvenosti rješenja, jer se može konstruisati više slabih rješenja jednačine koja zadovoljavaju isti početni uslov. Kandidat mora izolovati rješenja koja su fizički moguća, pa mora uvesti uslove dozvoljivosti rješenja entropijskog tipa. Prvo ih mora uvesti lokalno, a zatim pomoću uslova geometrijske kompatibilnosti dokazati da ovi uslovi važe i globalno, odnosno na cijeloj mnogostrukosti.

Nakon toga, kandidat će izvesti kinetičku formulaciju problema, koju će koristiti u dokazima postojanja i jedinstvenosti rješenja. Jedinstvenost rješenja, nakon izvedene kinetičke formulacije problema, dokazaće korišćenjem metoda dupliranja promjenljivih. Zbog prirode rješenja (kao što smo rekli, rješenje može imati prekide) i strukture mnogostrukosti, kandidat mora koristiti aproksimaciju rješenja neprekidnim funkcijama, i dokazati da pod zadatim uslovima takav niz rješenja stvarno konvergira ka slabom rješenju jednačine.

Nakon toga, kandidat će dokazati da za zadati početni uslov postoji rješenje izvedenog kinetičkog problema, a samim tim i rješenje početne jednačine. Koristiće princip nestajuće viskoznosti, i koristeći aproksimacije Galerkin dokazaće postojanje niza aproksimativnih rješenja, koje će konvergirati ka rješenju jednačine po nekom podnizu.

B4. Naučni doprinos

Kao što smo naglasili, polje stohastičkih zakona održanja se brzo razvija, i stohastički zakoni održanja na mnogostrukostima su još uvijek nedovoljno istraženi. Kandidat će uvesti novi metod kojim se analizira kretanje dvije nesmješive tečnosti u poroznoj sredini; fenomen koji se opisuje specijalnim slučajem zakona održanja --Darsijevim zakonom. Zatim će dokazati egzistenciju rješenja skalarnog zakona održanja s prekidnim fluksom koristeći modifikaciju H -mjera i kinetičke formulacije. U posljednjem dijelu disertacije, pokazaće dobru

postavljenost za Košijev problem za stohastički skalarni zakon održanja na mnogostrukosti. U disertaciji se prepliću razne matematičke oblasti poput diferencijalne geometrije, stohastičke analize, funkcionalne analize, modeliranja te parcijalnih diferencijalnih jednačina.

B5. Finansijska i organizaciona izvodljivost istraživanja

Mišljenje komisije je da kandidat uz sopstvene napore i podršku Prirodno-matematičkog fakulteta može obezbijediti odgovarajuće organizacione uslove za izradu ove doktorske disertacije.

Mišljenje i prijedlog komisije

Komisija za ocjenu podobnosti teze i rada kandidata, nakon detaljnog razmatranja prijave teze, nakon javne prezentacije programa istraživanja, datih odgovora na postavljena pitanja, je mišljenja da su polazna istraživanja kandidata MSc Nikole Konatara originalan naučni poduhvat koji će dati vrijedan doprinos polju zakona održanja. U oblasti determinističkih zakona održanja, kandidat će poboljšati trenutne rezultate u poju i dati nove metode za istraživanje interakcije između fluida. Samo polje stohastičkih parcijalnih diferencijalnih jednačina, pa samim tim i stohastičkih zakona održanja je mlado, pa je i plodno tlo za istraživanje. Budući da se kandidat bavi stohastičkim zakonima održanja na mnogotrukostima, njegov zadatak se usložnjava usled prepletanja oblatsti, ali time i tema dobija na kvalitetu. Kandidat će predložiti nove metode za dokazivanje egzistencije i jednistvenosti rješenja zakona održanja sa stohastičkim upravljanjem na mnogostrukosti i time dati izvanredan doprinos ovoj oblasti.

Uzimajući u obzir sve navedeno, Komisija smatra da je tema istraživanja aktuelna i da odgovara nivou istraživanja za doktorsku disertaciju. Ciljevi disertacije su dobro definisani i, budući da se radi o problemima koji imaju fizički smisao, rezultati su očekivani. Stoga Komisija predlaže Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta da se podrži prijava disertacije kandidata Nikole Konatara.

Prijedlog izmjene naslova

/

Prijedlog promjene mentora i/ili imenovanje drugog mentora

/

Planirana odbrana doktorske disertacije

2022/VI semestar

Izdvojeno mišljenje

/

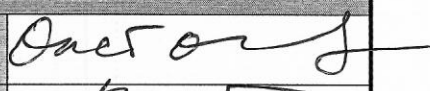
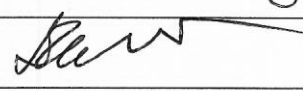
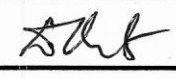
Ime i prezime _____

Napomena

/

ZAKLJUČAK

Predložena tema po svom sadržaju odgovara nivou doktorskih studija.	DA	NE
Tema je originalan naučno-istraživački rad koji odgovara međunarodnim kriterijumima kvaliteta disertacije.	DA	NE

Kandidat može na osnovu sopstvenog akademskog kvaliteta i stečenog znanja da uz adekvatno mentorsko vođenje realizuje postavljeni cilj i dokaže hipoteze.		DA	NE
Komisija za ocjenu podobnosti teme i kandidata			
Prof. dr Oleg Obradović, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Crna Gora			
Prof. dr David Kaljaj, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Crna Gora			
Prof. dr Darko Mitrović, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Crna Gora			
U Podgorici, 22.12.2020.		DEKAN	
MP			

PRILOG

PITANJA KOMISIJE ZA OCJENU PODOBNOSTI DOKTORSKE TEZE I KANDIDATA	
Prof. dr Oleg Obradović	Objasniti strategiju dokaza egzistencije rješenja kod stohastičkih zakona održanja.
Prof. dr David Kaljaj	Objasniti korišćenje Itove leme.
Prof. dr Darko Mitrović	Pojasniti razliku u pristupu u dvodimenzionalnom i trodimenzionalnom slučaju kod ispitivanja dinamike dvije nesmješive tečnosti u porznoj sredini.
PITANJA PUBLIKE DATA U PISANOJ FORMI	
ZNAČAJNI KOMENTARI	